

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

50. Band, Heft 6/10

1. März 1954.

S. 241—480

Geschichte.

Frajese, Attilio: *Costruzioni e postulati in Euclide.* Archimede 5, 45—48 (1953).

Verf. bringt neue Gedanken zur Begründung seiner früher geäußerten Auffassung (dies. Zbl. 42, 1), daß die ersten vier recht uneinheitlichen Sätze des 1. Buches der Elemente, in denen Schwerfälligkeit mit Feinheit, Exaktheit mit Irrtum in eigenartiger Weise abwechseln, eine Art Erweiterung zu den vorangehenden Postulaten darstellen.

K. Vogel.

Yamamoto, Susumu: *Beitrag zur Euklid-Forschung: Ein Quellenstudium über den finiten Charakter der griechischen Mathematik.* Commentarii math. Univ. St. Pauli 1, 59—66 (1953).

Der allen Exhaustionsbeweisen zugrunde liegende Satz ist Euklid X/1: Nimmt man von einer Größe mehr als die Hälfte weg, vom Rest wieder mehr als die Hälfte usf., so wird eine Größe übrig bleiben, die kleiner sein wird als eine vorgegebene zweite Größe. Verf. bemerkt, daß Euklid — entgegen seiner sonstigen Ausdrucksweise bei der Ekthesis eines Satzes — hier (wie auch schon in der Protasis) das Futurum *λειφθήσεται* und *ἔσται* verwendet. Dies sei kein Zufall, sondern Euklid wolle damit zum Ausdruck bringen, daß der entstehende Rest nicht genau genug bestimmt ist und so keine volle Existenz besitzt. — Ref. gibt dagegen zu bedenken, daß es in der Zusammenfassung (*συνπέρασμα*) doch wieder *καταλείπεται* oder bei Euklid X/2 in der Protasis zwar *ἔσται*, in der Ekthesis aber *ἐστί* heißt. — Weiterhin geht Verf. auf die beiden nur getrennt in Erscheinung tretenden Seiten der griechischen Mathematik ein: die räumlich-statische, in der mit endlichen Größen operiert wird, und die zeitlich-dynamische, die z. B. bei unendlichen Folgen in Erscheinung tritt.

K. Vogel.

Clagett, Marshall: *The medieval Latin translations from the Arabic of the Elements of Euclid, with special emphasis on the versions of Adelard of Bath.* Isis 44, 16—42 (1953).

Grundlegende Arbeit, die zum erstenmal Klarheit über die verschiedenen mittelalterlichen Euklidübersetzungen schafft. Die wichtigsten Ergebnisse: A. Von Adelard von Bath rühren höchstwahrscheinlich 3 Versionen her: I. Eine wörtliche Übersetzung aus einem arabischen, vermutlich der Rezension des Ḥaǧǧāǧ nahestehenden Text (vor 1142). Sie ist (über 4 Handschriften verstreut) fast vollständig erhalten, Buch I—VIII wahrscheinlich im Autograph, und weist noch ziemlich viele Arabizismen auf. — II. Eine Abkürzung, d. h. Umarbeitung der Definitionen, Postulate, Axiome und Sätze unter Annäherung an die Fassung des Pseudo-Boethius (von der Verf. erstmals eine vollständige Handschrift aus dem 12. Jahrh. entdeckt hat) und wohl auch Heranziehung weiteren arabischen Materials, sowie geschickte Verkürzung, oft nur Andeutung der Beweise, die ja im allgemeinen als nicht von Euklid herrührend galten. Diese Version verbreitete sich äußerst rasch und liegt fast allen späteren mittelalterlichen Euklidbearbeitungen zugrunde. — III. Eine „Editio“, d. h. eine formelle Ausarbeitung der Beweise unter Beibehaltung der Sätze nach Version II, sowie Hinzufügung von Erläuterungen und einer Einleitung, die arabisches und lateinisches Material verwendet (u. a. wird Gerbert zitiert). — B. Mindestens 2 weitere Übersetzungen aus dem Arabischen wurden im 12. Jahrh. gefertigt: I. Hermann von Kärnten (um 1140) übersetzte die Beweise aus dem schon von Adelard benutzten Text (Sätze nach Adelard II). Das einzige existierende Exemplar scheint mehr einen Entwurf darzustellen (Übernahme ganzer arabischer Redewendungen!). — II. Gerhard von Cremona (1114—1187) übersetzte die weitaus bessere Ausgabe des Ishāq und Tābit und kam so dem Original von allen mittelalterlichen Bearbeitern am nächsten, erreichte aber leider bei weitem nicht die Popularität von Adelards Version II. — Alle späteren Ausgaben (Verf. zählt ohne Anspruch auf Vollständigkeit 8 verschiedene auf), auch die des berühmten Campanus, sind nur Neubearbeitungen auf Grund dieser Übersetzungen sowie einiger (meist ebenfalls von Gerhard von Cremona übersetzter) arabischer Kommentare. — Vergleichende Textproben beschließen die glänzende Untersuchung. Sie erregen den lebhaften Wunsch nach einem auch

vom Verf. geforderten Euclides Latinus, in dem die wichtigsten Texte zu sammeln wären; zu seiner Herausgabe wäre er selbst wohl der geeignete Mann. Er sollte ergänzt werden durch einen Euclides Arabicus; erst dann wird sich im einzelnen die verwickelte Textgeschichte der mittelalterlichen Euklidbearbeitungen verfolgen lassen.
H. I. Hermelink.

Blaschke, W.: Vita ed opere del matematico Regiomontano. Matematiche 8, 50—58 (1953).

Gedrängte Übersicht über Leben, Wirken und Hauptschriften Regiomontans, vor allem gestützt auf E. Zinner, Leben und Wirken des Johannes Müller von Königsberg, genannt Regiomontanus, Bamberg 1938, und R. Klug, Johannes v. Gemunden, S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. II a 1943, S. 222.

J. E. Hofmann.

Freudenthal, Hans: Zur Geschichte der vollständigen Induktion. Arch. internat. Hist. Sci. 22, 17—37 (1953).

Der Terminus „Induktion“ hat im Verlauf der Zeit drei verschiedene Bedeutungen erhalten, die Verf. klar auseinandersetzt: (1) Die vollständige Induktion (Dedekind) ist der Beweis durch Schluß von n auf $n+1$. — (2) Eine falsche Induktion liegt vor, wenn man in einer unbewiesenen Verallgemeinerung den Schluß vom Speziellen zum Allgemeinen durchführt, also einen allgemeinen Beweis in der Bestätigung durch Einzelfälle sieht. — (3) Ein „quasi-allgemeiner“ Beweis liegt dann vor, wenn dieser wohl an einem Zahlenbeispiel durchgeführt wird, aber so, „daß die Allgemeingültigkeit durchaus einleuchtet“. Diese Vorstufe (z. B. in Euklids Elementen IX/36) erkennt Verf. als vollständige Induktion mit Recht an. In diesem Sinn sind schon vor Maurolykus, der meist als erster Erfinder der vollständigen Induktion gilt, allgemeine Beweise geführt worden, was durch Beispiele aus Euklid, Archimedes usw. gezeigt wird. Schließlich geht Verf. der weiteren Geschichte des Begriffs in den verschiedenen Sprachgebieten nach. — Wenn Tropfke beim Beweis der Irrationalität von \sqrt{n} durch Theodoros von einem Schluß von n auf $n+1$ spricht, so ist das, wie Verf. ausführt (S. 23 f.), nicht korrekt. Gemeint war wohl, daß der Beweis bei $\sqrt{17}$ mit den gleichen Gedankengängen wie z. B. bei $\sqrt{2}$ geführt werden konnte. Bei $\sqrt{17} = a/b$ (a, b , ganz; a/b auf einfachste Form gekürzt) oder $17b^2 = a^2$ kann nicht a und b gleichzeitig durch 17 teilbar sein. Dies ist dem bekannten Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ in einer gedanklichen „Induktion“ nachgebildet.
K. Vogel.

Agostini, Amedeo: L'aritmetica di Galigai Francesco. Periodico Mat., IV. Ser. 31, 201—206 (1953).

Norlind, Wilhelm: Copernicus and Luther: A critical study. Isis 44, 273—276 (1953).

Procissi, Angiolo: La traduzione italiana delle opere di Archimede nelle carte inedite di Vincenzo Viviani (1622—1703). Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 74—82 (1953).

Viviani, der „letzte Schüler Galileis“, plante eine italienische Übersetzung bzw. Bearbeitung der geometrischen und mechanischen Werke des Archimedes für didaktische Zwecke, die zuerst die geometrischen, dann die stereometrischen Werke bringen sollte, wobei in jeder Gruppe die reine Geometrie der Mechanik voraufging. Verf. gibt eine Beschreibung der einzelnen Traktate, die größtenteils handschriftlich noch vorhanden sind. Die Bearbeitungen zeugen von Sachkunde und pädagogischem Geschick. Sie sind größtenteils druckreif, und es ist schade, daß Viviani, wie so vieles, so auch diese Archimedesübersetzung aus Zeitmangel nicht zum Druck befördern konnte, zumal es bis heute an einer Gesamtausgabe des Archimedes in italienischer Sprache fehlt.
H. I. Hermelink.

Agostini, Amedeo: Massimi e minimi nella corrispondenza di E. Torricelli con M. Ricci. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 629—632 (1953).

Es handelt sich um die rein geometrischen Auflösungen und Erweiterungen von Extremwertaufgaben Fermats, die den Italienern im Winter 1644/45 durch Vermittlung Mersennes vorgelegt worden waren.
J. E. Hofmann.

Conte, Luigi: Proposizioni relative alla trisezione dell'argomento (Kinner-Huygens-Comiers-Bernoulli). Archimede 5, 77—80 (1953).

Es handelt sich um Variationen der bekannten Archimedischen Dreiteilung des Winkels durch Einschiebung. Die ersten drei wurden 1653/54 von G. A. Kinner

von Löwenthorn ausgesprochen und von Chr. Huygens erwiesen, eine weitere von Cl. Comiers 1676 und von Jak. Bernoulli 1682/83.

J. E. Hofmann.

Conte, Luigi: *Le quattro regole di William Purser.* Periodico Mat., IV. Ser. 31, 1–6 (1953).

Verf. bezieht sich auf die Formeln $\cos^2 \alpha/2 = s(s-a):bc$, $\sin^2 \alpha/2 = (s-b)(s-c):bc$, $\operatorname{tg}^2 \alpha/2 = \dots$, $\operatorname{cotg}^2 \alpha/2 = \dots$, die Fr. van Schooten (vermutlich während seiner Auslandsreise 1642) von dem Dubliner Mathematiker Purser gelernt hatte und in seine *Exercitationes mathematicae*, Leiden 1657, S. 499/507 übernahm. Verf. analysiert Schootens (umständlichen) Text und verweist auf das Auftreten der tg-Formel bei Rhaeticus (1596) und Briggs (1633); versehentlich bleibt Snell (1627) unerwähnt. Vgl. J. Tropicke, *Geschichte der Elementarmathematik V²*, Berlin 1923, S. 83.

J. E. Hofmann.

Dutka, Jacques: *Spinoza and the theory of probability.* Scripta math. 19, 24–32 (1953).

Englische Übersetzung und Faksimile-Wiedergabe der „Reeckening van Kanssen“ [Erstdruck d. Haag 1687, dann herausgegeben von D. Bierens de Haan, *Nieuw Arch. Wiskunde*, I. R. 11, 49–82 (1884)], die wahrscheinlich von Spinoza stammt; dazu gute literarische und sachliche Erläuterungen.

J. E. Hofmann.

Tenca, Luigi: *Guido Grandi e i fondatori del calcolo infinitesimale.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 201–204 (1953).

Allgemeiner Überblick über Geisteshaltung und selbständiges Arbeiten Grandis, der sowohl von Leibniz wie von Newton sehr hoch geschätzt wurde, mit beiden Rivalen in Briefwechsel stand und es doch verstand, neutral zu bleiben und es mit keinem zu verderben. Eingehenderes (Biographie, Bibliographie) in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 45, 147).

J. E. Hofmann.

Grazia, Alfred de: *Mathematical derivation of an election system.* Isis 44, 42–51 (1953).

Um ein möglichst gerechtes Abstimmungsergebnis bei der Wahl eines Kandidaten unter n Bewerbern zu erhalten, schlägt J.-Ch. de Borda (1733/99) in einer Pariser Akademie-Abhandlung von 1781 vor, die Kandidaten in bestimmter Reihenfolge aufschreiben zu lassen und die so erhaltenen Stimmzahlen verschiedenen Gewichtes unter Zuteilung passender Wertigkeit auszuzählen. Verf. gibt eine englische Übersetzung der Abhandlung mit eingehender Diskussion der weltanschaulichen und soziologischen Hintergründe des (sicherlich zu Recht) als typisch aufklärerisch bezeichneten Wahlverfahrens, das für einige Zeit bei Feststellung der Amtsträger in der Académie des Sciences verwendet wurde.

J. E. Hofmann.

Natucci, Alpinolo: *Guglielmo Libri come storico della matematica.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 663–673 (1953).

Gedrängte Übersicht über Libris bedeutende und auch heute noch lesenswerte *Histoire des sciences math. en Italie*, Paris 1838/41, 2. Aufl. Halle 1865, ed. H. W. Schmidt. Verf. äußert sich ferner über den Einfluß der gleichzeitigen französischen Geschichtsschreiber (Guizot, Thierry, Thiers, Michelet), über die fachlichen Vorgänger (Montucla, Kästner, Cossali, Franchini, Venturi) und hebt vor allem die verdienstvollen Quellenstudien und die Wiedergabe kennzeichnender Originaltexte hervor.

J. E. Hofmann.

Thorndike, Lynn: *Giovanni Bianchini in Italian manuscripts.* Scripta math. 19, 5–17 (1953).

Brun, Viggo: *Niels Henrik Abel.* Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 25*–43* (1953).

Segre, Beniamino: *Discorso commemorativo dell'insigne matematico Salvatore Pincherle.* Rivista Mat. Univ. Parma 4, 3–10 (1953).

Whittaker, E. T.: *Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld.* J. London math. Soc. 28, 125–128 (1953).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Straneo, Paolo: *Fisica moderna o metafisica?* Archimede 5, 89—102 (1953).

Geymonat, Ludovico: *Significato filosofico-scientifico delle ricerche moderne sugli spazi astratti.* Archimede 5, 1—8 (1953).

● Centre National de la Recherche Scientifique. Colloques internationaux. XXXVI: *Les méthodes formelles en axiomatique.* (Paris, Décembre 1950.) Paris: Centre National de la Recherche Scientifique 1953. XIV, 78 p.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln unter der Abkürzung Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. 36 angezeigt.

● Moody, Ernest A.: *Truth and consequence in mediaeval logic.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1953. VIII, 113 S.

Die vorliegende Studie ist erschienen in der Reihe der von L. E. J. Brouwer, E. W. Beth, A. Heyting herausgegebenen *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Die vorliegende Publikation ist der Versuch einer Spiegelung der mittelalterlichen Logiker des 14. Jahrhunderts (Buridan und Albert von Sachsen) an den Positionen der mathematischen Logik. Vier Hauptstücke: I. *Logic and Language*: (1) The Mediaeval Conception of Logic, (2) The Formal and Material Constituents of Discourse, (3) Signification and Supposition, (4) Personal (Formal) and Material Supposition, (5) Object Language, Metalanguage, and the Transcendental Terms. — II. *The Theory of Truth Conditions*: (1) The Formal Classification of Propositions, (2) The Logical Import of the Elementary Copula, (3) The Sentential Operators, (4) Quantification, (5) Time Range and Modality. — III. *The Theory of Consequence*: (1) The Meaning of „Consequence“ in Mediaeval Logic, (2) Formal and Material Consequences, (3) The Mediaeval Logic of Propositions. — IV. *Truth and Consequence*: (1) The Aristotelian Definition of Truth, (2) The Paradox of the Liar. — Es handelt sich also in jedem Falle um Dinge von einem hervorragenden Interesse für den mathematischen Logiker. Die Bemühungen des Verf. um eine möglichst pünktliche Spiegelung sind überall erkennbar. Der kritische Leser wird trotzdem immer wieder einmal das nicht finden, was er sucht. Der Verf. weist selbst darauf hin, wieviel hier noch zu tun ist. Es liegt jedenfalls nicht nur daran, daß er nicht mehr hat sein können, als ein (übrigens durchaus respektabler) „amateur in the field of contemporary formal logic“, sondern primär an den Widerständen, die sich aus der Kompliziertheit der Materie ergeben. Es ist sehr zu bedauern, daß er aus Rücksicht auf den verfügbaren Raum auf eine explizite Mitteilung der unentbehrlichen Quellenstücke hat verzichten müssen. Hierdurch wird eine Überprüfung in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle unmöglich gemacht, da die benutzten Texte praktisch unzugänglich sind.

H. Scholz.

Schütte, Kurt: *Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik.* Math. Ann. 125, 394—400 (1953).

Verf. gibt einen in der Methodik an seine Arbeiten (dies. Zbl. 42, 8 und 46, 6) anschließenden Wf. Bew. für ein typenfreies logisches System Σ , das etwa dem System von W. Ackermann (s. nachfolgendes Ref.) entspricht. Σ ist ebenfalls typenfrei, umfaßt die Grundformeln des Ackermannschen Systems (insbesondere die der verzweigten Analysis), enthält die Schlußregeln des implikationsfreien Aussagenkalküls (vgl. dazu den Schlußweisenkalkül K_1 vom Verf., dies. Zbl. 36, 148) und ferner einen Abstraktionsoperator λ samt zugehörigen Schlüssen

$$\frac{\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{N}}{[\lambda_{x_1, \dots, x_n} \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)] (t_1, \dots, t_n) \vee \mathfrak{N}}$$

und entsprechend für $\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n)$, worin t_1, \dots, t_n Terme (d. h. freie Variable, spezielle Konstante und λ -Ausdrücke) sind und in $\mathfrak{A}(t_1, \dots, t_n)$ die gebundenen Variablen x_1, \dots, x_n nicht vorkommen. Schließlich wird auch die Regel der unendlichen Induktion in Σ aufgenommen: Ist $\mathfrak{A}(c_1, \dots, c_n)$ für alle konstanten Terme c_1, \dots, c_n herleitbar, dann ist auch $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ mit freien Variablen a_1, \dots, a_n herleitbar. Das Tertium non datur ist durch die Einschränkung des Aussagenkalküls nicht unbeschränkt zur Verfügung, aber jedenfalls im Rahmen der verzweigten Typenlogik

herleitbar. Widersprüche können in Σ nur durch Schnitte $\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N} \quad \mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}}$ zustande kommen

und der Wf. Bew. wird durch Nachweis der Eliminierbarkeit der Schnitte in den Herleitungen unter Verwendung transfiniter Induktion geführt. — Es wird der Begriff des Ranges für Formeln, die nicht die Form $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ haben, eingeführt und so erklärt, daß damit ein Maß für die angewandten Abstraktionsschlüsse erreicht wird. Der Rang einer Schnittes ist der Maximalrang der Disjunktionsglieder seiner Schnittglieder (das sind \mathfrak{M} und \mathfrak{N}). Der Rang einer Herleitung ist das Maximum bzw. der Limes aller Schnittträge der Herleitung. Bei Beschränkung auf endliche

Herleitungsränge wird für den Wf. Bew. eine transfinite Induktion im selben Umfange wie für den Wf. Bew. der verzweigten Analysis gebraucht, vgl. dies. Zbl. 46, 6. Ohne Beschränkung der Herleitungsränge braucht man für den Wf. Bew. eine stärkere verschränkte transfinite Induktion, die hier nicht des Genaueren betrachtet wird und deren Vergleich mit dem Verfahren von Ackermann (dies. Zbl. 42, 50) wünschenswert wäre. — Hinsichtlich des Wf. Bew. erweist sich das System des Verf. in der Tat als sehr durchsichtig; was die Herleitung von Teilen der Analysis anlangt, vgl. die Ergebnisse von Ackermann für ein verwandtes System in nachfolgendem Referat.

G. H. Müller.

Ackermann, Wilhelm: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System.) I, II. Math. Z. 55, 364—384 (1952), 57, 155—166 (1953).

I. S sei ein System einer typenfreien Logik mit folgenden Eigenschaften: (1) S soll stark genug sein für eine interne Formalisierung (Ausdruck des Ref.) der Zahlentheorie und der verzweigten Analysis der reellen Zahlen. Der interne Charakter dieser Formalisierung soll darin bestehen, daß sie, noch genauer als in dem für die Zahlentheorie mit dem Unendlichkeitsaxiom belasteten System der Principia Mathematica, ohne irgendeinen Fremdkörper gelingt. (2) Die Widerspruchsfreiheit von S soll (mit finiten Mitteln) beweisbar sein. Die Konstruktion eines solchen Systems ist das Ziel dieser Untersuchungen, ersichtlich ein hochgestecktes Ziel. — Das neue System fußt einerseits auf der Behmannschen Forderung, daß der Definitionsbereich eines Prädikates im allgemeinen Fall zu beschränken ist, andererseits auf einer grundlegenden Revision der Aussagenlogik, die in einer früheren Arbeit des Verf. zur Widerspruchsfreiheit eines Systems einer typenfreien Logik ohne Tertium non datur [dies. Zbl. 36, 147; hierzu die Anzeige von J. B. Rosser, J. Symbolic Logic 16, 72 (1951)] mit einer eingehenden Begründung entwickelt worden ist. Das neue System ist eine Erweiterung dieses Systems. Die Erweiterung besteht in einer Einbeziehung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, die eine beschränkte Verwendung dieses Satzes ermöglicht. Die vorliegende Arbeit ist beschränkt auf die Konstruktion und den Beweis der Widerspruchsfreiheit von S . Dieser Beweis wird jedoch nicht für S selbst geführt, sondern für ein gleichwertiges System S^* , das mit seinen Ableitungsregeln an den Gentzenschen Sequenzenkalkül erinnert (§ 3). Der Beweis für die Widerspruchsfreiheit von S^* (und damit von S) hat zur Voraussetzung die Ordnungszahl einer Herleitung. Sie wird konstruiert mit Hilfe einer von dem Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 50) entwickelten Symbolik für Ordnungszahlen (§ 4). Zum Beweis der Widerspruchsfreiheit von S^* wird in § 5 gezeigt, daß jede Herleitung, für welche die Endreihe keine freie Variable enthält und bei der eine Formelreihe des Endstücks durch ein gewisses kritisches Schema zustande kommt, in eine andere mit der gleichen Endreihe, aber einer kleineren Ordnungszahl verwandelt werden kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schließlich zu einer Herleitung, bei der keine Formelreihe des Endstücks mehr durch ein solches kritisches Schema entsteht. Die Widerspruchsfreiheit von S^* ergibt sich jetzt so, daß die mit den Ausdrucksmitteln von S^* erzeugbare falsche Formelreihe $\sim \equiv \equiv \equiv$ („Die Identität ist nicht mit sich selbst identisch“) nicht Endreihe einer solchen Herleitung sein kann. Dabei ist unter einer Formelreihe zu verstehen eine Reihe von Formeln, die durch Kommata getrennt sind, und die im Grenzfall auch auf eine einzige Formel zusammenschrumpfen kann. Das Endstück einer Formelreihe soll die Endformelreihe umfassen und mit jeder Formelreihe auch deren Prämissen, so weit diese keine freien Variablen enthalten. — II. S^* sei das Axiomensystem von § 3 des ersten Teils. Es wird ein Teilsystem Δ von S^* konstruiert, das von der Implikation keinen Gebrauch macht. In Δ wird ohne zusätzliche mathematische Axiome eine verzweigte Analysis der reellen Zahlen konstruiert, also eine Analysis, für die es nur reelle Zahlen verschiedener Ordnungen gibt, und so, daß eine Quantifizierung über dem Bereich der reellen Zahlen n -ter Ordnung eine reelle Zahl $n + 1$ -ter Ordnung liefert. (Zusatz des Ref.: Vgl. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 1. Aufl. Berlin 1928, 109ff., insbesondere 113). Die Widerspruchsfreiheit von Δ folgt a fortiori aus der im ersten Teil bewiesenen Widerspruchsfreiheit von S^* . Δ erlaubt zwar kein unbeschränktes Operieren mit den Formeln und Regeln des engeren Prädikatenkalküls, da der Satz des ausgeschlossenen Dritten in Δ nicht unbeschränkt verwendet werden kann. Aber für den angestrebten Zweck reicht Δ dennoch aus, unter folgender Bedingung: Man beschränke sich für irgendeine mathematische Theorie auf die spezifischen, mit den Ausdrucksmitteln des engeren Prädikatenkalküls ohne zusätzliche Anleihen formalisierbaren Axiome erster Stufe (d. i. ohne Prädikatenvariablen). Nimmt man dann zu diesen Axiomen noch weitere Axiome hinzu, die die Gültigkeit des ausgeschlossenen Dritten für die Grundprädikate der Theorie zum Ausdruck bringen, so erhält man alle Sätze der Theorie, die mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls aus den Axiomen gewonnen werden können (es kommen nur solche Sätze in Frage, die keine Prädikatenvariablen enthalten, sondern nur die individuellen Grundprädikate). Es werden nun zunächst für die Zahlentheorie die Peano-Axiome [im Anschluß an Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, I, Berlin 1934 (dies. Zbl. 9, 145), S. 371] und die Axiome der Rechnung (im Anschluß an S. 465) ohne zusätzliche mathematische Anleihen so formalisiert, daß sie in Δ bewiesen werden können, womit auf Grund der vorhandenen Umformungsregeln gezeigt ist, daß Δ in der Tat für eine Konstituierung der Zahlentheorie (in den unvermeidlichen Grenzen)

ausreicht. (Im Einklang mit der Forderung, daß Prädikatenvariablen nicht zugelassen sein sollen, ist das Induktionsaxiom in bekannter Weise mit Hilfe einer (metasprachlichen) Ausdrucksvariablen formalisiert). Dann wird über Δ eine verzweigte Logik konstruiert, in der die verzweigte Analysis der reellen Zahlen in dem oben angegebenen Sinne gewonnen werden kann.

H. Scholz.

Hintikka, K. Jaakko J.: Distributive normal forms in the calculus of predicates. Acta philos. Fennica 6, 72 S. (1953).

Die umfangreiche Arbeit entwickelt eine Theorie „distributiver“ Normalformen für den (elementaren) Prädikatenkalkül. Analog den Normalformen, die für Entscheidungsverfahren des 1-stelligen Kalküls gebraucht werden, sind diese Normalformen dadurch ausgezeichnet, daß die Quantoren möglichst weit innen stehen. Sie bilden ein Gegenstück zu den pränexen Formeln. Im Aussagenkalkül stehen die disjunktiven Normalformen zur Verfügung. Jede prädikatenlogische Formel A ist aussagenlogisch zusammensetzbar aus Formeln $V_{x_i} b_i$ und primitiven Formeln C_v . Ist für B_i schon eine distributive Normalform $B_{i_1} \vee B_{i_2} \vee \dots$ definiert, so sei $V_{x_i} B_{i_1} \vee V_{x_i} B_{i_2} \vee \dots$ die Normalform für $V_{x_i} B_i$. Die distributive Normalform von A entsteht dann als disjunktive Normalform aus den $V_{x_i} B_{i_\mu}$ und C_v . Diese Rekursion liefert keine eindeutige Normalform. Im mehrstelligen Kalkül können die Normalformen Disjunktionsglieder enthalten, die widerlegbar sind. Für diese Widerlegbarkeit gibt Verf. hinreichende Bedingungen und erwähnt, daß sich hieraus ein Entscheidungsverfahren für Formeln mit höchstens zweifach geschachtelten Quantoren gewinnen ließe. Einige Spezialisierungen für den Fall, daß die Identität unter den primitiven Prädikaten vorkommt, werden skizziert. — Es ist hervorzuheben, daß der ganzen Arbeit eine Formalisierung der Prädikatenlogik zugrunde liegt, für die eine Formel genau dann beweisbar ist, wenn sie in allen Individuenbereichen einschließlich des leeren Bereichs, allgemeingültig ist. Dadurch wird stellenweise eine bessere Symmetrie gewonnen.

P. Lorenzen.

Robinson, Abraham: Les rapports entre le calcul déductif et l'interprétation sémantique d'un système axiomatique. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 36, 35—52 (1953).

Verf. stellt an mehreren gut ausgewählten Beispielen seine Methode [On the metamathematics of algebra, Amsterdam 1951, dies. Zbl. 43, 247] dar, aus dem Vollständigkeitstheorem des elementaren Prädikatenkalküls algebraische Sätze zu beweisen.

P. Lorenzen.

Beth, M. E. W.: Sur le parallélisme logico-mathématique. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 36, 27—33 (1953).

Verf. berichtet über Gedankengänge von van Gramsdonck (1866—1950), die sich auf die Vollständigkeit der nicht-elementaren Prädikatenlogik beziehen, insbesondere auf die Möglichkeiten, diese „höhere“ Logik immer wieder auf die elementare Logik zu reduzieren.

P. Lorenzen.

Myhill, John: On the interpretation of the sign „ \supset “. J. symbolic Logic 18, 60—62 (1953).

Myhill considers deductive systems with the following properties: P 1. $A, A \supset B \vdash B$. P 2. If $A \vdash B$ then $\vdash A \supset B$. P 3. $A \& B \vdash A$. P 4. $A \& B \vdash B$. P 5. $A, B \vdash A \& B$. P 6. $A \& B, \supset C \vdash A \supset B \supset C$. S 1. If $A \vdash B$ then $\vdash A \supset B$. S 2. If $\vdash A \supset B$, then $\vdash A \supset B$. E 1. $\dots A \dots \vdash (\exists r) (\dots r \dots)$. E 2. If $\dots r \dots \vdash A$, then $(\exists r) (\dots r \dots) \vdash A$, where A does not contain „ r “. Two formulae A and B are called interdeducible if $A \vdash B$ and $B \vdash A$. It is shown that in the systems considered $A \supset B$ is interdeducible with the formula $(\exists r) (r \& (r \& A) \supset B)$.

A. Rose.

Skolem, Th.: A remark on a set theory based on positive logic. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 112—116 (1953).

The author shows that it is not possible to have a general axiom of comprehension (according to which, for each propositional function $\varphi(x)$, there is a set $\hat{x}\varphi(x)$ such that $y \in \hat{x}\varphi(x) \equiv \varphi(y)$) even in a system without negation. In fact if there exists sets $W = \hat{x}((x \in x) \supset (y)(x \in y))$, $V = \hat{x}((x \in x) \supset (x \in x))$ and (for each u) $\{u\} = \hat{x}(z \in x \equiv z \in u)$, then by substituting W into its own defining propositional function we obtain $(y)(W \in y)$ (a sort of analogy to the Russell paradox);

taking $y = \{V\}$, $y = \{u\}$, in turn we get $(z) (z \in u)$, i. e. $z \in u$ holds for all z, u so that the system is trivial. The author suggests that, although a system of set theory in which both implication and negation are abandoned (so that the only logical operations would be conjunction, disjunction, universal and existential quantification, and abstraction) would probably be quite insufficient as a basis for mathematics, it might nevertheless be of interest to know whether such a system is consistent or not.

J. C. Shepherdson.

Büchi, J. Richard: Investigation of the equivalence of the axiom of choice and Zorn's lemma from the viewpoint of the hierarchy of types. *J. symbolic Logic* 18, 125—135 (1953).

Problem 16 (p. 44) in G. Birkhoffs *Lattice Theory*, 2. Aufl. (New York 1948, dies. Zbl. 33, 101) findet hier seine Behandlung im Rahmen der Typentheorie in der Kodifizierung von A. Church (dies. Zbl. 23, 289). Sei E^α das Extensionalitätsaxiom für den Typ α : $(x_\alpha)(a_{0\alpha} x_\alpha = b_{0\alpha} x_\alpha) \supset f_{\alpha(0\alpha)} a_{0\alpha} = f_{\alpha(0\alpha)} b_{0\alpha}$, A^α das ι -axiom für den Typ α : $a_{0\alpha} x_\alpha \& (y_\alpha)(a_{0\alpha} y_\alpha \supset x_\alpha = y_\alpha) \cdot \supset \cdot a_{0\alpha} (\iota_{\alpha(0\alpha)} a_{0\alpha})$, ZA^α das Auswahlaxiom für den Typ α in der Form: $\exists h_{\alpha(0\alpha)} (a_{0\alpha})(a_{0\alpha} x_\alpha \supset a_{0\alpha} (h_{\alpha(0\alpha)} a_{0\alpha}))$ und ZL^α das Zornsche Maximumprinzip für den Typ α : $(r_{0\alpha\alpha})(P(r) \& Q(r) \cdot \supset \cdot \exists x_\alpha (u_\alpha)(r_{0\alpha\alpha} x_\alpha u_\alpha \supset r_{0\alpha\alpha} u_\alpha x_\alpha))$,

wobei $P(r)$ besagt, daß $r_{0\alpha\alpha}$ den Typ α teilweise ordnet, und $Q(r)$, daß für jede Kette (vom Typ 0α) bezüglich $r_{0\alpha\alpha}$ eine obere Schranke existiert. — Verf. zeigt (1) unter Verwendung von E^α , daß $ZL^\alpha \supset ZL^\alpha$. Umgekehrt ergibt sich (2) ohne Verwendung von E^α aber unter Benützung von A^α , daß $ZL^\alpha(0\alpha) \supset ZA^\alpha$. Dabei wird ZL für den höheren Typus $\alpha(0\alpha)$ als α benützt; ob eine andere Beweismethode mit geringerer Typenerhöhung von ZL auskommt, bleibt offen. Die „Äquivalenz“ zwischen dem obig. Auswahlax. und Zorns Maximumprinzip kann also im Rahmen von Theorien mit Typenunterscheidung in der (abgeschwächten) Form ausgesprochen werden, daß, wenn alle Formeln ZA^α zur Verfügung stehen, jede Formel ZL^β zur Verfügung ist und umgekehrt (natürlich unter Voraussetzung von E^α und A^α für alle α). Der Beweis von (1) wird ohne Ableitung des Wohlordnungssatzes, aber unter Verwendung der Methode des zweiten Zermeloschen Beweises geführt; der Beweis von (2) folgt der Anordnung von Birkhoff l. c. p. 43.

G. H. Müller.

Lukasiewicz, Jan: Sur la formalisation des théories mathématiques. *Colloques internat. Centre nat. Rech. sci.* 36, 11—21 (1953).

A. Zur Symbolik: p, q, r, \dots Aussagevariablen. a, b, c, d, \dots Zahlvariablen. F das Falsum, so daß $F \rightarrow F$ das Verum. δ eine einstellige Funktorenvariable über dem Bereich der Ausdrücke. P eine einstellige Prädikatenvariable. = Identitätssymbol. + das Symbol für die zahlentheoretische Addition. < das Symbol für das zahlentheoretische Kleiner als. \leq das Symbol für das zahlentheoretische Kleiner als oder gleich. 1 das Symbol für die Eins. —

B. Logische Voraussetzungen: der Prädikatenkalkül der zweiten Stufe. Genauer:

B1. der Aussagenkalkül, konstituiert mit Hilfe der Einsetzungs- und der Abtrennungsregel über dem einzigen Axiom

L1. $\delta F \rightarrow \delta(F \rightarrow F) \rightarrow \delta p$.

B2. die Regeln der vorderen und hinteren Generalisierung und Partikularisierung (für Zahl- und Prädikatenvariable) in Verbindung mit der (nicht explizit angegebenen) Regel der Einsetzung in P , wodurch das Komprehensionsprinzip entbehrlich wird.

C. Die zahlentheoretischen Voraussetzungen:

C1. die zahlentheoretischen Definitionsgleichungen

DZ1. $a = b =_{\text{Df}} \forall P (Pa \rightarrow Pb)$.

DZ2. $a < b =_{\text{Df}} \exists d (d + a = b)$.

C2. die zahlentheoretischen Axiome

AZ1. $(a + b) + c = b + (a + c)$. AZ2. $1 \leq a$. AZ3. $\forall a (\forall b (b < a \rightarrow Pb) \rightarrow Pa)$.

Zu AZ3 zwei Bemerkungen: (1) Verf. bezeichnet AZ3 als principe de montée. In Münster bezeichnen wir AZ3 als das Prinzip der ordnungstheoretischen Induktion, weil es nicht nur für die Menge der natürlichen Zahlen verbindlich ist, sondern für jede wohlgeordnete Menge. (2) In der Mathematik ist es üblich, die Voraussetzung von AZ3 zu ersetzen durch die stärkere Voraussetzung: $Pn \wedge \dots$, wo n das kleinste Element, für welches P sinnvoll ist. Insofern bezeichnet der Verf. AZ3 mit Recht als ein théorème nouveau. Es ist uns jedoch auch hier schon seit langem bekannt, daß man auskommt mit der schwächeren Voraussetzung von AZ3. — Auf dieser Basis sind beweisbar die Irreflexivität, die Asymmetrie, die Transitivität und die Konexität von <. Ferner neben den noch ausstehenden Grundgesetzen der Addition das in Münster zur Unterscheidung von AZ3 sogenannte Prinzip der (auf Folgen vom Typus der Folge der na-

türlichen Zahlen beschränkten) folgentheoretischen Induktion $PZ1: \forall a(Pa \rightarrow Pa + 1) \rightarrow (P1 \rightarrow Pa)$. Der Verf. bemerkt mit Recht, daß die Voraussetzung von $PZ1$ abgeschwächt werden kann in $\forall a(Pa + 1)$, mit einem Hinweis auf die deduktive Leistungsfähigkeit von $PZ1$ mit dieser abgeschwächten Voraussetzung. Auch dies ist hier seit langem bekannt. Es folgt dann noch als $PZ2$ das Prinzip der kleinsten Zahl und als $PZ3$ der von dem Verf. als Fermat-Prinzip bezeichnete Ausdruck, der aus $AZ3$ durch Kontraposition der Prämisse hervorgeht, bzw. hierdurch und durch zusätzliche Einsetzung von $\sim Pa$ in die Nennform Pz . Es scheint mir daher, daß $PZ3$ für das Folgende eingeklammert werden kann, da durch dieselben Prozesse umgekehrt $AZ3$ aus $PZ3$ gewonnen werden kann. Es wird die Äquivalenz von $AZ3$, $PZ1$ und $PZ2$ in bezug auf $\{AZ1, AZ2\}$ gezeigt. — Zusätzliche Bemerkungen: (1) Der Verf. macht auch in diesem Falle von seiner klammerfreien Symbolik Gebrauch, was einige interessante Bemerkungen von H. B. Curry zu dieser Symbolik hervorgerufen hat. (2) Die gänzlich neue Konstituierung des Aussagenkalküls über $L1$ ist enthalten in Łukasiewics, dies. Zbl. 42, 244. (3) Alle Beweise sind in der bekannten wohlgedachten Art des Verf. durchgeführt. (4) In $L1$ fehlt ein b.

H. Scholz.

Stanley, Robert L.: Note on a paradox. J. symbolic Logic 18, 233 (1953).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

● Novoselov, S. I.: Spezieller Kurs der elementaren Algebra. 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag „Sowjetische Wissenschaft“ 1953. 560 S. R. 11,35 [Russisch].

Dieses Lehrbuch enthält den Stoff des Abschnittes „Algebra“ einer Vorlesung über Elementarmathematik an pädagogischen Instituten. Mit vielen Beispielen, geometrischen Deutungen und Eingehen auf interessante Einzelheiten werden u. a. behandelt: Polynome und rationale Funktionen, Ungleichungen, Systeme linearer Gleichungen, quadratische Gleichungen, Wurzeln, Potenzen und Logarithmen sowie Kombinatorik.

R. Kochendörffer.

● Mostowski, Andrzej und Marcell Stark: Höhere Algebra. Teil I. (Biblioteka Matematyczna. I.) Warszawa: Nakładem Polskiego Towarzystwa Matematycznego 1953. VI, 308 S. ZŁ 19,— [Polnisch].

Das vorliegende Buch ist der I. Band eines Lehrbuches der Algebra. Es enthält die lineare Algebra und ist im wesentlichen für Studenten des ersten Studienjahres gedacht. Doch werden die Fragen so breit aufgerollt und so eingehend behandelt, daß das Werk auch als Nachschlagewerk während des ganzen Studiums wertvolle Dienste leisten kann. Es wird besonders ausführlich die Theorie der quadratischen und der hermiteschen Formen dargestellt.

L. Kaloujnine.

● Gantmacher, F. R.: Theorie der Matrizen. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1953. 491 S. R. 20,90 [Russisch].

Das Buch stellt eine weitausholende und gründliche Darstellung der Matrixtheorie dar, in der namentlich die Leistungen sowjet-russischer Forscher in besonderem Maße berücksichtigt worden sind. Unter 153 Nummern des Literaturverzeichnisses beziehen sich über 2/3 auf sowjet-russische Arbeiten. Zur Abgrenzung der Darstellung gegen andere Lehrbücher der Matrixtheorie wäre zu sagen, daß die Beziehungen zur abstrakten Algebra nur flüchtig erwähnt sind. Ebenso sind die in den letzten Jahren viel bearbeiteten Probleme der Abschätzungen von Determinanten und charakteristischen Wurzeln mit ein paar Hinweisen abgetan. — Im ersten Teil des Buches, das den Grundlagen der Theorie gewidmet ist, ist das zweite Kapitel hervorzuheben, in dem der Gaußsche Algorithmus zur Auflösung linearer Systeme und seine Verallgemeinerungen besprochen werden. In zwei Kapiteln wird die algebraische und geometrische Theorie der Elementarteiler entwickelt, wobei die Nichterwähnung der Weierstraßschen Potenzreihenmethode uns für eine handbuchartige Darstellung eine Lücke zu sein scheint, bei der großen Tragfähigkeit der funktionentheoretischen Methoden. Endlich ist in diesem Teil auf das Kapitel über Matrizenungleichungen hinzuweisen. — Der zweite, den Spezialfragen und Anwendungen gewidmete Teil enthält insbesondere eine neue Darstellung der Kroneckerschen Theorie der singulären Formenbündel und einen großen Abschnitt über nichtnegative Matrizen und ihre Anwendungen auf die Theorie der Markoffschen Ketten. Von besonderer Wichtigkeit ist das Kapitel XIV über die Anwendungen auf Systeme linearer Differentialgleichungen, in dem die Fortentwicklung der Liapunoffschen Theorie sowie die berichtigte und ergänzte Behandlung der Birkhoffschen Ansätze dargestellt werden. Ein längeres Kapitel über die determinantentheoretische Behandlung

des sogenannten Routh-Hurwitzschen Problems beschließt das Werk. — Das Buch ist sehr lesbar geschrieben. Die Durchsicht des oben hervorgehobenen Kapitels XIV wäre wohl jedem zu empfehlen, der für die dort behandelten Fragestellungen Interesse hat. *A. Ostrowski.*

Haynsworth, Emilie V.: Bounds for determinants with dominant main diagonal.

Duke math. J. **20**, 199—209 (1953).

Es seien in einer $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ alle $a_{\mu\mu}$ positiv, und es gelte

$$(1) \quad d_{\mu} = a_{\mu\mu} - \sum_{v \neq \mu} |a_{\mu v}| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, n).$$

Oeder und Price haben obere und untere Schranken für $|A|$ angegeben, die im Prinzip nur von den Summen $\sum_{v < \mu} a_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\mu}$ abhängen. Diese Abschätzungen haben aber den Nachteil, daß

für $|A| - a_{11} \dots a_{nn}$ sich Schranken ergeben, die beim Verschwinden der Elemente $a_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) von der ersten Ordnung verschwinden. Die Verf. gibt in den Sätzen 1 und 2 Schranken für $|A|$ an, bei denen die obige Differenz von der zweiten Ordnung ist. Diese Schranken sind weniger einfach als die kürzlich mit gleicher Tendenz vom Ref. gegebenen (Ostrowski, dies. Zbl. **46**, 12), sind aber in einigen Fällen genauer. — Die weiteren Betrachtungen der Verf. beruhen auf dem hübschen Satze 3, wonach, wenn für zwei reelle $(n \times n)$ -Matrizen A, B jeweils (1) gilt, dann $|A + B| \geq |A| + |B|$ ist. Die Verf. benutzt dabei die Größen $a_{\mu} = \min |a_{\mu\nu}|$,

$a_{\mu}^* = \max |a_{\mu\nu}|$. Satz 4: Aus (1) und $a_{\mu\nu} > 0$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$) folgt $|A| \geq \prod_{\mu=1}^n \frac{2}{d_{\mu} + a_{\mu}^*}$.

Satz 5: Aus (1) und $a_{\mu\nu} < 0$ ($\mu \neq \nu$) folgt $|A| \geq d(n+d)^{n-1} \prod_{\mu=1}^n \frac{1}{a_{\mu}^*}$, $d = \min d_{\mu}/a_{\mu}^*$ gesetzt. Bei weiteren Überlegungen macht Verf. von der Relation Gebrauch $\det(a_{\mu\nu} + c_{\mu}) = \det(a_{\mu\nu}) + \sum_{\mu} c_{\mu} \Delta_{\mu}$, wo $\Delta_{\mu} = \det(a_{\mu\nu} - a_{\mu\mu})$ ($\mu, \nu \neq \mu$) ist. Die daraus folgenden Sätze 6 und 7

sind allerdings etwas umständlich formuliert, und dem Ref. scheint, daß beim Satz 7 die Beweismethode zu einem etwas schwächeren Ergebnis führt, als behauptet wird. Als Anwendung wird eine Abschätzung für reelle charakteristische Wurzeln λ einer Matrix mit positiven Elementen $a_{\mu\nu}$ angegeben. Gilt für jedes μ : $2a_{\mu} > a_{\mu}^*$, so ist $\lambda > \min_{\mu} \left[a_{\mu\mu} - \sum_{v \neq \mu} a_{\mu\nu} + (n-2)(2a_{\mu} - a_{\mu}^*) \right]$.

[In der Formel (28) steht versehentlich $2a_i + a_i^*$ statt $2a_i - a_i^*$.] Die Arbeit schließt mit zwei Bemerkungen über die Monotonie der Determinanten, die linear von x abhängen.

A. Ostrowski.

Gyires, B.: Verallgemeinerung eines Determinantensatzes von J. Hunyady. Publ. math., Debrecen **2**, 290—291 (1953).

Verf. beweist: Ist $C_k(A)$ ($1 \leq k \leq n-1$) die k -te Ableitung der Matrix A (n Ordnung von A), so gilt

$$|C_k(A)| |C_{n-k}(A) \pm C_{n-k}(A')| = |C_{n-k}(A)| |C_k(A) \pm C_k(A')|.$$

Hierbei ist A' die Transponierte von A . Verf. stellt weiter den Satz von J. Hunyady [Nouv. Ann. Math., III. Sér. **1**, 384 (1882)] „ $|A^* \pm A'^*| = |A|^{n-2} |A \pm A'|$ “ (der Stern bedeutet adjungierte Matrix) dahin richtig, daß er nur für reguläre A allgemein gilt.

L. Holzer.

Lambert, Robert J.: Extension of normal theory to general matrices. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. **27**, 206—207 (1953).

Mitchell, B. E.: Normal and diagonalizable matrices. Amer. math. Monthly **60**, 94—96 (1953).

Eine Matrix A ist dann und nur dann diagonalisierbar, d. h. mittels Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform zu bringen, wenn eine positiv definite Hermitesche Matrix H so existiert, daß $H^{-1} A H$ normal ist. Von diesem Zusammenhang ausgehend betrachtet Verf. mehrere Kriterien für normale Matrizen und leitet daraus die entsprechenden für diagonalisierbare Matrizen her. In dieser Weise werden Sätze von Toeplitz, Parker, Williamson und Halmos behandelt und zum Schluß die dem Verf. erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit von M. P. Drazin über den gleichen Gegenstand (dies. Zbl. **43**, 14) diskutiert.

H. Rohrbach.

Charles, Bernard: Sur la permutabilité des opérateurs linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1722—1723 (1953).

H. B. Phillips [Amer. J. Math. **41**, 266—278 (1919)] gab ein Beispiel zweier vertauschbarer n -reihiger Matrizen, die nicht als Polynome einer einzigen Matrix geschrieben werden können. Es werden zwei ziemlich komplizierte notwendige Be-

dingungen für die Existenz einer solchen gemeinsamen Matrix angegeben, aus deren einer das obige Beispiel unmittelbar folgt. *G. Köthe.*

Medlin, G. W.: A note on a theorem of Parker. Amer. math. Monthly **60**, 404—406 (1953).

Verallgemeinerung zweier Sätze von W. V. Parker (dies. Zbl. **40**, 4). Insbesondere: Es seien A eine $n \times m$ -Matrix vom Range r , D eine $n \times n$ -Matrix mit der Eigenschaft $DA = kA$, B eine $m \times n$ -Matrix, E die n -reihige Einheitsmatrix. Dann gilt mit zwei passenden Polynomen g und h $\det(xE - AB) = x^{n-r}h(x)$, $\det(xE - A(B - D)) = g(x)h(x - k)$. *H. Wielandt.*

Parker, W. V.: Characteristic roots of a set of matrices. Amer. math. Monthly **60**, 247—250 (1953).

If a square matrix A with complex elements is written in the form $A = H + iK$, where H and K are Hermitian matrices, then it is well known that the eigenvalues of A lie within the rectangle bounded by the eigenvalues of H (on the real axis) and of K (on the imaginary axis). The author proves that for 2-by-2 matrices the eigenvalues of A are the end-points of a diameter of the rectangular hyperbola through the vertices of that rectangle. *K. A. Hirsch.*

Brauer, Alfred: Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix. J. reine angew. Math. **192**, 113—116 (1953).

Zu jeder charakteristischen Wurzel z der komplexen $(n \times n)$ -Matrix $(a_{\mu\nu})$ gibt es zwei verschiedene Indices κ, λ , für welche $|(z - a_{\kappa\kappa})(z - a_{\lambda\lambda}) - a_{\kappa\lambda}a_{\lambda\kappa}| \leq Q_{\kappa\lambda}$ mit

$$Q_{\kappa\lambda} = \sum_{\nu} \{|a_{\kappa\lambda}a_{\lambda\nu}| + |a_{\lambda\kappa}a_{\kappa\nu}| + |a_{\kappa\nu}a_{\lambda\nu}|\} + \sum_{\nu < \mu} |a_{\kappa\nu}a_{\lambda\mu} + a_{\lambda\nu}a_{\kappa\mu}|$$

gilt (hierin durchlaufen μ, ν die von κ und λ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots, n$). Dieser Satz verbessert ein früheres Ergebnis des Verf. (dies. Zbl. **48**, 10) und gestattet entsprechende Verschärfungen der in der genannten Arbeit gezogenen Folgerungen. *H. Wielandt.*

Bartsch, Helmut: Ein Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen allgemeiner Matrizen-Eigenwertaufgaben. Arch. der Math. **4**, 133—136 (1953).

Es seien A, B hermitesche $n \times n$ -Matrizen; die Eigenwerte von B seien $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n > 0$. Es sei $x \neq 0$ eine $n \times 1$ -Matrix; y_ν, z_ν seien die Elemente von $y = Ax, z = Bx$. Ist dann $|\lambda - m| \leq r$ ein Kreis der λ -Ebene, welcher alle n Quotienten $\lambda_\nu = y_\nu/z_\nu$ enthält, so enthält der größere konzentrische Kreis $|\lambda - m| \leq r(\beta_1/\beta_n)^{1/2}$ mindestens eine Wurzel der Gleichung $\det(A - \lambda B) = 0$. *H. Wielandt.*

Wong, Y. K.: An inequality for Minkowski matrices. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 137—141 (1953).

Es sei A eine komplexe $n \times n$ -Matrix, deren Elemente a_{ij} den Ungleichungen $s_j = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq 1$ ($j = 1, \dots, n-1$) genügen. B sei die durch Streichen der letzten Zeile und Spalte aus A entstehende $(n-1, n-1)$ -Matrix, E die Einheitsmatrix, $(E - B)^{-1} = (c_{ij})$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{n-1} |a_{ni}c_{ik}| \leq s_k$ ($k = 1, \dots, n-1$). Außer komplizierten Verschärfungen gibt der Verf. die folgende Anwendung:

$$|\det(E - A)|/|\det(E - B)| - |1 - a_{nn}| \leq \sum_{j=1}^{n-1} s_j |a_{jn}|.$$

H. Wielandt.

Katz, Leo and Ingram Olkin: Properties and factorizations of matrices defined by the operation of pseudo-transposition. Duke math. J. **20**, 331—337 (1953).

Die Verf. entdecken die „Pseudo-Transposition“, $M^J = J M' J^{-1}$ wieder, die bei der Untersuchung der zu einer quadratischen Grundform $x J x'$ gehörigen „orthogonalen“, „symmetrischen“ und „schiefsymmetrischen“ Matrizen dieselbe

Rolle spielt, wie die Transposition M' bezüglich der euklidischen Form $x x' = x E x'$ (vgl. z. B. A. A. Albert, *Modern higher Algebra*, Chicago 1937, S. 99; dies. Zbl. 17, 292). Die Ergebnisse werden unter Beschränkung auf eine spezielle Form J und den reellen Zahlkörper ausgesprochen. Vielleicht neu ist Satz 5.2: Es sei

$$J = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & D \\ -C' & D \end{pmatrix}, \quad B' = B, \quad D' = D.$$

B sei positiv definit, $D + C' B^{-1} C$ mindestens positiv semidefinit. Dann läßt sich A in der Form $A = T T^J$ zerlegen, worin T eine geeignete untere Dreiecksmatrix mit nicht negativen Diagonalelementen bedeutet. *H. Wielandt.*

Gautschi, Werner: The asymptotic behaviour of powers of matrices. *Duke math. J.* 20, 127–140 (1953).

For an $n \times n$ matrix $A = (a_{rs})$, let $N(A)$ be the norm function $(\text{tr } A A^*)^{1/2} = (\sum \sum |a_{rs}|^2)^{1/2}$. Theorem 1. There is a constant $c = c(A)$ such that

$$1 \leq N(A^i) / (\sum |\lambda_v|^2) \leq c i^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Here, λ_v are the non-zero characteristic roots, and $k [\leq n]$ is the maximum of the multiplicities of the λ_v in the minimal polynomial of A . Moreover, $\lim_{i \rightarrow \infty} |N(A^i)|^{1/i} = \max |\lambda_v|$. For triangular matrices B , new criteria are given

for the existence of $\lim B^i$, for B satisfying various additional requirements, properties of this limit. As a special case, if $D = (d_{rs})$ is triangular, $|d_{11}| > |d_{22}| > \dots > 0$, $D^{(i)} = \text{diag}(d_{11}^i, d_{22}^i, \dots)$, then $\lim_{i \rightarrow \infty} [D^{(i)}]^{-1} D^i$ exists. Theorems are given concerning other types of triangular matrices.

J. L. Brenner.

Ansari, A. R. and S. M. Shah: A note on certain nilpotent matrices. *Math. Student* 20, 113–114 (1953).

E sei die Einheitsmatrix n -ten Grades ($n > 1$), weiter sei $k > 1$ und ganz; A sei nilpotent mit $A^s = 0$, $s \leq 3$, und die Elemente a_{ij} von A seien von der Form $2^P \cdot Q$ (P, Q beliebig ganz, $2P \leq k-1$). Beachtet man, daß die Elemente von $k \{2^k A + (k-1) 2^{k-1} A^2\}$ ganz und $\equiv 0(k)$ sind, so erkennt man sofort: Aus $\{2(A+E)\}^k \equiv 2E(k)$ (elementweise zu verstehen) folgt $2^k = 2(k)$ und umgekehrt (1. Bemerkung d. Verff.). — Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die sämtlichen Eigenwerte von B , so sind bekanntlich $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots [f(x)$ Polynom] die sämtlichen Eigenwerte von $f(B)$. Ist B nilpotent (etwa $B^n = 0$), so erkennt man [vermittels $f(x) = x^n$], daß B den n -fachen Eigenwert 0 besitzt (Grad $B = n$) (das charakteristische Polynom von B also gleich x^n ist, dem Satz von Hamilton und Caley zufolge daher $B^n = 0$, d. h. $s \leq n$). Für beliebiges $f(x)$ besitzt dann $f(B+E)$ den Eigenwert $f(1)$ und zwar n -fach (2. Bemerkung d. Verff.), speziell hat $\{2(B+E)\}^k$ den n -fachen Eigenwert 2^k . Nach Reid (dies. Zbl. 39, 249) haben $\{2(B+E)\}^k$ und $\{2(B+E)\}^k + D$ dasselbe charakteristische Polynom, wenn D nilpotent und $D(B+E)^k = 0$ [d. h. $D(E + kB + \binom{k}{2} B^2, \dots, \binom{k}{s-1} B^{s-1}) = 0$] ist, woraus Verff. den Schluß ziehen können, daß auch $\{2(B+E)\}^k + D$ den n -fachen Eigenwert 2^k besitzt. *H. Ostmann.*

Littlewood, D. E.: On unitary equivalence. *J. London math. Soc.* 28, 314–322 (1953).

The problem $X A X^* = B$, $X X^* = E$ (identity), is treated for matrices of complex numbers. Difficulties which may occur in some special cases are explained by examples. The method appears similar to that of the reviewer [*Acta math.* 82, 297–308 (1951)], who gave an inductive solution of the more general problem $X A_i X^* = B_i$, $X X^* = E$. *J. L. Brenner.*

Boft, R. and R. J. Duffin: On the algebra of networks. *Trans. Amer. math. Soc.* 74, 99–109 (1953).

Ein reeller n -dimensionaler Raum U bestehe aus n -Tupeln $u = (u_1, \dots, u_n)$; durch das Skalarprodukt $(u, v) = \sum u_i v_i$ werde eine Metrik eingeführt. V und V' seien zwei komplementäre orthogonale Unterräume, P und P' seien diejenigen n -reihigen quadratischen Matrizen, die die orthogonale Projektion von Vektoren $u \in U$ auf die Unterräume V und V' bewirken. Ein komplexer Vektor heiße in V gelegen, wenn sein Real- und Imaginärteil in V liegen. G sei eine n -reihige quadratische Matrix, deren Anwendung nur auf Vektoren des Teilraums V beabsichtigt ist. V, V', P, P' sind fest gewählt; G wird gelegentlich auch als variabel betrachtet. Als die Determinante von G in V oder auch als eine Diskriminante von G wird die Größe D

$= \det (GP \cdot P')$ bezeichnet; ferner heiße im Falle $D \neq 0$ die Matrix $T = P(GP \cdot P')^{-1}$ die eingeschränkte Inverse von G . Es werden dafür Identitäten hergeleitet, die Eigenschaften der gewöhnlichen Inversen verallgemeinern. Setzt man $\eta = \log D$, so können die Matrizen-elemente T_{ji} durch partielle Differentiation erhalten werden: $T_{ji} = c_j \partial G_{ij} / \partial c_j$. Ist f eine Funktion der reellen Variablen g_1, \dots, g_n und ist $-\partial^2 \log f / \partial g_i \partial g_j$ für alle i, j das Quadrat einer rationalen Funktion, so ist $f(g_1, \dots, g_n) / (1, \dots, 1)$ eine Diskriminante der Diagonalmatrix G mit den Diagonalelementen g_1, \dots, g_n und umgekehrt. Die Unterräume, in bezug auf welche eine Diagonalmatrix G dieselbe Determinante hat, gehen durch gewisse Spiegelungen auseinander hervor. — Die hergeleiteten Sätze sind mehrerer physikalischer Anwendungen fähig, insbesondere liefern sie den passenden mathematischen Apparat für einige grundlegende Fragen der Theorie der elektrischen Netzwerke.

A. Sthr.

Kelly, J. B.: On factorization of polynomials. Amer. math. Monthly **60**, 375—379 (1953).

A method is presented for the determination, in a finite number of steps, of the factorization over the rational field of a given polynomial. This procedure employs the coefficients of the polynomial rather than its values at the integers, as Kronecker's method does.

E. Frank.

Dinghas, Alexandre: Sur un théorème de Schur concernant les racines d'une classe des équations algébriques. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **25**, 17—20 (1953).

I. Schur [Math. Z. **1**, 377—402 (1918)] proved that if (S) is a class of algebraic equations of the form $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ with integral coefficients and positive roots x_1, \dots, x_n , simple and distinct, then, if γ is smaller than $\lfloor e$, the number of equations of the class (S) with $A_\gamma(x) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^n - \gamma$ is finite. Here it is shown that there exists in the interval $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3}$ a number r_0 such that there corresponds to every $x > r_0$ a positive number $\delta(x)$ such that for all $0 < \delta < \delta(x)$, the number of equations of class (S) with $x_1^\delta + \dots + x_n^\delta \leq (1 + \delta)n$ does not exceed a certain finite number $N = N(\delta)$.

E. Frank.

Weinberg, Louis: Test for zeros in the unit circle. J. appl. Phys. **24**, 1251—1252 (1953).

Here is given the continued fraction criterion for the determination of a Hurwitz polynomial [cf. Frank, Bull. Amer. math. Soc. **52**, 144—157 (1946) and this Zbl. **32**, 103].

E. Frank.

Morris, J.: Note on the derivation by simple algebra of Routh's stability criterion for the biquadratic characteristic equation. Quart. J. Mech. appl. Math. **6**, 255—256 (1953).

Es seien in (*) $f(x) = x^4 + b x^3 + c x^2 + dx + e$ alle Koeffizienten reell und $\neq 0$. In der Zerlegung $(x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2)$ mit reellen p_i, q_i liefert der Koeffizientenvergleich für b und d : $p_1(q_2 - q_1) = -b q_1 + d$, $p_2(q_2 - q_1) = b q_2 - d$, also $p_1 p_2 (q_2 - q_1)^2 = b d (q_1 + q_2) - d^2 - b^2 q_1 q_2$, und der Vergleich für c und e ergibt $p_1 p_2 [(q_2 - q_1)^2 + b d] = b c d - d^2 - e b^2$. Ist dieser Ausdruck positiv und auch sämtliche Koeffizienten in (*), dann gilt 1. $p_1 + p_2 > 0$ und $p_1 p_2 > 0$, also $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ und 2. $p_1 q_2 + p_2 q_1 > 0$ und $q_1 q_2 > 0$; sind also die p_i 0, dann auch die q_i . Daher gilt für die sämtlichen Nullstellen x_i von (*): $\operatorname{Re} x_i < 0$; aus $b c d - d^2 - e b^2 = 0$ hingegen folgt p_1 oder p_2 gleich Null, also ein Wurzelpaar mit verschwindendem Realteil.

H. Bilharz.

Amato, Vincenzo: Sulle curve algebriche a gruppo di monodromia totale. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **1**, 164—166 (1953).

Es wird kurz über die bereits referierten Ergebnisse berichtet (dies. Zbl. **39**, 18; **44**, 9; **48**, 11).

W. Grbner.

Gruppentheorie:

Ellis, David: Remarks on isotopies. Publ. math., Debrecen **2**, 175—177 (1953).

Ein Gruppoid G heißt verallgemeinert abelsch, wenn vier Permutationen P, Q, R, S von G existieren mit $(x P)(y Q) = (y R)(x S)$ für alle $x, y \in G$. Dies ist eine isotopieinvariante Eigenschaft. Ist G eine Halbgruppe mit Einheit, so folgt, daß G abelsch ist, wenn es verallgemeinert abelsch ist. Zwei Halbverbände sind dann und nur dann isotop, wenn sie isomorph sind.

G. Kthe.

Skolem, Th.: A theorem on some semi-groups. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **25**, 72—77 (1953).

L'A. démontre qu'un demi-groupe régulier d'un côté est immersible dans un groupe, résultat établi par O. Ore (ce Zbl. **1**, 266). Il a pris connaissance de l'antériorité de la démonstration de O. Ore postérieurement à l'impression de sa Note.

R. Croisot.

Aubert, Karl Egil: On the ideal theory of commutative semigroups. *Math. Scandinav.* **1**, 39—54 (1953).

In kommutativen Halbgruppen (ohne Voraussetzung von $ac = bc \rightarrow a = b$) werden die s -Ideale, d. h. die Vereinigungen von Hauptidealen, betrachtet. Verf. überträgt u. a. die Noethersche Theorie der Durchschnittsdarstellungen auf s -Ideale und diskutiert für Ringe den Zusammenhang mit den Durchschnittsdarstellungen durch Dedekindsche Ideale.

P. Lorenzen.

Higman, Graham and B. H. Neumann: Groups as groupoids with one law. *Publ. math., Debrecen* **2**, 215—221 (1953).

Eine Gruppe ist eine Menge mit einer ausführbaren Operation a/b (Rechts-division), die gewisse „Identitäten“, z. B. $a/c/b/c = a/b$ erfüllt. Verff. beweisen, daß jede Klasse von Gruppen, die durch endlich viele Identitäten (wie z. B. die Klasse aller Gruppen) charakterisiert ist, durch eine Identität charakterisiert werden kann: die Klasse aller Gruppen z. B. durch

$$x x x q y q z q x x q x q z q q q = y$$

mit $a b q$ an Stelle von a/b .

P. Lorenzen.

Tvermoes, Helge: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs. *Math. Scandinav.* **1**, 18—30 (1953).

Hauptziel vorliegender Arbeit ist Aufstellung und Anwendung eines Einbettungssatzes, der als „coset theorem“ bereits bei E. L. Post (dies. Zbl. **25**, 12) vorkommt, wo er die führende Rolle bei den ausgedehnten Untersuchungen über polyadische Gruppen einnimmt.

A. Jaeger.

Lazard, Michel: Détermination et généralisation des groupes de dimension des groupes libres. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1222—1224 (1953).

The object of this note is to unify and generalize the theory of W. Magnus' and H. Zassenhaus' dimension groups (W. Magnus, this Zbl. **11**, 152; H. Zassenhaus, this Zbl. **21**, 200). We call a series of decreasing subgroups $G = H_1 \supset H_2 \supset \dots$ of G to be N -series if the commutator subgroups (H_i, H_j) are contained in H_{i+j}

for all $i, j \geq 1$. The associated graded Lie algebra is the direct sum $\sum_{i \geq 1} \frac{H_i}{H_{i+1}}$,

bracketed operation in H_i/H_{i+1} being naturally defined by $xyx^{-1}y^{-1}$. Let now A be an associative algebra with unit element 1 and with a filtration $v(y)$ (J. Leray, this Zbl. **38**, 363; **39**, 191, especially p. 11 of the first note), so that $v(y)$ is a function defined on A with non-negative integers or $+\infty$ as its values and 1. $v(a-b) > \min(v(a), v(b))$, 2. $v(ab) \geq v(a) + v(b)$ 3. $v(0) = +\infty$. It is convenient to add the fourth axiom 4. $v(\alpha a) \geq v(a)$ for any operator α on A . If h is a homomorphism of G into the group of regular elements of A , which satisfies $v(h(x) - 1) \geq 1$ ($x \in G$), then the system of subgroups $H_i = \{x | v(h(x) - 1) \geq i\}$ constitute an N -series. p -adic filtration $w_p(y)$ (over any abelian group A) is defined by $y \in p^{w_p(y)} A$ and $y \notin p^{w_p(y)+1} A$. Let further \mathfrak{A} be the algebra of non commutative formal series of x_i over the domain of p -adic integers. He restricts filtrations v by the additional conditions: α) If $y = \sum_{i \geq 1} y_i$ is the decomposition of $y \in \mathfrak{A}$ in its homogeneous

components then 1. $v(y) = \inf v(y_i)$ ($i \geq 1$), β) $v(y_i) = F_v(i, w_p(y_i))$ depends only on its degree and $w_p(y_i)$. For instance by Magnus' and Witt's investigation $F_v(i, w_p(y_i)) = i$, and they have proved that the group G generated by $1 + x_i$ in \mathfrak{A} is a free group and the N -series defined by this ω is the lower central series of G

The corresponding Lie algebra is also a free algebra over the ring of rational integers. The author deduces from above results the following main theorem: Any elements of G can be represented in the form $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots$, where 1. $z_i \in G_i$ 2. $z_i = 1$ or $\omega_p(\dot{z}_i) = 0$ where \dot{z}_i is the natural image of z_i in G_i/G_{i+1} , and $v(z-1) = \inf F_v(i p^h, k_i - h)$ ($1 \leq i < \infty$, $0 \leq h \leq k_i$). Two examples are given by 1° $F(i, j) = \infty$ ($j \geq h$), $F(i, j) = i$ ($j < h$) (The case of dimension group mod p^h), 2° $F(i, j) = r i + s j$ (r, s positive integers) together with some properties concerning corresponding N -series and Lie algebras. The author gives further considerations concerning the effects of the supplementary conditions $F(i, 0) < \infty$, $\lim_{j \rightarrow \infty} F(i, j) = \infty$.

T. Tannaka.

Clowes, J. S. and K. A. Hirsch: Simple groups of infinite matrices. Math. Z. 58, 1—3 (1953).

Let $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$ be called a column if the relation $a_{ij} = \delta_{ij}$ holds whenever j is equal to i and also whenever j is not equal to the fixed integer $n = n(A)$. The group generated by the columns is a simple group (the domain of coefficients being a field). This group contains exactly the row bounded matrices $(a_{ij} = \delta_{ij}, j > m = m(A))$ of determinant 1. A corresponding theorem holds for division rings, according to the reviewer.

J. L. Brenner.

Neumann, B. H.: On a problem of Hopf. J. London math. Soc. 28, 351—353 (1953).

H. Hopf has raised the question whether any two finitely generated groups which are homomorphic maps of each other are necessarily isomorphic. The author gives the following counter example, in which the two groups are finitely related. Let $G = \{a, b, c; a^{-1} b a = b^2, b c = c b\}$. Put $b_1 = a b a^{-1}$, $d = (b_1, c) = b_1^{-1} c^{-1} b_1 c$, and let N be the smallest normal subgroup of G which contains d^2 . Then G and $H = G/N$ are homomorphic images of each other, but are not isomorphic.

D. G. Higman.

Neumann, B. H. and Hanna Neumann: A contribution to the embedding theory of group amalgams. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 243—256 (1953).

Es ist wohlbekannt, daß Amalgame abelscher Gruppen sich nicht immer in Gruppen, geschweige denn in abelsche Gruppen einbetten lassen; die Verff. illustrieren dieses Phänomen an einigen Beispielen, in denen noch Zusatzvoraussetzungen erfüllt sind. Weiter hat Hanna Neumann ein Beispiel eines Amalgams von fünf abelschen Gruppen konstruiert, das sich zwar in eine Gruppe, aber nicht in eine abelsche Gruppe einbetten läßt. Hier wird nun gezeigt, daß Amalgame von vier abelschen Gruppen dann und nur dann sich in eine Gruppe einbetten lassen, wenn sie sich sogar in eine abelsche Gruppe einbetten lassen. Dieser Satz ergibt sich als Spezialfall aus folgendem Kriterium: Es sei Σ eine Menge abelscher Untergruppen der Gruppe G mit folgender Eigenschaft: sind X und Y zwei verschiedene Untergruppen in Σ , ist $\Sigma(X, Y)$ die Untergruppe von G , die von den von X und Y verschiedenen Untergruppen in Σ erzeugt wird, dann liegt der Durchschnitt $X \cap Y \cap \Sigma(X, Y)$ im Zentrum von G . Ist dann weiter K die von all den Untergruppen $X \cap Y \cap \Sigma(X, Y)$ des Zentrums von G erzeugte Untergruppe von G , so ist das aus allen Gruppen $X K$ mit X in Σ gebildete Amalgam abelscher Gruppen in eine abelsche Gruppe einbettbar; und folglich ist auch das Amalgam von Σ in eine abelsche Gruppe einbettbar.

R. Baer.

Neumann, B. H. and Hanna Neumann: On a class of Abelian groups. Arch. der Math. 4, 79—85 (1953).

Im Anschluß an eine Arbeit von H. Yamabe (dies. Zbl. 43, 29) nennen Verff. eine ganzwertige Funktion $\varphi(x, y)$ über einer (additiv geschriebenen) Gruppe eine Yamabe-Funktion, wenn sie a) bilinear ist, d. h. $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$, $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ erfüllt, und b) für $x = y$ nur bei $x = 0$ ver-

schwindet, und zeigen: Ist G eine Gruppe, über der eine Yamabe-Funktion definiert ist, so ist jede Untergruppe von G der Ordnung \aleph_1 (oder geringer) eine freie abelsche Gruppe. Hiermit wird Yamabes Resultat verschärft, der G als abzählbar voraussetzt, und die Vermutung nahegelegt, daß die Behauptung von der Ordnung der Gruppe unabhängig sein dürfte. Verff. gehen bei ihrem Beweis anders vor als Yamabe und benutzen wesentlich ein Resultat von E. Specker (dies. Zbl. 41, 363), das zugleich korrigiert und verallgemeinert wird, ohne damit allerdings zum Beweis obiger Vermutung brauchbar zu werden.

H. Rohrbach.

Trofimov, P. I.: Über den Einfluß der Anzahl aller Klassen nicht-invarianter konjugierter Untergruppen auf die Eigenschaften einer endlichen, nicht-speziellen Gruppe. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 45—72 (1953) [Russisch].

In einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung g bezeichne $\rho(\mathfrak{G})$ die Anzahl der Klassen konjugierter nicht-invarianter Untergruppen und $\tau(g)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von g . Zunächst wird gezeigt, daß für jede natürliche Zahl k endliche, nicht-spezielle, auflösbare Gruppen \mathfrak{G} mit $\rho(\mathfrak{G}) = k$ existieren. — Eine endliche, nicht-spezielle Gruppe ist auflösbar, wenn $\tau(g) = \rho(\mathfrak{G}) + 1$, $\rho(\mathfrak{G})$ oder $\rho(\mathfrak{G}) - 1$. Zwischen den Zahlen $\rho(\mathfrak{G})$ und $\tau(g)$ bestehen folgende Zusammenhänge: Für $\rho(\mathfrak{G}) = 1, 2$ ist $\tau(g) \leq \rho(\mathfrak{G}) + 1$, für $\rho(\mathfrak{G}) = 3, 4$ ist $\tau(g) \leq \rho(\mathfrak{G})$ und für $\rho(\mathfrak{G}) \geq 5$ ist $\tau(g) \leq \rho(\mathfrak{G}) - 2$. — Schließlich wird gezeigt, daß jede endliche Gruppe \mathfrak{G} mit $\rho(\mathfrak{G}) \leq 6$ auflösbar ist. — Z. T. handelt es sich um Verallgemeinerungen von Ergebnissen von Sigley (dies. Zbl. 25, 101).

R. Kochendörffer.

Čunichin, S. A.: Über Existenz und Konjugiertheit von Untergruppen bei einer endlichen Gruppe. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 111—132 (1953) [Russisch].

The paper contains the proofs of the theorems announced in two previous notes (this Zbl. 46, 23; 47, 26).

K. A. Hirsch.

Schenkman, Eugene: A generalization of the central elements of a group. Pacific J. Math. 3, 501—504 (1953).

Für die Elemente a, g einer Gruppe G mit Einselement e werde $[a, g] = [a, g]_1 = a^{-1}g^{-1}ag$, $[a, g]_n = [a, [a, g]_{n-1}]$ ($n = 2, 3, \dots$) gesetzt. Gilt $[a, g]_n = e$ für ein n und alle g , so wird a schwach zentral (von n -ter Ordnung) genannt. Dieser Begriff ist homomorphieinvariant. Die Elemente einer endlichen normalen nilpotenten Untergruppe sind schwach zentral. Für ein schwach zentrales a ist $\{a\}$ dann und nur dann sein eigener Normalisator, wenn $\{a\} = G$. Es gelten die folgenden bemerkenswerten Sätze: Theorem 1. Ist G lokal endlich und sind für eine feste Primzahl p alle Elemente von G von p -Potenzordnung schwach zentral, so bilden diese eine normale Untergruppe. Corollar 1. Ist G lokal endlich und sind alle Elemente schwach zentral, so ist G das direkte Produkt von p -Gruppen. Theorem 2. Ist G lokal endlich und auflösbar, so bilden die schwach zentralen Elemente eine normale Untergruppe und zugleich ein direktes Produkt von p -Gruppen. Theorem 2a. Ist G endlich und auflösbar, so machen die schwach zentralen Elemente eben das Nil-Radikal H von G aus. Nach Fitting (dies. Zbl. 19, 198) wird H als die größte normale Untergruppe definiert, für die $H_n = e$ mit einem n stattfindet, wobei $H_1 = H$, $H_n = [H, H_{n-1}]$ ($n = 2, 3, \dots$) ist. Ref. berichtigt: Auf S. 501 soll in der 8. Zeile $[a, g]$ für $[g, a]$ und in der 4. Zeile v. u. $\{a\}$ für a , ferner auf S. 502 in der 2. Zeile v. u. \neq für $=$ stehen.

L. Rédei.

Berman, S. D.: Über einige Eigenschaften der ganzzahligen Gruppenringe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 91, 7—9 (1953) [Russisch].

Für eine endliche Gruppe G mit den Elementen $e_0 (= 1)$, e_1, \dots, e_{n-1} seien $R(G, C)$ bzw. $R(G, K)$ die Gruppenringe mit ganzen rationalen bzw. mit rationalen Koeffizienten. Untersucht werden die Lösungen der Gleichung $u^m = e_0$ in einem der Gruppenringe. Eine Lösung u dieser Gleichung wird Einheitswurzel genannt. Die kleinste positive Zahl t mit $u^t = \pm e_0$ heißt die Ordnung von u . Es zeigt sich, daß die Ordnung jeder Einheitswurzel aus $R(G, C)$ ein Teiler der Gruppenordnung ist. Die Elemente $\pm e_i$ werden als triviale Einheitswurzeln bezeichnet. Ist $x = \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$ und $x^* = \alpha_0 e_0^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}^{-1}$, so heißt x normal, wenn $x x^* = x^* x$. Jede normale Einheitswurzel aus $R(G, C)$ ist trivial. Die folgenden Eigenschaften von G sind äquivalent: I. Jede Einheitswurzel aus $R(G, C)$ ist trivial. II. Jedes Element aus $R(G, C)$ ist normal. III. G ist entweder eine abel-

sehe Gruppe oder eine hamiltonsche Gruppe der Ordnung 2^m . Schließlich werden die nilpotenten Elemente aus $R(G, K)$ untersucht. *R. Kochendörffer.*

Berman, S. D.: Über die Isomorphie der Zentren von Gruppenringen von p -Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 185—187 (1953) [Russisch].
 G und H seien zwei endliche p -Gruppen ($p \neq 2$) und K ein beliebiger Körper. Dann und nur dann sind die Zentren der Gruppenringe von G und H über K isomorph, wenn man die Klassen K -konjugierter Elemente von G und H (vgl. Verf., dies. Zbl. **47**, 28) derart eindeutig einander zuordnen kann, daß entsprechende derartige Klassen die gleiche Anzahl von Klassen im gewöhnlichen Sinne enthalten.

R. Kochendörffer.

Fox, Ralph H.: Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring. Ann. of Math., II. Ser. **57**, 547—560 (1953).

Eine Ableitung in dem Gruppenring JG der Gruppe G mit ganzzahligen Koeffizienten ist eine Abbildung D in JG mit $D(u \cdot v) = Du + Dv$ und $D(u \cdot v) = Du \cdot v^0 + u Dv$. Darin ist v^0 die Summe der Koeffizienten des Elementes v . Ist Φ eine freie Gruppe mit den Erzeugenden x_1, x_2, \dots , so läßt sich jeder Erzeugenden x_i eindeutig eine (partielle) Ableitung D_i durch die zusätzliche Bedingung $D_i x_k = \delta_{ik}$ zuordnen. Ein Ringelement ist durch seine partiellen Ableitungen bestimmt, und zwar ist $u = v^0 + \sum D_i u (x_i - 1)$. Die höheren Ableitungen sind nützlich bei der Untersuchung der höheren Kommutatorgruppen der freien Gruppe. Ihnen entsprechen Ideale, die sich durch ihre Dimensionen und daher auch ihre Ableitungen kennzeichnen lassen. Ferner ergibt sich ein einfacher Beweis für den Satz von Higman, daß der Gruppenring der freien Gruppe keine Nullteiler besitzt. *K. Reidemeister.*

Huppert, Bertram: Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953).

Die vorliegende Arbeit knüpft an Fragestellungen und Ergebnisse einer Arbeit von H. Wielandt (dies. Zbl. **43**, 258) an. Unter einer Z_m -zerlegbaren Gruppe verstehe man eine solche, die sich als Produkt von m paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen endlicher Ordnung darstellen läßt. Zunächst werden Z_2 -zerlegbare p -Gruppen untersucht. Das Hauptergebnis ist: Jede Z_2 -zerlegbare p -Gruppe ungerader Ordnung besitzt einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe. Ferner ist jede solche Gruppe regulär und besitzt eine zyklische Kommutatorgruppe. Die Z_2 -zerlegbaren p -Gruppen ungerader Ordnung sind genau diejenigen regulären p -Gruppen ungerader Ordnung, welche höchstens $p - 1$ Untergruppen der Ordnung p enthalten. Jede Untergruppe einer Z_2 -zerlegbaren p -Gruppe ungerader Ordnung ist Z_2 -zerlegbar und je zwei Untergruppen sind vertauschbar. Im Falle $p = 2$ trifft man auf kompliziertere Verhältnisse. Über Z_2 -zerlegbare Gruppen beliebiger Ordnung wird als Hauptsatz bewiesen, daß jede derartige Gruppe überauflösbar ist, d. h. jede Hauptreihe ist primzahlstufig. Daraus folgt z. B., daß die Kommutatorgruppe nilpotent ist, daß jede maximale Untergruppe Primzahlindex besitzt und daß sich jede Darstellung auf monomiale Gestalt transformieren läßt. Ferner ergibt sich: Die p -Sylowgruppen ($p \neq 2$) der Kommutatorgruppe sind abelsch. Als weiteres Ergebnis sei schließlich erwähnt: Jede Z_m -zerlegbare Gruppe ist überauflösbar.

R. Kochendörffer.

Est, W. T. van: Endliche Gruppen mit den Erzeugenden A, B, C , und den Relationen $A^a = B^b = C^c = A B C = 1$. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **1**, 16—26 (1953) [Holländisch].

It is known that the only finite groups with the generators A_1, A_2, \dots, A_n and the defining relations $A_1^{a_1} = A_2^{a_2} = \dots = A_n^{a_n} = A_1 A_2 \dots A_n = 1$ are the cyclic and dihedral groups, and the tetrahedral, hexahedral and icosahedral groups. The usual proof of this fact makes use of the representation of such a group as a discrete group of elliptic, hyperbolic or Euclidean motions. The author gives a proof by combinatorial methods by representing the group as a 2-polytope (cf. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig 1932, dies. Zbl. **4**, 369).

P. M. Cohn.

Chowla, S., I. N. Herstein and W. R. Scott: The solutions of $x^a = 1$ in symmetric groups. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **25**, 29—31 (1953).

Les AA obtiennent une fonction génératrice pour le nombre $A_{n,a}$ des substitutions du groupe symétrique S_n , dont l'ordre divise d . *S. Bays.*

Szele, T.: On direct decompositions of Abelian groups. J. London math. Soc. 28, 247—250 (1953).

An (additive) abelian torsion group A is called regular by the author if it is r -bounded, that is, contains an element of maximal order r , and if furthermore a is an element of $r/o(a) \cdot A$ for every a in A , where $o(a)$ denotes the order of a . In this paper the author gives a short direct proof, involving Zorn's lemma, of the following theorem, which he notes may also be obtained as a corollary to known theorems: A regular r -bounded subgroup A of an abelian group G is a direct summand of G if and only if $A \cap rG = 0$. Several results concerning abelian groups with non-zero torsion subgroups are obtained as corollaries, for example: If the abelian group G contains an element of prime order p , then it contains as a direct summand either a cyclic group of p -power order, or a group of type p^∞ . If the torsion group T of a mixed abelian group G is bounded, then T is a direct summand of G (theorem of Baer and Fomin). If a is an element of maximal order in an abelian group, then the cyclic subgroup generated by a is a direct summand of the group (this generalizes a theorem of Baer). D. G. Higman.

Fuchs, L.: A simple proof of the basis theorem for finite Abelian groups. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 117—118 (1953).

Ein einfacher Beweis des Basissatzes für endliche abelsche Gruppen. Es existiert ein Minimalsystem von Erzeugenden derart, daß alle Elemente Primzahlpotenzordnung haben und kein Element durch ein solches von niedrigerer Ordnung ersetzt werden kann. Verf. zeigt, daß ein solches System eine Basis ist. O. Grün.

Mann, H. B.: An addition theorem for sets of elements of Abelian groups. Proc. Amer. math. Soc. 4, 423 (1953).

Let G be a finite Abelian group, A, B sets of elements in G . AB denotes the set of all elements of the form $a \cdot b$ ($a \in A, b \in B$), \bar{A} the complement of A in G , and (A) the number of elements in A . The author proves: If for the set A and every subgroup H of G $(AH) \geq (A) + (H) - 1$ or $AH = G$, then for every set B

$$(AB) \geq (A) + (B) - 1 \text{ or } AB = G.$$

The proof depends on an earlier paper by the author (this Zbl. 46, 42). S. Selberg.

Bruijn, N. G. de: On the factorization of finite Abelian groups. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 258—264 (1953).

Für eine endliche Abelsche Gruppe G mit Einselement e wird $G = A_1 A_2 \dots A_n$ eine Faktorisierung von G genannt, wenn $A_i \subseteq G$ ist und sich jedes Element von G eindeutig als $a_1 a_2 \dots a_n$ ($a_i \in A_i$) schreiben läßt. Ein A ($\subseteq G$) heißt nach Hajós periodisch, wenn A aus Nebengruppen einer Untergruppe ($\neq e$) von G besteht. Der berühmte Satz von Hajós (dies. Zbl. 25, 254), mit dem er die Vermutung von Minkowski über den „Grenzfall“ linearer Ungleichungen bewiesen hat, besagt, daß in jeder Faktorisierung $G = A_1 \dots A_n$ mit $A_i = (e, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{m_i})$ mindestens ein A_i periodisch (sogar eine Gruppe) ist. (S. auch Rédei, dies. Zbl. 35, 16, und Szele, dies. Zbl. 35, 16). Ebenfalls Hajós stellte die Frage, für welche G in jeder Faktorisierung $G = AB$ mindestens das eine von A, B periodisch ist. Ist das der Fall, so wird G „gut“, sonst „schlecht“ genannt. Im folgenden bezeichnet $\{P_1, \dots, P_r\}$ ein G mit den Invarianten P_1, \dots, P_r , ferner bezeichnen p, q, r, s verschiedene Primzahlen. Über den nichtzyklischen Fall gewann Rédei (dies. Zbl. 29, 109), daß $\{p, p\}$ „gut“ ist. Verf. zeigt, daß „fast“ alle nichtzyklischen G „schlecht“ sind. Und zwar sind $\{2, 2, 2\}, \{2, 2, 2, 2\}, \{2, 2, 2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}$ „gut“, ferner bleiben bei ihm $\{2^\lambda, 2\}, \{2^\lambda, 2, 2\}$ ($\lambda > 1$); $\{4, 2, 2, 2\}, \{4, 4\}, \{p^\lambda, 2, 2\}$ ($p > 2, \lambda > 0$); $\{p, 4, 2\}, \{p, 2, 2, 2\}, \{p^2, 2, 2, 2\}, \{p, 2, 2, 2\}$ ($p > 2$); $\{p, q, 2, 2\}$ ($p, q > 2$); $\{2, 3, 3\}, \{p, 3, 3\}$ ($p > 3$); $\{9, 3\}$ unentschieden, aber alle übrigen nichtzyklischen G sind „schlecht“. Bezüglich des zyklischen Falles hat Hajós (dies. Zbl. 41, 157) gefunden, daß $\{p^\lambda\}$ ($\lambda > 0$) „gut“, aber die meisten übrigen G „schlecht“ sind; nach Rédei (dies. Zbl. 41, 157) sind $\{p, q\}, \{p, q, r\}$ „gut“; unentschieden sind nur $\{p^\lambda, q^\mu\}$ ($\lambda, \mu > 0$; $\lambda + \mu > 2$), $\{p^\lambda, q, r\}$ ($\lambda > 1$), $\{p, q, r, s\}$ geblieben. Für diese wird Verf. in einer nächstfolgenden Arbeit beweisen, daß $\{p^\lambda, q^\mu\}$ ($\lambda \geq 2$) „gut“ ist, ferner findet er hier, daß $\{p^\lambda, q^\mu\}$ ($\lambda, \mu > 1$; $\lambda + \mu > 4$); $\{p^\lambda, q, r\}$ ($\lambda > 2$) „schlecht“ sind. Hiernach bleiben unter den zyklischen G nur $\{p^2, q^2\}, \{p^2, q, r\}, \{p, q, r, s\}$ als unentschiedene Fälle übrig. Verf. beweist auch den (nicht trivialen) Satz, daß die Untergruppen von „guten“ Gruppen „gut“ sind. L. Rédei.

Papy, Georges: Groupes différentiels gradués et différentielle extérieure. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 293—308 (1953).

This paper begins with an algebraic study of sequences of groups G^μ and homomorphisms q^μ , that are introduced under the name of chains. The main results are the following: Given a chain (G^μ, q^μ) and a sequence of groups H^μ with homomorphisms $h^\mu: G^\mu \rightarrow H^\mu$. Then $(H^\mu, h^{\mu+1} q^\mu (h^\mu)^{-1})$ is a chain if and only if $((h^\mu)^{-1} 0, q^\mu)$ is a sub-chain of (G^μ, q^μ) . In this case h^μ is a homomorphism of chains. — If the homomorphisms q^μ are a differential ($q^{\mu+1} q^\mu = 0$), and if in G^μ there exists for any subgroup a supplementary subgroup, the chain (G^μ, q^μ) is a homomorphic image of an exact chain. — Let (G^μ, q^μ) be an exact chain, (H^μ, ψ^μ) be any chain and R^μ a subgroup of the kernel of ψ^μ disjoint from the image of $\psi^{\mu-1}$, and be h^μ a homomorphism of (G^μ, q^μ) on (H^μ, ψ^μ) . The four propositions $(\psi^{\mu+1})^{-1} 0 = \psi^{\mu+1} H^{\mu+1} \dot{+} R^\mu$; $(q^{\nu-1})^{-1} 0 \cap (h^{\nu-1})^{-1} 0 = q^{\nu-1} (h^{\nu-1})^{-1} R^\nu$; $(G^\nu (h^{\nu-1})^{-1} R^\nu, q^\nu)$ is exact; $h^{\nu-1} q^{\nu-1} x - R^{\nu-1} = (\exists y) y - G^{\nu-1} \& h^\nu (x - q^{\nu-1} y) \in R^\nu$ are equivalent. — The second part deals with the exterior derivation in the exterior algebra on a free module of base $dx^i, 1 \leq i \leq n$. Be ϵ the operation of skew multiplication to the left, and let the cumulative index $a = (a_1, \dots, a_k)$ represent a strictly growing sequence of indices, with $dx^a = dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_k}$ and $\epsilon \epsilon x^a = \epsilon^k \epsilon x^{a_1} \wedge \dots \wedge \epsilon x^{a_k}$. For any form $f = \sum f_a dx^a$ put $Bf = \sum (\epsilon f_a \epsilon x^a) dx^a$. Then the exterior derivative decomposes into $d = B \epsilon \left(\sum_{i=1}^n dx^i \right) B^{-1}$. The results of the first part give a new proof of Poincaré's theorem in the case of characteristic zero. The discovery of a decomposition of d is ascribed to Th. Lepage.

H. Guggenheimer.

Murnaghan, F. D.: The parametrisation and element of volume of the unitary symplectic group. Proc. nat. Acad. Sci. USA **39**, 324—327 (1953).

Die Arbeit beginnt mit einem kurzen eleganten Beweis der Tatsache, daß symplektische Matrizen die Determinante 1 haben. Die Gruppe der unitären symplektischen Matrizen ist von der Dimension $k(2k+1)$, jede Klasse darin von der Dimension $2k^2$, so daß k Parameter die Klasse charakterisieren. Der Klassen-Teil des Volumenelements ist bekannt; sehr viel mühsamer ist der Teil über die $2k^2$ „In-Klassen-Parameter“ aufzustellen. Er kann in einer kurzen Note nicht hergeleitet, nicht einmal angegeben werden. Er wird nur beschrieben, so gut es geht, indem nach Einführung geeigneter Parameter die Formel für $k=2, 3, 4$ angegeben und die Verallgemeinerung angedeutet wird.

H. Boerner.

Tits, J.: Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 309—329 (1953).

On sait que le groupe projectif du plan des octaves est une forme réelle du E_6 et que le groupe elliptique est un F_4 (H. Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht 1951). L'A. esquisse une démonstration nouvelle partant de la définition affine du plan des octaves. En examinant des transformations affines spéciales, il trouve que le groupe projectif Γ doit opérer transitivement sur les triples de points non alignés et, par conséquent, doit dépendre de 78 paramètres. D'autre part grâce à un lemme qui traite tous les groupes, dont chaque sous-groupe normal continu est transitif, Γ doit être simple, donc (!) une forme réelle du E_6 . L'A. continue par étudier les polarités du plan des octaves et spécialement celles qu'il appelle hermitiennes et qui induisent sur chaque droite une correspondance de points conjugué qui y est une inversion. Le lieu des points unis d'une polarité est appelé une conique, hyperbolique si elle possède des points réels, et elliptique aus cas contraire. Les sous-groupes de Γ conservant des coniques sont des formes réelles de F_4 . Dans l'introduction l'A. annonce une solution du problème de l'interprétation géométrique du groupe E_7 .

H. Freudenthal.

Verbände. Ringe. Körper:

Zacher, Giovanni: Sugli omomorfismi superiori ed inferiori. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 251—252 (1953).

Gericke, Helmuth: Über den Begriff der algebraischen Struktur. Arch. der Math. 4, 163—171 (1953).

Gegenstand der Arbeit ist der folgende Birkhoffsche Satz aus der allgemeinen Strukturtheorie (universal algebra): Jeder vollständige Verband ist isomorph dem vollen Subalgebrenverband einer geeigneten Algebra. Es werden einerseits die Begriffe „strukturierte Menge“, „Struktur“ (= Klasse isomorpher strukturierter Mengen), „Strukturtyp“ (= Klasse äquivalenter Axiomensysteme) und „Modell“ aus dem verschwommenen Strukturbegriff herausanalysiert, andererseits wird der o. a. Satz unabhängig vom naiven Mengenbegriff (der in der Vollständigkeitsbedingung steckt) formuliert durch Benutzung einer „definiten“ Vollständigkeit. Hierbei wird die „Potenzmenge“ durch geeignete Familien von Mengen ersetzt, so daß man insbesondere im Abzählbaren bleibt.

P. Lorenzen.

Szász, G.: Dense and semi-complemented lattices. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 42—44 (1953).

L sei ein Verband mit 0-Element. Das Element $a \neq 0$ heißt dicht (dense) in L , wenn $a \cap x = 0$ nur für $x = 0$ gilt. D sei die Menge aller dichten Elemente in L . Wenn L ein 1-Element enthält, gehört dieses zu D . Besteht D nur aus dem 1-Element, so heißt L semikomplementär; ist $L = D$, so heißt L dicht. L ist dann und nur dann dicht, wenn $0 \cap$ -irreduzibel ist. L ist semikomplementär, wenn L komplementär ist. Die Umkehrung wird für ländenendliche, nach oben semimodulare Verbände und für vollständige vollistributive Verbände bewiesen.

H. Gericke.

Blair, Robert L.: Ideal lattices and the structure of rings. Trans. Amer. math. Soc. 75, 136—153 (1953).

Die zweiseitigen Ideale bzw. die Rechtsideale eines Ringes A bilden einen vollständigen modularen Verband. Verf. untersucht, in welchem Umfang durch zusätzliche Eigenschaften dieser Verbände die Ringstruktur festgelegt wird. Im wesentlichen handelt es sich bei diesen Untersuchungen um die Forderungen, daß die genannten Verbände komplementär bzw. distributiv sind. Es resultieren Struktursätze über direkte Zerlegungen von A . Aus der Fülle der Sätze seien nur einige hervorgehoben: Der Verband der zweiseitigen Ideale von A ist dann und nur dann komplementär, wenn A direkte Summe von minimalen zweiseitigen Idealen ist. Und derselbe Satz gilt auch dann, wenn man Rechtsideale betrachtet. Ist der Verband V der zweiseitigen Ideale von A komplementär und besitzt A keinen von Null verschiedenen Linksannulator, so ist V eine Boolesche Algebra. Der Verband der Rechtsideale eines halbeinfachen Ringes A ist genau dann komplementär, wenn A isomorph ist zu einer diskreten direkten Summe von einfachen Ringen, die jeder ein minimales Rechtsideal enthalten. Enthält der Ring A ein (Links-) Einselement und ist der Verband der zweiseitigen (Rechts-) Ideale komplementär, so ist A halbeinfach. Ein halbeinfacher Ring ($\neq 0$), dessen Verband der Rechtsideale distributiv ist, ist isomorph zu einer subdirekten Summe von Schiefkörpern. Ein Ring A ($\neq 0$) ist genau dann isomorph zu einer diskreten direkten Summe von Schiefkörpern, wenn er halbeinfach ist und wenn der Verband seiner Rechtsideale eine Boolesche Algebra ist. Der Verband der zweiseitigen (Rechts-) Ideale eines Ringes A ist genau dann distributiv, wenn jedes zweiseitige (Rechts-) Ideal von A Durchschnitt aller umfassenden, streng irreduziblen zweiseitigen (Rechts-) Ideale ist. Dabei heißt ein zweiseitiges (Rechts-) Ideal I streng irreduzibel, wenn für beliebige zweiseitige (Rechts-) Ideale B, C aus $B \cap C \subseteq I$ stets $B \subseteq I$ oder $C \subseteq I$ folgt.

H.-J. Kowalsky.

Eckmann, B. und A. Schopf: Über injektive Moduln. Arch. der Math. 4, 75—78 (1953).

Ist der R -Modul B in dem R -Modul A enthalten, wobei R einen Ring mit Einselement bedeute, und ist B homomorph in den R -Modul M abgebildet, so heißt M injektiv, wenn sich der Homomorphismus von B in M stets zu einem Homomorphismus von A in M erweitern läßt. Es wird gezeigt: Ein injektiver Modul ist in jeder Erweiterung ein direkter Summand. Jeder R -Modul läßt sich zu einem injektiven erweitern, und es gibt eine kleinste injektive Erweiterung. Injektive Moduln spielen insbesondere in der Cohomologietheorie eine Rolle.

K. Reidemeister.

Pernet, Roger: Conjugaison et fibration dans les algèbres normales. I, II. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1325—1327, 1403—1405 (1953).

Ces deux notes ne donnent pas une idée bien nette des résultats de l'A., énoncés

ici sans démonstration dans un langage qui n'est pas toujours très clair. Nous nous contenterons de reproduire le résumé qui les accompagne. 1. Dans un produit tensoriel de deux espaces abstraits, on définit pour toute classe d'algèbres une variété canonique fibrée et des sous-variétés dont les projections sur un des espaces composants sont des variétés indivisibles, importantes en arithmétique. 2. Structure des variétés d'idéaux $(z - a)$, ou $(z + u)$. Algèbres nilsatellites R^* telles que $R^{*3} = 0$.
Cas général. L. Lesieur.

Northcott, D. G.: On unmixed ideals in regular local rings. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 20—28 (1953).

Nouvelle démonstration, plus simple que la démonstration originale, d'un théorème de I. S. Cohen: dans un anneau local régulier de dimension m , si l'idéal (a_1, a_2, \dots, a_r) est supposé de rang r , c'est un idéal non mixte. L'A. montre aussi que toute puissance de cet idéal est non mixte (th. 2, p. 24). Il en donne une application à la géométrie algébrique: soit V la variété irréductible sur le corps K qui correspond à l'idéal premier \mathfrak{p} dans $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$; supposons que l'idéal premier $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}$ appartienne à une puissance de \mathfrak{p} ; la sous-variété W qui correspond à \mathfrak{p}_0 est alors située sur la variété singulière de V .
L. Lesieur.

Kulk, W. van der: On polynomial rings in two variables. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 33—41 (1953).

Soit $R = \Delta[x, y]$ l'anneau des polynômes en x, y sur le corps Δ . Le groupe des automorphismes de R par rapport à Δ est composé par le groupe affine en x, y sur Δ et par les transformations de la forme $x' = x, y' = y + f(x)$, où $f(x)$ est un polynôme en x sur Δ . La démonstration est basée sur un lemme concernant la multiplicité d'intersection de deux branches de courbes algébriques. [Ce lemme, tel qu'il est donné par l'A., suppose le corps Δ algébriquement fermé, bien que cette hypothèse ne soit pas explicitement formulée dans le texte.]
G. Ancochea.

Hua, Loo-Keng (Chua, Lo Ken): Über Semihomomorphismen von Ringen und ihre Anwendungen auf die projektive Geometrie. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 143—148 (1953) [Russisch].

Let R and R' be two rings, the second without divisors of zero. A semi-homomorphism of R onto R' is a mapping that preserves addition, squares, and products of the form aba . Every ordinary homomorphism or anti-homomorphism is clearly a semi-homomorphism. The author proves the converse. Theorem 1. Every semi-homomorphism is either a homomorphism or an anti-homomorphism. From this follows, for the special case of (non-commutative) fields Theorem 2. Every semi-automorphism of a field is either an automorphism or an anti-automorphism. This result, with a longer proof, had been obtained by the author in a previous paper (this Zbl. 33, 104) where also the references to previous work (Reidemeister, Wachs, Ancochea, Kaplansky) can be found. The result is then used to prove the so-called fundamental theorem of projective geometry of a line over a non-commutative field. Theorem 3. Every projective mapping of a line onto itself preserves harmonic tetrads. Conversely, every one-to-one mapping of a line onto itself that preserves harmonic tetrads is a projectivity. K. A. Hirsch.

Osima, Masaru: Notes on basic rings. Math. J. Okayama Univ. 2, 103—110 (1953).

Let R be a ring with unit element 1, and let $1 = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{f(i)} e_{i,\alpha} = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{f(i)} e'_{i,\alpha}$ be two decompositions of 1 into orthogonal idempotent elements in R and let $e_{i,\alpha}$ be isomorphic $e'_{\alpha,\beta}$; two idempotent elements are called isomorphic when the left (right) ideals generated by them are isomorphic. Put $e = \sum_i e_{i,1}$, $e' = \sum_i e'_{i,1}$. Then $e'R e'$ is obtained from $e R e$ by an inner automorphism of R . Suppose that there is a decomposition of 1 as above with primitive idempotents $e_{i,\alpha}$, and suppose that it is unique up to isomorphisms (of idempotent elements). Then the number of different classes of isomorphic idempotent elements in R is finite, and the structure of R is completely determined by the system $(f(1), \dots, f(n))$ and the structure of the so called basic ring [R. Brauer, Nakayama, Ann. of Math., II. Ser. 39, 611—633 (1938); Nesbitt-Scott, Ann. of Math., II. Ser. 44, 534—553 (1943)] $R_0 = e R e$ of R . Under the same assumptions, any system of systems of matrix units associated with $e_{i,\alpha}$ is transformed to any such associated with $e'_{i,\alpha}$ by an inner automorphism of R . On assuming the minimum con-

dition in R , the author shows further that the decomposition of R into indecomposable two-sided ideals induces the decomposition of R/N^2 into directly indecomposable two-sided ideals, where N is the radical of R .
T. Nakayama.

Kuroš, A. G.: Radikale von Ringen und Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 13—26 (1953) [Russisch].

Verf. unternimmt es, die verschiedenen in der Theorie der Ringe aufgetretenen Radikalbegriffe (Baer, Levitzki, Köthe, Jacobson, Brown-McCoy) unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten. Es werden sogenannte Klassen von Ringen zugrunde gelegt, das sind Mengen von Ringen, die neben jedem Ring auch dessen sämtliche zweiseitigen Ideale und sämtliche homomorphen Bilder enthalten. Ist in einer Klasse von Ringen ein Radikalbegriff eingeführt, so entstehen die Teilmengen der radikalen und der halbeinfachen Ringe. Es wird untersucht, wie Teilmengen beschaffen sein müssen, damit sie bei irgendeinem Radikalbegriff als Klasse der radikalen und halbeinfachen Ringe auftreten können. Wenn in einer Klasse einfache Ringe vorhanden sind, dann zerfallen diese in zwei elementfremde Klassen, die obere Klasse, bestehend aus allen halbeinfachen Ringen, und die untere Klasse aller radikalen Ringe. Umgekehrt gehört zu jeder Einteilung der einfachen Ringe in eine obere und eine untere Klasse mindestens ein Radikalbegriff, der für Ringe mit Minimalbedingung in den klassischen Radikalbegriff übergeht. Im Falle assoziativer Ringe lassen sich noch weitergehende Aussagen machen. Die bisher in der Literatur aufgetretenen Radikalbegriffe erscheinen so als nur einige aus einer Fülle von Möglichkeiten; sie werden in ihrem gegenseitigen Verhältnis untersucht.

R. Kochendörffer.

Levitzki, Jakob: On the structure (of algebraic algebras and related rings). Trans. Amer. math. Soc. 74, 384—409 (1953).

Ein I -Ring ist ein Ring, in dem jedes Rechtsideal, das kein Nilideal ist, ein Idempotent $\neq 0$ enthält. Er heißt voll, wenn er keine nilpotenten Elemente enthält. Ein voller Ring ist halbeinfach im Sinn von Jacobson. Ist a nilpotent vom Index n im I -Ring S und a^{n-1} nicht im Radikal von S , so enthält das Ideal (a) ein System von n^2 Matrixeinheiten e_{ik} . Ist der Ring $T = e_{11} S e_{11}$ voll und $\sum e_{ii}$ im Zentrum von S , so bilden alle n -reihigen Matrizen über T ein zweiseitiges Ideal in S . Ein solches Ideal, das voller Matrizenring $M_n(T)$ über einem vollen I -Ring T ist, heißt Matrixideal. Ein Ring S heißt schwach reduzibel, wenn jedes Ideal $A \neq 0$ aus S/N' , N' das maximale Nilideal von S , ein Matrixideal enthält. Ein voller I -Ring ist schwach reduzibel. Ist S schwach reduzibel, so ist S/N' ein halbeinfacher I -Ring und subdirekte Summe von vollen Matrizenringen über vollen Ringen. S/N' ist primitiv dann und nur dann, wenn es Matrizenring über einem Schiefkörper ist. Besitzt ein Ring zwei Darstellungen $M_n(T)$ und $M_m(T')$ als Matrizenring über vollen I -Ring T, T' , so ist stets $n = m$. Der Grad eines Matrixideals ist damit eindeutig definiert. Ist S ein I_1 -Ring, d. h. ein I -Ring, in dem das Supremum $i(S)$ der Indizes der nilpotenten Elemente endlich ist, und ist S halbeinfach, so ist S schwach reduzibel, und der maximale Grad der Matrixalgebren ist $i(S)$. Ein I -Ring heißt I_2 -Ring, wenn jedes S/P , P primitives Ideal in S , beschränkten Index $i(S/P)$ hat. Ein I -Ring heißt I_3 -Ring, wenn jedes S/P eine Polynomidentität erfüllt. Es gilt nun, daß alle halbeinfachen I_2 - und I_3 -Ringe schwach reduzibel sind. Ein Ring S heißt elementar, wenn er die Summe seiner Matrixideale ist, pseudoelementar, wenn er halbeinfach ist und wenn S/M , M die Summe aller Matrixideale, ein Nilring ist. Ein Ideal A eines Ringes S besitzt eine pseudoelementare Kette $\{A_\sigma\}$, wenn die A_σ , $\sigma \leq \tau$, eine wohlgeordnete aufsteigende Kette von Idealen in S bilden mit $A_0 = 0$, $A_\tau = A$, so daß $A_{\sigma+1}/A_\sigma$ stets pseudoelementar ist und für Limeszahlen σ $A_\sigma / \bigcup_{\rho < \sigma} A_\rho$ ein Nilring

ist und A/A_σ keine von Null verschiedenen Nilideale besitzt. Ein Ring, der eine pseudoelementare Kette besitzt und keine von Null verschiedenen Nilideale enthält, ist halbeinfach und schwach reduzibel. Ein I -Ring heißt treu, wenn jedes homomorphe Bild wieder ein I -Ring ist. Ist S treu und hat es endlichen Index $i(S)$, so hat jedes homomorphe Bild S' einen Index $i(S') \leq i(S)$. Ein voller treuer I -Ring ist nichts anderes als ein streng regulärer Ring im Sinn von Kaplansky (d. h. zu jedem $a \in S$ gibt es ein b mit $a = a^2 b$). Ein pseudoelementarer Ring S ist ein treuer I -Ring dann und nur dann, wenn jedes Matrixideal von S Matrizenring über einem streng regulären Ring ist. Ein solcher Ring heißt streng pseudoelementar; pseudoelementare Ketten, deren $A_{\sigma+1}/A_\sigma$ streng pseudoelementar sind, heißen ebenfalls streng pseudoelementar. Es gilt der Struktursatz: Ein halbeinfacher Ring S besitzt dann und nur dann eine streng pseudoelementare Kette, wenn er ein treuer I_2 -Ring ist. Weitere solche Struktursätze für reguläre Ringe und halbeinfache treue I_1 -Ringe. — Eine Subalgebra B einer Algebra A über dem Körper C heißt lokal-finit, wenn jeder endliche C -Modul aus B eine Algebra endlichen Ranges in B erzeugt. Die Summe aller lokal-finiten Rechtsideale von A ist wieder lokal-finit und ist das maximale zweiseitige lokal-finite Ideal von A ; es heißt der lokal-finite Kern $K(A)$ von A . $A/K(A)$ hat den lokal-finiten Kern 0. Mit diesem Begriff werden Ergebnisse von Kaplansky zum Kuroschschen Problem neu bewiesen, z. B. daß jede algebraische Algebra, die einer Polynomidentität genügt, lokal-finit ist.

G. Köthe.

Zemmer, Joseph L.: Ordered algebras which contain divisors of zero. *Duke math. J.* **20**, 177—183 (1953).

Sei A eine im Sinne von G. Birkhoff (*Lattice Theory*, Rev. ed., New York 1948, p. 227; dies. Zbl. **33**, 101) geordnete irreduzible, nicht nilpotente Algebra endlicher Dimension über einem Körper F . Das Radikal N von A sei nicht leer. Dann ist $A = B + eNe + U$, wobei B ein Unterkörper von A mit der Einheit e und U die Menge der x mit $xe = 0$ oder $ex = 0$ ist. A hat dann eine Rechts- oder Linkseinheit, ferner eNe bzw. U eine Rechts- und (bzw. oder) eine Linksbasis über B . Sind $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ Elemente aus B bzw. eNe bzw. U , dann ist $|x| \cdot |y| \cdot |z|$. Ist B eine normale Erweiterung von F oder ist F archimedisch geordnet, dann sind die Elemente aus B mit denen aus eNe vertauschbar. — Abschließend Bemerkungen über das Problem, eine nilpotente Algebra zu ordnen. Gert H. Müller.

Campbell, H. E.: Concerning Cartan's criterion. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 515—518 (1953).

Es seien L eine Liesche Algebra über einem Körper F der Charakteristik 0 und L' die abgeleitete Algebra. $t(R_x)$ bezeichne die Spur der Rechtsmultiplikation R_x mit $x \in L$. Das Radikal einer Lieschen Algebra ist nach Harish-Chandra (dies. Zbl. **36**, 298) die Menge aller Elemente $x \in L$, so daß $t(R_x R_y) = 0$ für alle $y \in L'$ gilt, jedoch nicht notwendig, wie im Falle einer assoziativen Algebra, die Menge aller $x \in L$ mit $t(R_x R_y) = 0$ für alle $y \in L$. Der folgende Satz 1 stellt den Zusammenhang mit dem assoziativen Fall her: Sei $L = S + N$ die Levi'sche Zerlegung von L , wobei N das Radikal und S halbeinfach (oder gleich Null) seien. Dann gibt es eine Liesche Algebra $A = S_K + R$ über einer algebraischen Erweiterung K von F , deren Radikal R das Radikal N von L enthält und aus allen Elementen $x \in A$ besteht, so daß $t(R_x R_y) = 0$ für alle $y \in A$ gilt. — Ein entsprechender Satz besteht auch für eine treue Darstellung einer Lieschen Algebra. Satz 2: L besitzt eine treue Darstellung $x \rightarrow Q_x$ mit Matrixelementen aus einer algebraischen Erweiterung K von F , bei der genau die Elemente $x \in N$ der Gleichung $t(Q_x Q_y) = 0$ für alle Elemente $y \in L$ genügen. — Der Beweis beider Sätze gründet sich auf das erwähnte Ergebnis von Harish-Chandra. F. Kasch.

Leger jr., George F.: A note on the derivations of Lie algebras. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 511—514 (1953).

Es sei L eine Liesche Algebra über einem Körper der Charakteristik 0. Sind V und W Unteralegebren von L und gilt $L = V + W, V \cap W = 0$, so heißt L spaltbar über V . Die Ableitungen von L bilden (bei Liescher Multiplikation) eine Liesche Algebra $D(L)$, in der die inneren Ableitungen von L ein zweiseitiges Ideal $I(L)$ darstellen. Unter diesen Voraussetzungen wird der folgende Satz bewiesen: Sei R das Radikal von L ; wenn dann $D(R)$ spaltbar über $I(R)$ ist, so ist auch $D(L)$ spaltbar über $I(L)$. — Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Harish-Chandra (dies. Zbl. **36**, 298). — Zum Schluß wird eine nilpotente Liesche Algebra angegeben, bei der $D(L)$ nicht spaltbar über $I(L)$ ist. Dies ist im Zusammenhang mit der offenen Frage von Interesse, ob von vorstehendem Satz auch die Umkehrung gilt. F. Kasch.

Murakami, Shingo: Supplements and corrections to my paper: „On the automorphisms of a real semi-simple Lie algebra“. *J. math. Soc. Japan* **5**, 105—112 (1953).

This paper is devoted to freeing the results obtained by the author in the paper named in the title (this Zbl. **47**, 35) from the theorems of Gantmacher used there. Some minor errors in that paper are corrected. P. M. Cohn.

Klingenberg, Wilhelm: Sopra il numero degli ordinamenti di un corpo. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **14**, 395—396 (1953).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Besitzt der Körper K genau n (≥ 1) verschiedene Anordnungen und sind diese sämtlich archimedisch, so hat in der multi-

plikativen Gruppe von K die Untergruppe der Quadratsummen den Index 2^n . Bei der weiteren Behauptung, daß dieser Satz auch im Fall $n = 0$ richtig bleibt, wurde versehentlich die unbedingt erforderliche Voraussetzung „Charakteristik $\neq 2$ “ vergessen.

G. Pickert.

Krull, Wolfgang: Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs. J. reine angew. Math. 191, 54—63 (1953).

Verf. beabsichtigt einerseits, die Theorie der von Barbilian (dies. Zbl. 41, 169) verallgemeinerten Normalkörper in weiten Kreisen bekannt zu machen, und andererseits, sie weiter zu entwickeln. Ein kommutativer, nicht notwendig algebraischer Oberkörper L von K heißt über K normal, wenn für jeden Zwischenkörper M von L/K die algebraisch abgeschlossene Hülle M^* von M in L (d. h. M^* besteht aus allen und nur den über M algebraischen Elementen aus L) im üblichen Sinne über M normal ist. Ersichtlich ist ein algebraisch abgeschlossener Körper stets normal über einem beliebigen Unterkörper. Ist ein kommutativer Körper L über einem Körper K transzendent, so existiert bekanntlich ein Zwischenkörper T von L/K derart, daß T über K rein transzendent und L über T algebraisch ist. Die Körperkette $K \subset T \subseteq L$ heißt eine Steinitzsche Zerlegung von L/K . Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine transzendente Erweiterung L von K über K normal sei, ist a): bei jeder Steinitzschen Zerlegung $K \subset T \subseteq L$ ist L über T algebraisch normal; oder b): bei beliebiger Vorgabe endlich vieler über K algebraisch unabhängiger Elemente t_1, \dots, t_n und eines beliebigen weiteren Elementes a aus L ist der kleinste a enthaltende algebraische Normaloberkörper von $K(t_1, \dots, t_n)$ Unterkörper von L . Ist $K \subset T \subseteq N$ eine Steinitzsche Zerlegung eines über K transzendenten, normalen Oberkörpers N , so ist N stets eine unendliche algebraische Erweiterung von T . Ein Oberkörper L über K heißt ein Dedekindscher Oberkörper von K , wenn jeder Zwischenkörper M von L/K durch die ihm zugehörige Untergruppe aus der ganzen Automorphismengruppe von L/K eindeutig bestimmt ist. Bei Primzahlcharakteristik ist jeder Dedekindsche Oberkörper von K über K algebraisch; bei Charakteristik 0 ist L dann und nur dann ein Dedekindscher Oberkörper von K , wenn L über K normal ist. Aus der obigen Tatsache folgt ein wichtiges Ergebnis: Für eine Erweiterung L über K gilt dann und nur dann der Hauptsatz der Galoisschen Theorie, wenn L über K endlich algebraisch, separabel und normal ist. Ist L über K normal, so ist ein Zwischenkörper M von L/K über K normal, wenn die M zugehörige Untergruppe aus der ganzen Automorphismengruppe von L/K ein Normalteiler ist. Diese Tatsache läßt sich aber im allgemeinen nicht umkehren; vielmehr beweist Verf. folgende Tatsache: Sind K und $L(\subset K)$ beide algebraisch abgeschlossen, so ist für jeden echten Zwischenkörper von L/K die ihm zugehörige Untergruppe kein Normalteiler der ganzen Automorphismengruppe von L/K . Obwohl Verf. eine Methode angibt, über einem abzählbaren Körper K einen nichtalgebraischen normalen Körper zu konstruieren, bleibt doch eine wichtige Frage offen, ob es überhaupt einen Körper gibt, über dem ein nicht algebraisch abgeschlossener, transzendenter Normaloberkörper existiert. Existieren solche nicht trivialen Normalkörper, so gibt es zwei wichtige Fragen, welche schwer zu beantworten sind: A) Es sei N ein Normaloberkörper von K und M ein beliebiger Zwischenkörper von N/K . Läßt sich dann immer jeder Isomorphismus von M über K auf einen Unterkörper von N zu einem Automorphismus von N/K erweitern? B) Kann man die einem Zwischenkörper von N/K (N ist normal über K) zugehörige Untergruppe der ganzen Automorphismengruppe von N/K irgendwie genauer charakterisieren?

M. Moriya.

Lenz, Hanfried: Über endliche Automorphismengruppen unendlicher Körpererweiterungen. Arch. der Math. 4, 100—106 (1953).

Verf. gibt charakteristische Beispiele zur Untersuchung der Automorphismen endlicher Ordnung von unendlichen algebraischen Erweiterungen. 1. Ist K_p der Körper, welcher aus dem rationalen Zahlkörper durch Adjunktion aller p -ten Einheitswurzeln ($v = 1, 2, \dots$; p ist eine Primzahl) entsteht, so ist die Ordnung einer endlichen Automorphismengruppe von K_p für ungerades p ein Teiler von $p - 1$, für $p = 2$ ein Teiler von 2. 2. Eine algebraische Erweiterung K eines Körpers k heißt idealzyklisch, wenn jeder Teilkörper von K endlichen Grades über k stets über k zyklisch ist. Besitzt dabei die Steinitzsche Gradzahl von K nach k keinen p -Beitrag (p ist eine Primzahl) mit einem endlichen, positiven Exponenten, so heißt K rein-unendlich über k . Entsteht ein Körper K aus einem Grundkörper k durch eine wohlgeordnete Folge von rein-unendlichen idealzyklischen Erweiterungen und Vereinigungskörperbildung, so existiert außer der Identität kein Automorphismus endlicher Ordnung von K über k . 3. Ein Element a aus einem Körper K heiße eine p -te (p ist eine Primzahl) Wurzel von K , wenn es einen Teilkörper U von K mit $a^p \in U$ und $a \notin U$ gibt. Ein Körper K enthalte die $2p$ -ten Einheitswurzeln, und für eine beliebige p -te Wurzel a von K sei die Gleichung $x^p = a$ stets in K lösbar. Dann ist die Ordnung einer endlichen Gruppe von Automorphismen von K im Falle $p > 2$ niemals durch p , im Falle $p = 2$ niemals durch 4 teilbar. Aus der obigen Tatsache folgt: Hat eine Kollineation C eines projektiven Raumes über quadratisch abgeschlossenem Koordinatenkörper von der Charakteristik 0 die Eigenschaft, daß die 2^h -te Potenz von C mit irgendeinem $h > 0$ die Doppelver-

hältnisse fest läßt, so läßt bereits C^2 die Doppelverhältnisse fest. 4. Ein Körper K habe die Eigenschaft, daß jedes Element aus K in einem Teilkörper liegt, der aus einem festgelegten Grundkörper k durch eine endliche Kette von Erweiterungen höchstens n -ten Grades entsteht. Dann besitzt K keinen Automorphismus über k von der Primzahlordnung $> n$. *M. Moriya.*

Dürbaum, Hansjürgen: Zur Theorie der nichtkommutativen Bewertungen. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 418—422 (1953).

If H is a fully ordered group and if G is a subgroup containing some non-trivial power $h^{n(h)}$ of every element $h \in H$, and if the derived group G' is bounded, then so is the derived group H' . This is proved by a simple and elegant argument using a result of B. H. Neumann (this Zbl. **31**, 342). Let now K' be an algebraic extension of a skew field K , that is a skew field every element of which satisfies an algebraic equation with coefficients in K , the coefficients being all on the left or all on the right of the powers of the variable. Let q' be a valuation [in the sense of O. F. G. Schilling, *Bull. Amer. math. Soc.* **51**, 297—304 (1945)] of K' and q its restriction to K . With the help of the theorem stated in the beginning it is proved that if q has one of the following three properties P_1, P_2, P_3 , then q' has the same property; q has P_1 if it is abelian, that is if it has abelian value group; q has P_2 if it is topologically equivalent to an abelian valuation; q has P_3 if its topology has a basis of neighbourhoods which are self-conjugate in the multiplicative group of the skew field. The first of these three theorems extends a result of Schilling (op. cit.). *B. H. Neumann.*

Fleischer, Isidore: Sur les corps topologiques et les valuations. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1320—1322 (1953).

Il est démontré que la condition (V) due à Bourbaki (Topologie générale, chap. III, Groupes topologiques, p. 57, Paris 1942) et à Kaplansky (ce Zbl. **30**, 10), nécessaire pour que la topologie d'un corps puisse être définie par une valuation, est aussi, avec des hypothèses supplémentaires naturelles, suffisante. *Autoreferat.*

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Dénes, Peter: Proof of a conjecture of Kummer. *Publ. math., Debrecen* **2**, 206—214 (1953).

Es sei p eine ungerade Primzahl, ζ eine primitive p -te Einheitswurzel und R_p der Kreisteilungskörper, welcher aus dem rationalen Zahlkörper R durch Adjunktion von ζ entsteht. Dann läßt sich eine ganze Zahl q aus R_p als Polynome von ζ mit ganzen rationalen Koeffizienten darstellen; ein derartiges Polynom soll mit $q(\zeta)$ bezeichnet werden. Verf. beweist folgenden Satz, welcher von E. Kummer ohne Beweis angegeben worden ist: Es seien q_1, q_2 zu p prime ganze Zahlen aus R_p , welche der Kongruenz $q_1 \equiv q_2 \pmod{p^{n+1}}$ genügen, wo n eine nichtnegative ganze rationale Zahl ist. Ist dann k eine nicht durch $p-1$ teilbare, natürliche Zahl, so gilt

$$D_{kp^n} \log q_1(e^v) \equiv D_{kp^n} \log q_2(e^v) \pmod{p^{n+1}}.$$

Dabei bezeichnet $D_m \log q(e^v)$ den Wert der m -ten Ableitung von $\log q(e^v)$ in bezug auf v in $v=0$, e die Basis des natürlichen Logarithmus und $q(e^v)$ das Polynom, welches sich aus $q(\zeta)$ durch Einsetzung $\zeta = e^v$ ergibt. *M. Moriya.*

Flanders, Harley: Generalization of a theorem of Ankeny and Rogers. *Ann. of Math., II. Ser.* **57**, 392—400 (1953).

Let k be an algebraic number field, v the largest natural number such that $\cos(2\pi/2^v)$ is in k , and n any natural number. Generalizing a result of Trost (this Zbl. **9**, 298), the author proves that if a is a non-zero element of k such that the congruence $X^n \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$ is solvable for all prime divisors \mathfrak{p} of k except for a set of Dirichlet density zero, then either (I) $a = b^n$ for some b in k or (II) $2^{v+1} | n$, neither i nor $i \cos(2\pi/2^{v+1})$ is in k , and $a = b^n \{2 + 2 \cos(2\pi/2^v)\}^{n/2}$ for some b in k . Conversely, he shows that if (II) is satisfied with b integral, then the congruence $X^n \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$ is solvable for all prime divisors \mathfrak{p} of k . *P. T. Bateman.*

Dufresnoy, Jacques et Charles Pisot: Sur un point particulier de la solution d'un problème de M. Siegel. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 30—31 (1953).

Eine Ergänzung zu einer früheren Note der Verff. (dies. Zbl. **47**, 275).

F. Kasch.

Samet, P. A.: Algebraic integers with two conjugates outside the unit circle. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 421—436 (1953).

Es sei S_1 die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen (g. a. Z.) ϱ , für welche alle Konjugierten, außer ϱ , in $E: |z| < 1$ liegen (ϱ ist dann reell). S_2 sei die Menge aller Paare konjugierter g. a. Z. ϱ, σ ($\varrho \neq \sigma$), so daß alle ihre algebraischen Konjugierten außer ϱ, σ in E liegen. S_2 kann in die zwei Teilmengen S_2', S_2'' zerlegt werden, wo S_2' die Menge der reellen ϱ, σ ist, S_2'' die Menge der komplexen ϱ, σ mit $\varrho = \sigma$ ist. T_1 ist Menge der g. a. Z. τ , so daß alle anderen algebraischen Konjugierten von τ in $E': |z| \leq 1$ sind und mindestens eine von ihnen auf $F: |z| = 1$ liegt. T_2 ist Menge der g. a. Z., welche zwei algebraische Konjugierte in $|z| > 1$ haben, während die anderen in E' liegen und mindestens eine von ihnen auf F liegt. T_2 wird analog wie S_2 in die Mengen T_2', T_2'' zerlegt. Die Mengen S_1, T_1 wurden von Salem eingeführt. Bekannt ist: S_1 ist eine abgeschlossene Menge (Salem) und besitzt im Intervall $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ keine Häufungspunkte (C. L. Siegel). $S_1 \cup S_2''$ ist abgeschlossen (Kelly), besitzt aber keine Häufungspunkte auf F (Kelly). S_2' ist natürlich nicht abgeschlossen. Verf. zeigt nun unter anderem: Die Zahlen von S_2'' , welche reziproke biquadratische Einheiten θ , sind [d. h. θ genügt einer irreduziblen Gleichung $z^4 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$ (Koeff. ganzzahlig), so daß $1/\theta$ Konjugierte von θ ist] sind Häufungspunkte von S_2'' , also auch von $S_1 \cup S_2''$. Ein analoges Resultat für S_1 , daß nämlich die reziproken quadratischen Einheiten von S_1 , Häufungspunkte von S_1 sind, wurde von Vijayaraghavan (dies. Zbl. 28, 113) bewiesen. Weiter wird bemerkt, daß jede positive Zahl aus S_1 die Gestalt $-\lambda^2$ ($\lambda \in S_2''$) hat. Da nach C. L. Siegel die positive Nullstelle ϱ von $x^2 - x - 1 = 0$ Häufungspunkt von S_1 ist, so sind also $\pm i\sqrt{\varrho}$ Häufungspunkte von S_2'' . Da weiter die kleinste Zahl von S_1 die positive Nullstelle σ von $x^3 - x - 1 = 0$ ist, so gehören auch $\pm i\sqrt{\sigma}$ zu S_2'' . Das Hauptkapitel der Arbeit beschäftigt sich mit der Menge T_2'' . Klarerweise ist jedes $\theta \in T_2''$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $P(z)$, welches reziprok sein muß. Da genau zwei Nullstellen von $P(z)$ außerhalb F liegen, so liegen genau zwei innerhalb. Alle anderen liegen am Rande, und keine von diesen ist eine Einheitswurzel. Es ist θ eine Einheit von geradem Grad ≥ 6 . Es wird gezeigt: Es sei θ eine komplexe Zahl, so daß $|\theta| > 1, \theta \neq \bar{\theta}$. Es soll ein $\mu \neq 0$ geben, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu \theta^n + \mu \bar{\theta}^n) z^n = \Sigma$ in E einen nach oben beschränkten Realteil besitzt und nicht zur Hardyschen Klasse H^2 gehört. [Eine Funktion $f(z)$ regulär in E gehört zu H_2 , wenn $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi$ beschränkt ist, für $r \rightarrow 1 - 0$. Besitzt $f(z)$ eine endliche Anzahl von Polen z_1, \dots, z_n in $|z| < 1$ mit Hauptteilen $P_1(z), \dots, P_n(z)$, so gehört $f(z)$ zu H^2 , wenn dies für $f(z) - \sum_{i=1}^n P_i(z)$ gilt.] Dann ist θ eine algebraische ganze Zahl aus T_2'' und μ eine algebraische Zahl aus $R(\theta)$ (R Körper der rationalen Zahlen). Umgekehrt: Ist $\theta \in T_2''$, $\mu \in R(\theta)$, so besitzt die Reihe Σ in E einen nach oben beschränkten Realteil und gehört nicht zu H^2 . Weiter gilt: Jede Zahl aus $S_1 \cup S_2''$ ist Häufungspunkt der Menge T_2'' . Es gibt daher in T_2'' Zahlen von beliebig hohem (geradem) Grad. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $2k$ über R und $T_2''(K)$ die Menge der θ aus T_2'' , welche in K liegen und vom Grad $2k$ sind. Ist nun θ_1 aus $T_2''(K)$ mit minimalem $|\theta_1|$ und ist θ beliebig aus $T_2''(K)$, so gilt stets $\theta = \zeta \theta_1^m$, wo $m \geq 0$ ganz und ζ Einheitswurzel (möglicherweise ± 1) aus K ist. Daraus folgt sofort: Aus $\theta \in T_2''(K)$, $\theta_1 \in T_2''(K)$ folgt sofort, daß es ein ganzes $p \neq 0$ gibt, so daß θ^p reell ist. Ist $\theta \in T_2''(K)$ und θ^p reell für ein ganzes $p > 0$, dann ist der Grad von K mindestens durch 4 teilbar; also notwendig dafür, daß für ein $\theta \in T_2''$ θ^p für ein ganzes $p > 0$ reell ist, ist, daß θ von einem Grad $4k_1$ ist.

E. Hlawka.

Carlitz, L.: Note on a conjecture of André Weil. Proc. Amer. math. Soc. 4, 5—9 (1953).

A. Weil (dies. Zbl. 32, 394) hat folgende Vermutung ausgesprochen: Sei V eine singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension n über einem endlichen Körper Ω von q Elementen, und sei N_m die Anzahl der über dem endlichen Körper $\Omega^{(m)}$ von q^m Elementen rationalen Punkte von V . Dann wird durch $\sum_{m=1}^{\infty} N_m u^m - u \frac{d}{du} Z(u)$ eine rationale Funktion $Z(u) = [P_1(u) P_3(u) \cdots P_{2n-1}(u)] / [P_0(u) P_2(u) \cdots P_{2n}(u)]$ mit $P_0(u) = 1 - u, P_2(u) = 1 - q^n u$, im übrigen $P_p(u) = \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i u), |\alpha_i|^2 = q^r$ definiert, die einer Funktionalgleichung vom Typus $Z(q^{n/2} u^{-1}) = \pm u^k Z(q^{-n/2} u)$ genügt. — Verf. fügt den von Weil angegebenen Spezialfällen, in denen die Anzahlen N_m explizit bestimmbar sind und seine Vermutung zutrifft, einige weitere hinzu. 1. Sei V definiert durch $Q(x_1, \dots, x_s) = a$ mit einer quadratischen Form Q von s Unbestimmten x_1, \dots, x_s , der Diskriminante $d \neq 0$, bei Char. $\Omega \neq 2$.

Er zeigt, daß dann die Weilsche Vermutung zutrifft, und zwar im homogenen Fall $a = 0$ mit der Zetafunktion $Z(u) = \prod_{r=0}^{2t-1} (1 - q^r u)^{-1}$ und $k = 2t$, wenn $s = 2t + 1$ ungerade, $Z(u) = (1 - \delta q^t u)^{-1} \prod_{r=0}^{2t-2} (1 - q^r u)^{-1}$ und $k = 2t - 2$, wenn $s = 2t$ gerade, wo δ den quadratischen Charakter von $(-1)^t d$ in Ω bedeutet. Der inhomogene Fall $a \neq 0$ kann durch Betrachtung der Mannigfaltigkeit $Q(x_1, \dots, x_t) = a x_{t+1}^2$ auf den homogenen Fall zurückgeführt oder analog zu diesem direkt behandelt werden. 2. Für die durch eine Gleichung der Form $\sum_{i=1}^t a_i x_i^e y_i^f$ definierte Mannigfaltigkeit V erweisen sich die Anzahlen N_m bei teilerfremden Exponenten e, f als identisch mit denen für $Q(x_1, \dots, x_{2t}) = 0$ (bei Char. $\Omega = 2$), so daß auch hier die Weilsche Vermutung zutrifft, trotzdem V nur für $e = 1, f = 1$ singularitätenfrei ist. Sind e, f nicht teilerfremd, so lassen sich zwar ebenfalls die Anzahlen N_m elementar bestimmen, aber die zugeordnete Zetafunktion fällt komplizierter aus. Für eine Grundgleichung der Form $\sum_{i=1}^t a_i x_i^e y_i^f z_i^g = 0$ mit teilerfremden Exponenten e, f, g findet Verf. die Weilsche Vermutung nicht erfüllt. 3. Dagegen stellt er ihr Erfülltsein für den Fall fest, daß V durch eine homogene quadratische Gleichung $Q(U_1, \dots, U_{2t}) = 0$ in einer geraden Anzahl $2t$ von Polynomen U_1, \dots, U_{2t} einer Unbestimmten über Ω von Graden $\leq r$ definiert ist; für diesen Typus von Grundgleichung sind die Anzahlen N_m durch Cohen (dies. Zbl. 30, 104) bekannt. H. Hasse.

Zahlentheorie:

Cugiani, Marco: Sull'aritmetica additiva dei polinomi e degli interi liberi da potenze. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 74—76 (1953).

Pellegrino, Franco: Sviluppo moderni del calcolo numerico integrale di Michele Cipolla. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 161—168 (1953).

This lecture gives a discussion of a certain domain of integrality I and its quotient field K , in connection with the work by M. Cipolla on the „calcolo aritmetico-integrale“ [Atti Accad. Gioenia Sci. natur. Catania, V. Ser. 8 (1915)] and more recent work by S. Amante (this Zbl. 17, 296). I is essentially the ring of all formal Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$. K. Mahler.

Rivier, William: A propos de la résolution en nombres entiers de l'équation à coefficients entiers $rx + sy = m$. Bull. Sci. math., II. Sér. 77, 51—55 (1953).

In der diophantischen Gleichung $(1) rx + sy = m$ sei $r > s > 0$, $(r, s) = 1$. Ferner sei $k > 0$, ganz. Liegt m im Intervall $(krs, krs + rs - 1)$, so hat die Gleichung (1) im allgemeinen $k + 1$ Lösungen, in $(r - 1)(s - 1) / 2$ Fällen aber nur k Lösungen in nicht negativen, ganzen Zahlen. (Vgl. auch Duparc und Peremans, dies. Zbl. 50, 269.) N. Hofreiter.

Moser, Leo: On the Diophantine equation $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (m - 1)^n = m^n$. Scripta math. 19, 84—88 (1953).

Die Gleichung $(1) 1^n + 2^n + \dots + (m - 1)^n = m^n$ hat vermutlich nur die eine ganzzahlige Lösung: $1 + 2 = 3$. Hier wird gezeigt: Falls eine Lösung mit $n > 1$ existiert, so ist $m > 10^{1000000}$. Der Beweis ergibt sich auf einfache Art: Die Gleichung (1) wird mit verschiedenen Moduln geprüft und dabei ergeben sich Einschränkungen für m und n . N. Hofreiter.

Duparc, H. J. A. and A. van Wijngaarden: A remark on Fermat's last theorem. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 123—128 (1953).

Verff. verschärfen numerische Schranken bezüglich des 1. Falles für das Fermatproblem ($x^n + y^n = z^n$, $p \mid xyz$, p Primzahl > 2). Unter Verwendung bekannter Sätze zeigen Verff. $z > \frac{1}{2} (p^3 / (3 + \log 2 p) - p)^n$. Da im 1. Fall bekanntlich $p < 253747889$ ist, ergibt sich hieraus $z > 10^{6 \cdot 10^9}$, $z^n > 10^{1.5 \cdot 10^{18}}$. H. Ostmann.

Carlitz, L.: A theorem on congruences. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 43—45 (1953).

$f(x)$ sei ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Diskriminante D . Ist $f(x) \equiv 0 \pmod{p^r}$ lösbar für $r = \delta + 1$, wobei $p^\delta \mid D$, $p^{\delta+1} \nmid D$, so ist die obige Kongruenz lösbar für alle r . Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren von K. Hensel (Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1908). Er wird vom Verf. auf einfacherem Wege bewiesen, indem zunächst der folgende Satz hergeleitet wird: a genüge der Kongruenz $f(x) \equiv (x-a)g(x) \pmod{p^{\delta+1}}$, worin $g(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeute. Sei $p^r \nmid f'(a)$, $p^{r+1} \nmid f'(a)$. Dann gilt $2\tau \leq \delta$.

H. J. Kanold.

Carlitz, L.: A theorem of Stickelberger. Math. Scandinav. 1, 82–84 (1953).

Verf. gibt einen einfachen Beweis des folgenden Satzes, der in einem allgemeineren von L. Stickelberger [Verhdl. I. internat. Math. Kongr. Zürich 1897, 182–193 (1898)] enthalten ist: Es sei $D \equiv 1 \pmod{2}$ die Diskriminante von $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_r . Ferner sei $f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_s(x) \pmod{2}$, wobei die $f_i(x)$ irreduzibel $\pmod{2}$ seien. Dann gilt $D \equiv 3 \pm 2 \pmod{8}$ und $(-1)^{n-s} = \mp 1$.

H. J. Kanold.

Carlitz, L.: Note on a theorem of Glaisher. J. London math. Soc. 28, 245–246 (1953).

Es sei $\prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = \sum_{r=0}^{p-1} A_r x^{p-r-1}$. J. W. L. Glaisher [Quart. J. Math. 31, 1–35 und 321–353 (1900)] bewies $\frac{1}{2} p(p-r) A_{r-1} \equiv A_r \pmod{p^4}$ für jedes ungerade $r > 3$ und jede Primzahl $p > 5$. In der vorliegenden Note wird diese Kongruenz zu einer $\pmod{p^5}$ verschärft.

H. J. Kanold.

Carlitz, L.: Some congruences for Bernoulli numbers of higher order. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 112–115 (1953).

Für $B_m^{(k)}$, die Bernoullischen Zahlen der Ordnung k , definiert durch $\left(e^t - 1\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_m^{(k)}$, $|t| < 2\pi$, hat Verf. früher (dies. Zbl. 46, 40) in Verschärfung eines Ergebnisses von S. Wachs (dies. Zbl. 38, 25) (p bezeichne durchweg eine Primzahl) $B_{p+2}^{(p+1)} \equiv 0 \pmod{p^3}$, $p > 3$, und $B_p^{(p)} \equiv \frac{1}{2} p^2 \pmod{p^3}$, $p \geq 3$, bewiesen. Jetzt werden diese Kongruenzaussagen unter Heranziehung zweier Formeln von Glaisher und Nörlund zu $B_{p+2}^{(p+1)} \equiv \frac{1}{6} p^3 \pmod{p^4}$, $p \geq 5$, bzw. $B_p^{(p)} \equiv -\frac{1}{2} p^2 (p-1)! \pmod{p^5}$, $p \geq 5$, verbessert.

H.-E. Richert.

Carlitz, L.: Some sums connected with quadratic residues. Proc. Amer. math. Soc. 4, 12–15 (1953).

Es bezeichne $B_k(x)$, $E_k(x)$ die Bernoullischen bzw. Eulerschen Polynome, p eine Primzahl, $m = \frac{p-1}{2}$, $\sum = \sum_{h=1}^m$. Bewiesen werden

$$(-1)^{k+1} \sum \left(\frac{h}{p}\right) B_{2k+1}\left(\frac{h}{p}\right), \quad (-1)^k \sum \left(\frac{h}{p}\right) E_{2k}\left(\frac{2h}{p}\right) > 0 \quad (4 \mid p+1, k \geq 0),$$

$$(-1)^{k+1} \sum \left(\frac{h}{p}\right) B_{2k}\left(\frac{h}{p}\right), \quad (-1)^k \sum \left(\frac{h}{p}\right) E_{2k-1}\left(\frac{2h}{p}\right) > 0 \quad (4 \mid p-1, k \geq 1).$$

Diese Sätze sind ein Gegenstück zum Satz $\sum \left(\frac{h}{p}\right) > 0 \quad (4 \nmid p+1)$ von Dirichlet, den Moser (dies. Zbl. 45, 20) unlängst sehr kurz bewiesen hat. Für weitere Ungleichungen ähnlicher Natur s. Whiteman (dies. Zbl. 35, 310). Die Beweise sind analytisch, aber leicht, beruhen auf den bekannten trigonometrischen Reihen für $B_k(x)$, $E_k(x)$.

L. Rédei.

Goldberg, Karl: A table of Wilson quotients and the third Wilson prime. J. London math. Soc. 28, 252–256 (1953).

Die Wilson-Quotienten W_p sind definiert als die kleinsten nicht negativen Reste modulo p von $[(p-1)! + 1]/p$, wobei p eine Primzahl ist. Ist $W_p = 0$, so heißt p

eine Wilson-Primzahl. Die bisher bekannten Wilson-Primzahlen waren 5 und 13. In der vorliegenden Tafel werden die Werte von W_p für alle $p < 10^5$ angegeben. Dabei zeigt sich, daß $p = 563$ die dritte Wilson-Primzahl ist. D. Wall errechnete W_p für $p < 5000$. Seine Werte stimmen vollständig mit denen des Verf. überein.

H. J. Kanold.

Misra, B.: On Bose numbers. Amer. math. Monthly **60**, 319–322 (1953).

Die „Bose-Zahl“ b und die „End-Zahl“ e sind die kleinsten natürlichen Zahlen, die für eine zu 10 teilerfremde natürliche Zahl n die Gleichung $ne = 10b - 1$ befriedigen. Aus b und e wird die Periode eines echt gebrochenen Bruches m/n in einfacher Weise berechnet.

H. J. Kanold.

Touchard, Jacques: On prime numbers and perfect numbers. Scripta math. **19**, 35–39 (1953).

Triviale Folgerungen aus der van der Pol'schen Beziehung (dies. Zbl. **42**, 273) $n^2(n-1) \sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} (3n^2 - 10k^2) \sigma_k \sigma_{n-k}$, in der σ_k die Summe aller Teiler von k , einschließlich 1 und k , bedeutet. Die Resultate über vollkommene Zahlen können auf anderem Wege sofort elementar hergeleitet werden.

H. J. Kanold.

Hall, James S.: A remark on the primeness of Mersenne numbers. J. London math. Soc. **28**, 285–287 (1953).

Die Methode von E. Lucas [Amer. J. Math. **1**, 289–321 (1878)], durch geeignete Folgen zu entscheiden, ob $2^p - 1$ eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, wird vom Verf. etwas abgewandelt. Das Hauptergebnis ist der folgende Satz: Dann und nur dann ist $N = 2^p - 1$ eine Primzahl ($p > 3$, Primzahl), wenn $h_{p-1} \equiv -8 \pmod{N}$. Dabei ist $h_3 = 3$ und $h_{m+1} = h_m + 2^{2m-2} h_m^2$.

H. J. Kanold.

Mahler, K.: On the greatest prime factor of $ax^m + by^n$. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **1**, 113–122 (1953).

$m \geq 2$, $n \geq 3$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ seien gegebene ganze rationale Zahlen. x, y mögen Paare ganzer rationaler Zahlen derart durchlaufen, daß der größte Primfaktor von $ax^m + by^n$ beschränkt bleibt. Verf. beweist, daß dann auch der größte gemeinsame Primfaktor von x, y sowie die Quotienten $x^m/(x^m, y^n)$, $y^n/(x^m, y^n)$ beschränkt sind. Etwas weniger besagt folgendes Teilresultat: es sei $(x, y) = 1$ und $\max(|x|, |y|) \rightarrow \infty$; dann strebt der größte Primfaktor von $ax^m + by^n$ gegen ∞ . Vgl. hierzu Sätze von G. Pólya [Math. Z. **1**, 143–148 (1918)] und C. L. Siegel [Math. Z. **10**, 173–213 (1921)] über den größten Primteiler eines Polynoms $f(x)$ sowie des Verf. (dies. Zbl. **6**, 105) über den größten Primteiler einer binären Form. — Beweis durch eine einfache Zurückführung auf einen Satz von C. J. Parry (dies. Zbl. **39**, 275).

M. Eichler.

Moser, L. and J. Lambeck: On monotone multiplicative functions. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 544–545 (1953).

Soit $f(n)$ une fonction réelle définie pour des valeurs entières et positives de n . Si a) $f(n) \neq 0$; b) $(m, n) = 1$ implique $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$; et c) $m \geq n$ implique $f(m) \geq f(n)$; on a $f(n) = n^k$, où k est une constante. Démonstration dans l'ordre d'idées de celle d'Ostrowski pour les valuations archimédiennes.

G. Ancochea.

Wallisz (Val'fiš), A. Z.: Über die Eulersche Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 491–493 (1953) [Russisch].

Sei $q(n)$ die Eulersche q -Funktion. Verf. zeigt $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} q(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 = O(x \log^{3,4} x \log \log^2 x)$. Ausgangspunkt ist die Beziehung

$$\Phi(x) = x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n} \right] - \frac{1}{2} \right) + O(x).$$

Bei den Abschätzungen treten folgende Summen auf: $S(x, N) = \sum_{p \leq N} e\left(\frac{x}{p}\right)$,

$S_1(x, N) = \sum_{n \leq N} \mu(n) e\left(\frac{x}{n}\right)$, $e(v) = e^{iv}$. Außer der Pfeifferschen Methode werden noch Methoden von Vinogradoff, Davenport, v. d. Corput, Hua und Verf. gebraucht, doch wird dies nicht im einzelnen ausgeführt sondern ohne Rechnung angegeben.

K. Prachar.

Newman, Morris: The coefficients of certain infinite products. Proc. Amer. math. Soc. 4, 435—439 (1953).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die $p_r(n)$, definiert durch $(1) \prod (1 - x^n)^r = \sum p_r(n) x^n$, arithmetisch zugänglich zu machen. Klassisch sind die Fälle $r = 1$ und 3. Durch logarithmische Differentiation von (1) folgt $n p_r(n) = -r \sum_{j=1}^n \sigma(j) p_r(n-j) \left(\sigma(j) = \sum_{d|j} d \right)$, welche für die numerische Berechnung geeignet erscheint. Mit tieferliegenden Hilfsmitteln wird gezeigt,

(2) $p_r(n p + \delta) = p_r(\delta) p_r(n) - p^{r/2-1} p_r((n-\delta)/p)$
 $[r \text{ gerade, } 0 < r \leq 24, p \text{ Primzahl mit } r(p-1) \equiv 0 \pmod{24}, \delta = r(p-1)/24]$, wo $p_r(x) = 0$ gesetzt wird, wenn x nicht ganz ist. Der Verf. studiert die Fälle $r = 2, 4, 6$ näher, für welche explizite Formeln aufgestellt werden, z. B. $p_6(n) = - \sum_{u^2+v^2=n+2} (-1)^{(u+v)/2} uv$, erstreckt

über alle natürlichen u, v . Weiter gilt für diese Werte r (3) $p_r(u p + 1) = (-p)^{r/2-1} p_r(u/p)$ [p Primzahl mit $r(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$, $1 = r(p^2-1)/24$]. Aus (3) folgen eine Anzahl von Werten für die p_r , z. B. $p_r(n p + 1) = 0$ für $(u, p) = 1$, $p_r(r(p^2-1)/24) = (-p)^{(r/2-1)t}$. Aus (2) folgt z. B. die interessante Formel $p_2((p^t-1)/12) = (\pm 1)^t (t+1)$, welche zeigt, daß jede ganze Zahl als Modul für die Koeffizienten $p_2(n)$ auftreten kann. Eine Tabelle der $p_r(n)$ für die obigen Werte von r für $1 \leq n \leq 25$ beschließt die Arbeit.

E. Hlawka.

Tietze, Heinrich: Über die Glaishersche Verallgemeinerung eines Eulerschen Satzes über Partitionen. J. reine angew. Math. 191, 64—68 (1953).

Folgender Satz von Glaisher, der eine Verallgemeinerung eines Satzes von Euler ist, wird bewiesen: Seien m und k zwei natürliche Zahlen, dann ist die Anzahl der Partitionen von m , bei denen wenigstens ein Summand durch k teilbar ist, gleich der Anzahl der Partitionen von m , bei denen unter den Summanden wenigstens ein System von k einander gleichen Zahlen vorkommt. Der Beweis wird ohne Anwendung erzeugender Funktionen durch einfache kombinatorische Betrachtungen durchgeführt.

S. Selberg.

Rohrbach, Hans und Bodo Volkmann: Zur Theorie der asymptotischen Dichte. J. reine angew. Math. 192, 102—112 (1953).

Vereinfachter Beweis der Ostmannschen Ergebnisse über asymptotische Dichten (dies. Zbl. 36, 25). Vgl. auch die Arbeit des Ref. [Math. Z. 58, 459—487 (1953)].

M. Kneser.

Utz, W. R.: A note on the Scholz-Brauer problem in addition chains. Proc. Amer. math. Soc. 4, 462—463 (1953).

Verf. greift die von A. Scholz [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 47, 41—42 (1937)] aufgeworfene und von A. Brauer (dies. Zbl. 22, 111) behandelte Frage nach Eigenschaften sogenannter Additionsketten für $n (n > 0 \text{ ganz})$ auf, worunter man eine Folge ganzer Zahlen $a_0 = 1 < a_1 < \dots < a_r = n$ versteht, so daß $a_i = a_j + a_k$ für alle $i > 0$ ist. $l(n)$ sei das kleinste r , das für n Additionsketten ermöglicht. Bekannt ist nach A. Brauer $m < l(n) \leq 2m$, wenn $2^m < n \leq 2^{m+1}$, $m \geq 1$, ist, ferner $l(ab) \leq l(a) + l(b)$. Zur Diskussion steht $l(2^q - 1) \leq q + l(q) - 1$. Verf. beweist diese Relation für den Spezialfall $q = 2^s(2^n + 1)$.

H.-H. Ostmann.

Duparc, H. J. A. and W. Peremans: On certain representations of positive integers. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 92—98 (1953).

u und v seien zwei natürliche Zahlen, $(u, v) = 1$. Es handelt sich um das klassische Problem der additiven Zahlentheorie, die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen in der Form $(1) ux + vy$ mit $x, y \geq 0$. $\binom{n}{u, v}$ bezeichne die Anzahl der Darstel-

lungen von n durch (1), und es sei $N = uv$, $u < v$. Folgende Resultate sind bekannt [vgl. A. Brauer, Amer. J. Math. **64**, 299–312 (1942); H. T. R. Aude, dies. Zbl. **33**, 160]: (2) $\binom{n}{u, v} \geq 1$ für $n \geq N$. (3) $\binom{N}{u, v} = 0$. (4) $\binom{n}{u, v} + \binom{N-n}{u, v} = 1$ für $0 \leq n \leq N$. (5) Q , die Menge aller natürlichen Zahlen n mit $\binom{n}{u, v} = 0$, besitzt $\frac{1}{2}(u-1)(v-1)$ Elemente. Verf. geben für (2) bis (4) einfache analytische Beweise und leiten für Q^k , die Summe der k -ten Potenzen der Elemente von Q , die Formel $Q^k = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq k+1}} i! j! (k+2-i-j)! \tau^{k-i+1} n^{k-j+1} = \frac{B_{k+1}}{k+1}$, wo die B_m die

Bernoullischen Zahlen bezeichnen, her. Hierin ist (5) als Spezialfall ($k=0$) enthalten.

H.-E. Richert.

Ayoub, Raymond: On Rademacher's extension of the Goldbach-Vinogradoff theorem. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 482–491 (1953).

Unter der Annahme der Richtigkeit einer bis heute unbewiesenen Vermutung über die Nullstellen der Dirichletschen L -Reihen haben Hardy und Littlewood [Acta math. **44**, 1–70 (1922)] bewiesen, daß jede hinreichend große ungerade Zahl n als Summe dreier ungerader Primzahlen darstellbar ist. Rademacher [Math. Z. **25**, 627–657 (1926)] zeigte unter Verwendung einiger Vereinfachungen der Methode, die teilweise auf Landau [Rend. Circ. mat. Palermo **46**, 349–356 (1922)] zurückgehen, daß dieselbe Vermutung auch ausreicht, um nachzuweisen, daß dieser Satz für $s \geq 3$ Primzahlen, die den Restklassen $a_j \pmod{k}$, $(a_j, k) = 1$, $j = 1, \dots, s$, $k \geq 1$, angehören, richtig bleibt, wenn nur die notwendige Bedingung $n \equiv a_1 + \dots + a_s \pmod{k}$ erfüllt ist. Er gab in Verallgemeinerung von Hardy und Littlewood für die Lösungsanzahl $A(n)$ der fraglichen Gleichung die asymptotische Formel $(1) A(n) \sim \frac{1}{s} (n)^{s-1} \log^2 n$ an, wo die sog. singuläre Reihe $\varpi(n)$ unter den obigen Bedingungen gleichmäßig in n positiv ist. Ohne Verwendung einer unbewiesenen Hypothese erbrachte zuerst Vinogradov (dies. Zbl. **16**, 291) einen Beweis für den Satz von Hardy und Littlewood. In ähnlicher Weise zeigte dann v. d. Corput (dies. Zbl. **19**, 196) die Richtigkeit des Rademacherschen Satzes für $s=3$, ohne jedoch (1) herzuleiten. A. Zulauf (dies. Zbl. **48**, 276) bewies mit Hilfe der Methode von Linnik [Mat. Sbornik, n. Ser. **19** (61), 3–8 (1946)] und Čudakov (dies. Zbl. **31**, 347) das Rademachersche Resultat einschl. (1) für beliebiges $s \geq 3$. Verf. zeigt die Richtigkeit von (1) mit Hilfe der Vinogradovschen Methode.

H.-E. Richert.

Zulauf, Achim: Über den dritten Hardy-Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung. J. reine angew. Math. **192**, 117–128 (1953).

Bekanntlich führen für den Vinogradovschen Satz, daß sich alle großen ungeraden Zahlen als Summe dreier Primzahlen $p \geq 3$ darstellen lassen, sowohl die sogenannte Vinogradovsche Methode als auch die Hardy-Littlewood-Linnik-Methode zum Ziel (s. hierzu auch Zulauf, dies. Zbl. **18**, 276). In Hinblick auf die eigentliche Goldbachsche Vermutung bewiesen v. d. Corput (dies. Zbl. **18**, 52), Čudakov (dies. Zbl. **18**, 6) und Estermann (dies. Zbl. **20**, 105) vermittels der Vinogradovschen Methode, daß für die Anzahl $N(x)$ der nicht als Summe zweier Primzahlen darstellbaren geraden Zahlen $\leq x$ gilt: $N(x) = O(x \log^{-\delta} x)$, ($\delta > 0$ beliebig). (Umgekehrt folgt hieraus leicht der Vinogradovsche Satz.) Verf. beweist nun vermöge der Hardy-Littlewood-Linnikschen-Methode die folgende Verallgemeinerung: Es sei $(a_1, m) = (a_2, m) = 1$, $m \geq 1$. $B(x)$ sei die Anzahl aller geraden Zahlen $n \leq a_1 + a_2(m)$, $0 < n \leq x$, die keine Darstellungen der Form $n = p_1 + p_2$, $p_i = a_i(m)$ ($i = 1, 2$), besitzen. Dann gilt $B(x) = O(x \log^{-\delta} x)$, ($\delta > 0$ beliebig). — Unter Verwendung der Vinogradovschen Methode ist dieses Resultat (als Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes) von v. d. Corput (dies. Zbl. **19**, 196) bewiesen worden.

H. Ostmann.

Erdős, P.: On a conjecture of Hammersley. J. London math. Soc. **28**, 232–236 (1953).

Es bezeichne $\Sigma_{n,s}$ die s -te elementar-symmetrische Funktion der Zahlen $1, \dots, n$. $f(n)$ sei der größte Wert von s , für den (bei festem n) $\Sigma_{n,s}$ sein Maximum annimmt. Hammersley (dies. Zbl. **44**, 39) zeigte

(1) $f(n) = n - [\varrho + \frac{1}{2} + \{\zeta(2) - \zeta(3)\}/\varrho + h/\varrho^2]$, $\varrho = \log(n+1) + \gamma - 3/2$,

$-1, 1 < h < 1,5$, wo γ die Eulersche Konstante und $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ -Funktion bezeichnet, sowie (2) $\sum_{n,1} < \dots < \sum_{n,f(n)-1} \leq \sum_{n,f(n)} > \sum_{n,f(n)+1} > \dots > \sum_{n,n}$. Er vermutete, daß in (2) auch stets $\sum_{n,f(n)-1} < \sum_{n,f(n)}$ gilt, d. h. der Wert s , für den $\sum_{n,s}$ bei gegebenem n sein Maximum annimmt, ist eindeutig bestimmt (und daher $= f(n)$). Verf. beweist diese Vermutung. Hierzu zeigt er unter Verwendung des Primzahlsatzes für $n > 10^8$ sogar, daß alle $\sum_{n,s}$, $1 \leq s \leq n$, voneinander verschieden sind. Weiter sei $u_1 < u_2 < \dots$ eine Folge positiver reeller Zahlen, für die $\sum_i u_i^{-1}$ divergiert und $\sum_i u_i^{-2}$ konvergiert. Werden $\sum_{n,s}$ und $f(n)$ für die n ersten Zahlen dieser Folge wie oben definiert, so gilt analog zu (1):

$$f(n) = n - \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-1} - \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{-2} (1 + u_i^{-1})^{-1} + o(1) \right].$$

Verf. vermutet, daß für $n \geq n_0 = n_0(\{u_i\})$ auch hier das maximalisierende s eindeutig bestimmt ist, und bemerkt, daß diese Vermutung für den Fall, daß alle u_i natürliche Zahlen sind und einer arithmischen Progression angehören, zutrifft.

H.-E. Richert.

Richert, Hans-Egon: Aus der additiven Primzahltheorie. J. reine angew. Math. 191, 179–198 (1953).

Es sei s ganz ≥ 3 , a_1, a_2, \dots, a_s ganz und $\neq 0$, $(a_i, a_k) = 1$ für $i \neq k$, $A = a_1 a_2 \dots a_s$, und es sei $\lambda_n^{(s)}(m)$ bzw. $l_n^{(s)}(m)$ die Lösungszahl von $a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_s p_s = m$, $3 \leq p_i \leq n$, p_i prim ($1 \leq i \leq s$), bzw. von $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_s v_s = m$, $1 \leq v_i \leq n$, v_i ganz ($1 \leq i \leq s$). Verf. beweist, daß es ein N gibt, derart, daß für $n \geq N$ und jedes ganze m gilt: $\lambda_n^{(s)}(m) = S(m) l_n^{(s)}(m) / \log^s n + O(n^{s-1} / \log^{s-1} n)$. Hier ist $S(m) = \Pi_1 (1 - (-1)^s (p-1)^{-s}) \cdot \Pi_2 (1 - (-1)^s (p-1)^{-(s-2)}) \Pi_3 (1 + (-1)^s (p-1)^{-(s-1)})$, wo p in Π_i die nicht in A aufgehenden Primzahlen durchläuft und in Π_2 bzw. Π_3 die in A aufgehenden Primzahlen, für die $p \mid (A, m)$ bzw. $p \nmid (A, m)$. Die im O -Glied enthaltene Konstante hängt nur von s und den a_i ab. Notwendig und hinreichend für das Nichtverschwinden von $S(m)$ ist übrigens: $m \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_s \pmod{2}$, und alsdann ist $S(m) \geq \frac{1}{2}$. Falls diese Bedingung erfüllt ist, ergibt sich speziell für $m = n$: $\lambda_n^{(s)}(n) = S(n) n^{s-1} / (s-1)! A \log^s n + O(n^{s-1} / \log^{s+1} n)$. Falls überdies $s = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ist, ergibt sich als Spezialfall die Formel von Vinogradov für die Anzahl der Darstellungen einer ungeraden Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen, und zwar mit einer etwas schärferen Restabschätzung als bei Vinogradov. Falls nicht alle a_i das gleiche Vorzeichen haben, beweist Verf., daß es (falls $m \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_s \pmod{2}$) für jedes (nicht nur jedes hinreichend große) m unendlich viele Lösungen von $m = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_s p_s$, p_i prim ≥ 3 ($1 \leq i \leq s$) gibt. Im Falle $s = 2$ beweist Verf. schließlich noch zwei Mittelwertsätze für die Anzahl $G(n)$ der geordneten Paare von Primzahlen $p_1 \geq 3$, $p_2 \geq 3$ mit $n = p_1 + p_2$, und zwar einmal für ein möglichst kleines Intervall, zum anderen über eine arithmetische Progression mit verhältnismäßig großer Differenz. H. D. Kloosterman.

Sathe, L. G.: On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. I. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 63–82 (1953).

Es sei $\sigma_\nu(x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq x$, welche genau ν Primfaktoren besitzen (welche nicht alle voneinander verschieden zu sein brauchen), $\pi_\nu(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen unter ihnen, $\rho_\nu(x)$ die Anzahl $\leq x$, welche genau ν verschiedene Primfaktoren haben. Verf. kündigt asymptotische Gesetze für diese Funktionen an, wenn $\nu \sim k l_2 x$ ($l_2 x = \log x$, $l_2 x = \log \log x$) ist. In der vorliegenden Arbeit stellt Verf. folgenden Satz auf: Ist $l_2 x \geq \nu$, dann ist $\pi_\nu(x) = \psi(\nu, x) + R_\nu(x)$ mit $\psi(\nu, x) = \frac{x}{l_2 x} \sum_{r=0}^{\nu-1} B_r \frac{(l_2 x)^{\nu-r-1}}{(\nu-r-1)!}$, wo $B_0 = 1$,

$B_1 = B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - l_2 x \right)$ und für $r \geq 2$ die Rekursionsformel $r B_r = B_{r-1} B + \sum_{t=2}^r (-1)^{t-1} A(t) B_{r-t}$ besteht, wo $A(r) = \sum_p p^{-r} + \zeta(r)$. Für den Rest gilt die Abschätzung

$$(1) \quad |R_\nu(x)| \leq c \frac{x}{(l_2 x)^2} \frac{(l_2 x)^\nu}{\nu!} \prod_{m=1}^{\nu} \left(1 + \frac{c'}{\sqrt{m}} \right)$$

(c, c' Konstante). Für $\nu = 1$ und 2 ist das Resultat wohlbekannt. Der Beweis von (1) wird durch vollständige Induktion nach ν geführt. Es wird angenommen, daß (1) für alle $\nu \leq \nu'$ gilt. Um nun (1) unter dieser Induktionsannahme für $\nu' + 1$ zu zeigen, benützt der Verf. die Rekursions-

formel von Pillai $(\nu + 1) \pi_{\nu+1}(x) = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \sum_{p^{r+1} \leq x} \pi_{\nu-r} \left(\frac{x}{p^{r+1}} \right) [\pi_0(x) = 1 \text{ für } x \geq 1]$

und = 0, wenn $x < 1$ ist]. Die Terme für $r > 0$ können leicht abgeschätzt werden. Die Hauptschwierigkeit bildet die Summe $\sum_{p \leq x} \pi_p \left(\frac{x}{p} \right)$, welche nun unter Benutzung der Transformationsformel von Pillai

$$(2) \quad \sum_{p \leq x} \pi_p \left(\frac{x}{p} \right) = \sum_{p \leq x^{1-\alpha}} \pi_p \left(\frac{x}{p} \right) + \sum_{q_p \leq x^\alpha} \pi \left(\frac{x}{q_p} \right) - \pi(x^{1-\alpha}) \pi_p(x^\alpha),$$

wo $0 < \alpha < 1$, q_p quadratfreie Zahl mit r Primfaktoren, weiter behandelt wird. Der entscheidende Term ist der zweite Term in (2), welcher auf die Abschätzung der Summen $\Sigma_1 = \sum_{q_p \leq x^\alpha} q_p^{-1}$, $\Sigma_2 = \sum_{q_p \leq x^\alpha} (\log q_p)^n / q_p$ für $1 \leq n \leq 2$ zurückgeführt wird. In dem vorliegenden Teil der Untersuchung wird nun Σ_1 behandelt. Das Resultat ist: Unter der Induktionssannahme gilt für $l_2 x \geq r+1$, $1 \leq r \leq r'$

$$\left| \Sigma_1 - \sum_{r=0}^r B_r \frac{(l_2 x^\alpha)^{r-r'}}{(v-r)!} \right| \leq c \frac{(l_2 x)^r}{v!} \frac{\sqrt{v}}{\log x} \prod_{m=1}^r \left(1 + \frac{c'}{\sqrt{m}} \right).$$

Vor Herleitung dieses Resultates wird noch die erzeugende Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p} \right) e^{1/p} \right\} \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{z}{p} \right) e^{-z/p} \right\}$$

der B_r aufgestellt und $|B_r| \leq c \cdot 10^{-4r}$ gezeigt.

E. Hlawka.

Ožigova, E. P.: Eine von A. Selberg angegebene Modifikation der Methode des „Siebes des Eratosthenes“. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 119–124 (1953) [Russisch].

Verf. gibt einen Bericht über die Siebmethode von A. Selberg: Sei a_1, a_2, \dots, a_N eine Menge natürlicher Zahlen. Gesucht ist eine obere Schranke für die Anzahl A der a_i , die keinen Teiler $d \leq z$ haben. Ausgangspunkt ist die Formel

$$(1) \quad A = \sum_{d \nmid a_i, d \leq z} 1 \leq \sum_{a_i} \left(\sum_{d \leq z} \lambda_d \right)^2,$$

wo $\lambda_1 = 1$ und die übrigen λ zunächst beliebig reell sind. Angenommen wird, daß eine „Näherungsformel“ folgender Art gilt: (2) $\sum_{a_i, d \mid a_i} 1 = \frac{N}{f(d)} + R_d$, $f(a \cdot b) = f(a) f(b)$ für $(a, b) = 1$,

wo über $|R_d|$ eine Abschätzung nach oben bekannt ist. Setzt man (2) in (1) ein, so entsteht eine quadratische Form in den $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_z$ und ein Glied, das die R_d enthält. Wenn man diese quadratische Form unter der Nebenbedingung $\lambda_1 = 1$ zu einem Minimum macht, erhält man im allgemeinen gute Abschätzungen für A . Bei der Durchführung der Rechnung ist wichtig,

daß sich die entstehende quadratische Form auf die Gestalt $\sum_{0 \leq z} f_1(q) \left(\sum_{0 \mid d, d \leq z} \frac{\lambda_d}{f(d)} \right)^2$ bringen läßt, wobei $f_1(q)$ durch $f_1(q) = \sum_{0 \mid d} f_1(q)$ definiert ist (siehe dies. Zbl. 41, 19). Bem.: Das zweite

Restglied in der Abschätzung für $Z_u(N)$ stimmt nicht mit dem in der zitierten Arbeit von Čulanovsky (dies. Zbl. 30, 344) erhaltenen Restglied $O(\log^2 u \log^2 N \log \log^2 N)$ überein, doch ist auch dieses ohne Beweis angegeben.

K. Prachar.

Walfisz (Val'fiš), A. Z.: Isolierte Primzahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 711–713 (1953) [Russisch].

Eine Primzahl p heißt stark isoliert, wenn alle q mit $|q - p| \leq \log p, (\log \log \log p)^2$ nicht prim sind. Verf. zeigt: Fast alle p sind stark isoliert, d. h. die Anzahl der stark isolierten $p \leq x$ ist $\sim x \log x$. Hilfsmittel ist die Abschätzung von Brun-Schnirelman $\sum_{p, p' \leq x, p - p' = y} 1 = O \left(\frac{x}{\log^2 x} \cdot \prod_{p \mid y} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)$, $y < x$. Siehe zu vorliegender Arbeit auch Sierpiński (dies. Zbl. 37, 314) und Erdős-Rényi (dies. Zbl. 38, 183).

K. Prachar.

Malyšev, A. V.: Über die Darstellung der Zahlen durch positive ternäre quadratische Formen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 405–406 (1953) [Russisch].

Unter Benutzung von Ergebnissen einer früheren Arbeit des Verf. wird gezeigt: Sei $f(x, y, z)$ eine positive, ternäre, eigentlich primitive quadratische Form mit den

Invarianten $[k, 1]$, k ungerade, welche zum Geschlecht mit den Charakteren

$$\left(\frac{t}{p_i}\right) = \left(\frac{-1}{p_i}\right), \quad \text{für alle } p_i | k,$$

gehört. Sei g eine beliebige ungerade natürliche Zahl. Wenn m, x_0, y_0, z_0 ganze Zahlen sind mit a) $m \sim m_0(k, g)$ b) $(m, k, g) = 1$ c) $m \not\equiv f(x_0, y_0, z_0) \pmod{8kg}$ d) $(m/q_i) = (-1/q_i)$ für alle $q_i | g$, so gibt es unter den $r(f, m)$ primitiven Darstellungen vom m durch f mehr als $c_1 h(-m)$ solche, die $\equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{g}$ sind. Dabei ist $c_1 = c_1(k, g)$.

K. Prachar.

Jones, Burton W. and E. H. Hadlock: Properly primitive ternary indefinite quadratic genera of more than one class. Proc. Amer. math. Soc. 4, 539—543 (1953).

A. Meyer bewies, daß ein Geschlecht primitiver ternärer indefiniter quadr. Formen nur aus einer Klasse besteht, wenn für die Invarianten Ω, A einige Teilerfremdheitsbedingungen erfüllt sind [J. reine angew. Math. 116, 307—325 (1896)]. Beispiele für solche Geschlechter, die aus mehreren Klassen bestehen, findet man bei A. Meyer nicht. B. W. Jones schrieb noch in seinem Buch „Arithmetic theory of quadratic forms“ (New York 1950, dies. Zbl. 41, 175), daß keine Beispiele bekannt sind. C. L. Siegel teilte B. W. Jones dann brieflich eine Methode mit, die zu einem Beispiel führte. Verff. zeigen nun, wie man systematisch Geschlechter primitiver indef. ternärer quadr. Formen konstruieren kann, welche mindestens 2 Klassen enthalten. Der Beweis geht auf Gedankengänge von A. Meyer zurück.

Hel Braun.

Oppenheim, A.: Values of quadratic forms. I, II. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 54—59, 60—66 (1953).

I. Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine indefinite quadratische Form und $n \geq 3$. Ist $0 < f(x_1, \dots, x_n) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ in ganzen Zahlen lösbar, so auch $0 < -f(x_1, \dots, x_n) < \varepsilon$. Verf. konstruiert binäre Formen, für die die zweite Ungleichung nicht aus der ersten folgt. Um obigen Satz zu beweisen, zeigt Verf.: Zu jedem von f dargestellten $a > 0$ gibt es ein von f dargestelltes $-b < 0$, so daß $b^{2n-2} \leq A_n a^{n-2} |A(f)|$. Dabei hängt die Konstante A_n nur von n ab, und $|A(f)| \neq 0$ ist die Determinante von f . Gleichzeitig beweist der Verf. den von Blaney (dies. Zbl. 31, 204) bewiesenen Satz: Ist $P_1(f)$ die untere Grenze der positiven Werte einer positiv definiten oder indefiniten quadratischen Form f , so gilt $P_1^n(f) \leq B_n |A(f)|$, wo B_n eine Konstante ist, die nur von n abhängt. Dabei ergibt sich die Ungleichung $B_n^{n-2} \leq B_n^n$, die zuerst Mordell [J. London math. Soc. 19, 3—6 (1944)] für positiv definite quadratische Formen abgeleitet hat. — II. Davenport und Heilbronn [J. London math. Soc. 21, 185—193 (1946)] haben gezeigt: Die Ungleichung $0 < |\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_5 x_5^2| < \varepsilon$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ in ganzen Zahlen lösbar, wenn alle $\lambda_i \neq 0$ sind, nicht alle λ_i gleiches Zeichen haben und wenigstens ein Verhältnis λ_i/λ_k irrational ist. Verf. zeigt nun viel allgemeiner: Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ eine indefinite quadratische Form mit der Determinante $|A(f)| \neq 0$, die die Null eigentlich darstellt und kein Vielfaches einer rationalen Form ist, so ist $0 < |f(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ in ganzen Zahlen lösbar, wenn $n \geq 5$. Für $n = 2$ wäre der Satz falsch. Für $n = 3$ und 4 ist er vermutlich richtig. Um den Satz zu beweisen, zeigt der Verf., daß es genügt, die Lösbarkeit der Ungleichung $0 < |x_1 x_2 + \theta_2 x_3^2 + c_1 x_4^2 + \dots + c_n x_n^2| < \varepsilon$ zu beweisen. Dabei sind θ irrational, c_3, \dots, c_n ganz rational. Beim Beweis wird ein Satz über Gleichverteilung benutzt, ferner folgender interessanter Hilfssatz: Ist $Q(x, y, z)$ eine ganzzahlige ternäre quadratische Form mit der Determinante $A(f) \neq 0$, so gibt es eine arithmetische Reihe $Ah + B$, so daß $Q(x, y, z) = Ah + B$ ($A \neq 0$) für jedes ganze h in ganzen Zahlen x, y, z lösbar ist.

N. Hofreiter.

Oppenheim, A.: One-sided inequalities for quadratic forms. I. Ternary forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 328—337 (1953).

Es sei $f(x, y, z)$ eine indefinite quadratische Form mit der Determinante $A \neq 0$. Ferner seien $P_1(f)$ und $P_2(f)$ die unteren Grenzen der positiven Werte von f bzw. $-f$. Dann gilt nach Davenport (dies. Zbl. 32, 401): $P_1^3 \leq 4 |A|$, $4 P_2^3 \leq 27 |A|$, wobei das Gleichheitszeichen nur für Formen f gilt, die mit einem positiven Vielfachen von $x^2 + yz$ bzw. $x^2 + 4yz$ äquivalent sind. Verf. beweist dies neuerdings und zeigt weiter: Schließt man die Formen aus, für die das Gleichheitszeichen gilt, so ist $4 P_1^3 \leq 9 |A|$ und $64 P_2^3 \leq 343 |A|$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn f mit einem positiven Vielfachen von $3x^2 + 4yz$ bzw. $x^2 + 16yz$ äquivalent ist.

Der Nachweis erfordert wohl mehrere Fallunterscheidungen, ist aber durchaus elementar. N. Hofreiter.

Rankin, R. A.: On positive definite quadratic forms. J. London math. Soc. 28, 309—314 (1953).

Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ eine positiv definite quadratische Form mit reellen Koeffizienten (o. B. d. A. mit der Determinante 1). Ausgehend von der Tatsache, daß das Minimum $M(f)$ von f für ganzzahlige x_1, \dots, x_n das Minimum der Diagonalkoeffizienten aller zu f äquivalenten Formen ist, definiert Verf. $M_r(f)$ ($1 \leq r \leq n$) als untere Grenze der Hauptminoren von der Ordnung r der zu f äquivalenten Formen. Dies kommt auf die Betrachtung r -dimensionaler Gitter im R_n hinaus. Es wird gezeigt: 1. $M_r(f)$ ist ein Minimum; 2. $\gamma_{n,r} = \sup M_r(f')$ (erstreckt über alle Formen mit der Determinante 1) ist $< \infty$ und ist ein Maximum, d. h. es gibt f mit $M_r(f) = \gamma_{n,r}$; 3. Ist F die adjungierte Form zu f , so ist $M_r(F) = M_{n-r}(f)$, also ist $\gamma_{n,r} = \gamma_{n,n-r}$; 4. Für $1 \leq m < r \leq n-1$ ist $\gamma_{n,m} \leq \gamma_{n,m}(\gamma_{n,r})^{m/r}$ [Verallgemeinerung der Mordellschen Ungleichung; J. London math. Soc. 19, 1—5 (1944)]. Verf. bestimmt nun $\gamma_{4,2}$ zu $3/2$ und die Formen, für welche das Gleichheitszeichen angenommen wird. Dies liefert nach 4. obere Abschätzungen für $\gamma_{n,r}$ für $n \leq 8$, $r \leq 5$. E. Hlawka.

Rankin, R. A.: The anomaly of convex bodies. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 54—58 (1953).

S sei ein Sternkörper, G ein n -dimensionales Punktgitter ($m(G)$ der Betrag seiner Determinante) im R_n , $\mu_1(G, S), \dots, \mu_n(G, S)$ seien die sukzessiven Minima von S , und die Minimaldeterminante von S sei $A(S) = \gamma^{-n}(S)$, wo $\gamma(S)$ die Hermitesche Konstante von S ,

$$\gamma(S) = \sup_G \mu_1(G, S) m^{-1/n}(G). \quad \text{Ferner sei } \Pi(G, S) = \prod_{i=1}^n \mu_i m^{-1}(G);$$

dann heißt nach C. Chabauty $\lambda_n(S) = \gamma^{-n}(S) \sup_G \Pi(G, S)$ die Anomalie von S . Es ist klarerweise

$\lambda_n(S) \leq 1$, und nach C. Chabauty und C. A. Rogers ist (1) $\lambda_n(S) \leq 2^{n-1/2}$. Es besteht nun die Vermutung, daß für beschränkte, konvexe Körper K mit Mittelpunkt die Anomalie stets 1 ist. Die Richtigkeit dieser Vermutung wäre für die Geometrie der Zahlen von großer Bedeutung. Nun hat schon Minkowski implizit gezeigt (vgl. auch Chabauty, dies. Zbl. 35, 17), daß dies für $n=2$ richtig ist (für $n=1$ ist dies trivial). Die Minkowskische Methode führt leicht, unter Benutzung der Methoden, welche von C. Chabauty und C. A. Rogers zum Beweis von (1) entwickelt wurden, zu (2) $\lambda_n(K) \leq 2^{1/n-1/2}$, also insbesondere zu (3) $\lambda_3(K) \leq 2^{2/3}$, wie schon von Chabauty angegeben wurde. [Bemerkung des Ref.: Die Beweisskizze des Verf. für (2) erscheint mir nicht ganz klar.] Der Verf. zeigt nun unter Benutzung der in dies. Zbl. 50, 388 besprochenen Arbeit die scharfere Abschätzung (4) $\lambda_3(K) \leq \beta$, wo β die positive Nullstelle von $x(x+6)^2=64$ ist. — Es ist $\beta \sim 1,22578 \cdot 2^{2/3} \sim 1,5874$; (4) ist die bisher beste Abschätzung. Von Interesse scheint folgender Hilfssatz des Verf.: Für die Bestimmung von $\lambda(S)$ (wenn S beschränkt ist) genügt es, nur die Gitter G' zu betrachten, für die $\mu_{k+1}(G', S) \leq 2 \mu_k(G', S)$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) gilt; d. h. es ist $\lambda_n(S) = \sup_G \Pi(G', S) \gamma^{-n}(S)$ (vom Verf. nur für konvexe S ausgesprochen), denn

dies liefert sofort einen Beweis für einen Satz von K. Mahler.

E. Hlawka.

Prachar, Karl: Über höhere zahlengeometrische Minima. Arch. der Math. 4, 39—42 (1953).

Let K be a symmetric convex bounded open body of volume J in R_n , Γ a lattice of determinant D , l and i two positive integers. Denote by M_{li} the upper bound of all $\mu > 0$ for which μK either contains less than l lattice points or less than i independent lattice points or both. Put $M_l = \sup_{\Gamma} M_{li}(J/D)^{1/n}$. The author shows that, if $\varepsilon > 0$ is arbitrary,

$$J M_{1l} M_{2l} \cdots M_{nl} < M_l^n 2^{(n-1)/2} (1 + \varepsilon) D.$$

For $l=1$ this is equivalent to a result due to C. Chabauty (this Zbl. 35, 317) and C. A. Rogers (this Zbl. 33, 106). The proof is based on ideas of theirs and of C. Hlawka (this Zbl. 36, 309). — The note also deals with some improvements in special cases, and a generalization to arbitrary point sets. K. Mahler.

Mahler, K.: On the lattice determinants of two particular point sets. J. London math. Soc. **28**, 229—232 (1953).

K. Mahler zeigt folgende zwei Resultate: 1. Ist R_t der Bereich $|x y| \leq 1$, $x \geq t$ ($t \geq 0$), so ist die Minimaldeterminante $\Delta(R_t)$ unabhängig von t und gleich $\Delta(K) = \frac{1}{2} \sqrt{5}$, wo $K: |x y| \leq 1$ ist. 2. Ist S_t die Menge aller Punkte (x, y) mit entweder $0 \leq x \leq t$ oder $|x y| \leq 1$ und $x > t$ ($t > 0$), dann ist wieder $\Delta(S_t)$ von t unabhängig und gleich $\frac{1}{2} (3 + \sqrt{5})$. — Das Bemerkenswerte an diesen beiden Beispielen liegt darin, daß die R_t einen beliebig schmalen Bereich der Halbebene $x \geq 0$ bedecken und daß trotzdem die Minimaldeterminante positiv und konstant ist. Dasselbe gilt für S_t , welche nun einen beliebig großen Teil dieser Halbebene bedecken. Das erste Resultat folgt leicht aus der allgemeinen Theorie des Verf. [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **187**, 151—187 (1946)] (S. 230, Z. 12 v. u. muß es Satz 14 heißen). Der Beweis des zweiten Resultates benutzt einen Satz von A. V. Prasard (dies. Zbl. **34**, 28).

E. Hlawka.

Hartman, S.: Zur Gitterpunktverteilung bei Verschiebungen von Mengen. Studia math. **13**, 87—93 (1953).

Es sei S eine im Lebesgueschen Sinne meßbare Menge im R_n , welche o. B. d. A. den Nullpunkt enthält. Dann sei $g(\xi)$ die Anzahl der Gitterpunkte in $S + \xi$ (ξ beliebig). Weiter sei $v = (y_1, \dots, y_n)$ ein Vektor, für den $y_1, y_2, \dots, y_n, 1$ linear unabhängig über dem Ring der ganzen Zahlen sind, d. h. y_1, \dots, y_n sind linear unabhängig im in der Theorie der diophantischen Approximationen üblichen Sinne. Weiter sei, bei vorgegebenen ganzzahligen $s \geq 0$ N' die Anzahl der natürlichen $k \leq N$ (N bel.), für die $g(\xi + k v) = s$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N'/N = \text{fr } (g(\xi + k v) = s)$, M_s die Menge der ξ für die $g(\xi) = s$, ξ in $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$). Dann wird gezeigt (Satz 1): Für fast alle ξ ist 1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(\xi + k v) = \text{Maß } S$, 2. $\text{fr } (g(\xi + k v) = s) = \text{Maß } M_s$ für alle $s \geq 0$, 3. $\sum_{s=1}^{\infty} s \text{ fr } (g(\xi + k v) = s) = \text{Maß } S$. 1., 2. und 3. für beschränktes S folgen leicht aus dem Birkhoffschen Ergodensatz. Nur der Fall 3. für nicht beschränktes S erfordert eine Sonderbehandlung, die den Hauptteil der Arbeit einnimmt. Es wird weiter gezeigt: Ist S beschränkt und im Jordanschen Sinne meßbar, dann gilt Satz 1 für alle ξ . 1. ist dann ein wohlbekannter Satz von Hardy-Littlewood und folgt aus dem bekannten Satz von Weyl in der Theorie der Gleichverteilung.

E. Hlawka.

Maxfield, John E.: Normal k -tuples. Pacific J. Math. **3**, 189—196 (1953).

Verf. dehnt den Begriff der normalen Zahl auf Vektoren $a = (a_1, \dots, a_k)$ in einem k -dimensionalen Vektorraum \mathfrak{A}_k aus. Der Vektor $a_n = (a_1^{(n)}, \dots, a_k^{(n)})$ heißt n -te Ziffer von a zur Basis r , wenn $a_i^{(n)}$ die n -te Ziffer von a_i zur Basis r ist ($i = 1, \dots, k$). Dann heißt a einfach normal zur Basis r , wenn für die Anzahl $n(i)$, mit der die Ziffer i in den ersten n Ziffern von a vorkommt, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(i)}{n} = r^{-k}$ für alle r^k möglichen Werte von i . a heißt normal zur Basis r , wenn a, ra, r^2a, \dots einfach normal sind zu allen Basen r, r^2, r^3, \dots . Es wird nun jedem a eine reelle Zahl $\alpha = 0, a_1 a_2 \dots$ zugeordnet (in bezug auf r) durch die Festsetzung, daß die n -te Ziffer von a gleich $(a_{(n-1)k+1}, \dots, a_{nk})$ ist. Dann wird gezeigt, daß a genau dann normal ist, wenn dies für die zugeordnete Zahl gilt. Dies gestattet, die Sätze von Niven-Zuckermann (dies. Zbl. **42**, 269) und Pillai (dies. Zbl. **25**, 308; vgl. Maxfield, dies. Zbl. **46**, 273) auf Vektoren zu übertragen. Ist P eine Permutation der Ziffern $0, 1, \dots, r-1$ und ist Pc die Zahl, welche aus c entsteht, indem man auf die Ziffern von c die Permutation P anwendet, so wird u. a. weiter gezeigt: Ist $a = (a_1, \dots, a_k)$ normal, dann ist es auch $(a_1, \dots, a_{k-1}, P a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Verf. wendet nun die Theorie der Gleichverteilung an und beweist: I. a ist genau dann normal, wenn 1. $a^{r^k} (x = 1, 2, \dots)$ gleichverteilt mod 1 ist, 2. ha normal ist für alle Gittervektoren $h \neq 0$. — II. Ist \mathfrak{A} eine nichtsinguläre Matrix von k Zeilen mit rationalen Elementen und ist a normal, so gilt dies auch für $\mathfrak{A} a$. — Aus I 1. folgt unmittelbar, daß fast alle a normal sind.

E. Hlawka.

Peck, L. G.: On uniform distribution of algebraic numbers. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 440—443 (1953).

Verf. zeigt folgenden Satz: Es sei K ein reeller algebraischer Zahlkörper vom Grad $n + 1$ ($n \geq 1$) über dem Körper \mathbb{R} der rationalen Zahlen. Es seien $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ($\omega_0 = 1$) Zahlen aus K , linear unabhängig über \mathbb{R} , und $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion, definiert auf $E_n: 0 < x_k < 1$ ($k = 1, \dots, n$) durch eine absolut konvergente Fouriersche Reihe $\sum_{q_1, \dots, q_n} a(q_1, \dots, q_n) \exp(2\pi i(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n))$.

Gibt es dann positive Konstante C, c , so daß $a(q_1, \dots, q_n) \leq C(q_1 + \dots + q_n)^{-n-c}$ ist, dann liegt $S_M = M \int_{E_n} f dx_1, \dots, dx_n = \sum_{m=0}^{M-1} f(m\omega_1, \dots, m\omega_n)$ dem Betrag nach unter einer Schranke, welche nur von C, c und den Zahlen ω , aber nicht von M abhängt. Dies stellt unter dieser Voraussetzung eine Verschärfung des bekannten Weylschen Satzes dar. E. Hlawka.

Chalk, J. H. H.: A theorem of Minkowski on the product of two linear forms. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 413—420 (1953).

For constant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q$ it is shown that there always exist three integer pairs u_i, v_i ($i = 1, 2, 3$) such that $|(\alpha u_i + \beta v_i + p)(\gamma u_i + \delta v_i + q)| \leq \frac{1}{2} |\alpha\delta - \beta\gamma|$ and

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1;$$

and indeed in infinitely many ways in a large number of cases. That is, in the „grid“ (inhomogeneous lattice) $x = \alpha u + \beta v + p, y = \gamma u + \delta v + q$ (u, v integers) there are always three points generating the grid in $|x y| \leq \frac{1}{2} |\alpha\delta - \beta\gamma|$. This generalizes Minkowski's theorem that if $p = q = 0$ (i. e. for a homogeneous lattice) there are always two points in $|x y| \leq \frac{1}{2} |\alpha\delta - \beta\gamma|$ which (together with the origin) generate the lattice. The author shows further that in the latter theorem the constant $\frac{1}{2}$ is best possible. J. W. S. Cassels.

Hofreiter, Nikolaus: Über die Approximation von komplexen Zahlen. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 125—127 (1953).

A brief report on the author's paper this Zbl. **46**, 47. J. W. S. Cassels.

Analysis.

● **Roberts, Helen M. and Doris S. Stockton:** Elements of mathematics. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1953. VIII, 211 p. \$ 3.00.

● **Rothe, R.:** Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Herausgeg. von W. Schneider. Teil II. 9. verb. Aufl. mit 98 Abb. (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 22). Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1953. 210 S. kart. DM 6,50.

● **Bronwell, Arthur:** Advanced mathematics in physics and engineering. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. XVI, 475 p. \$ 6.00.

Inhalt: Unendliche Reihen, komplexe Zahlen und hyperbolische Funktionen, Fourier-Reihe und Fourier-Integral, gewöhnliche Differentialgleichungen, Besselsche Funktionen und Kugelfunktionen, partielle Differentiation, Schwingungen, Lagrangesche Gleichungen, Vektoranalysis, Lösungen der Wellengleichung, Wärmeleitung, Hydrodynamik, Maxwellsche Theorie, Funktionen einer komplexen Veränderlichen, dynamische Stabilität, Laplace-Transformation. Die Absicht dieses Lehrbuches ist, jene Teile der höheren Mathematik und jene analytischen Methoden in genügender Ausführlichkeit zu bringen, welche zur Behandlung häufig vorkommender mathematischer Probleme des Physikers und Ingenieurs gebraucht werden. Daß damit auch den Anwendungen breiter Raum eingeräumt wird, ist fast selbstverständlich. Der Schwerpunkt der mathematischen Darstellung liegt weniger in der Herleitung allgemeiner Sätze, die häufig nur zitiert und an Beispielen erläutert werden, als im kalkülmäßigen Rechnen, das stets mit

großer Ausführlichkeit geschieht und seine Ergänzung in zahlreichen Aufgaben (mit Angabe der Lösung) findet. Bei den Anwendungen kommt es dem Verf. stets darauf an, die Einheitlichkeit der mathematischen Methoden in den verschiedenen Disziplinen herauszustellen. Ein gründliches Studium dieses Buches führt zweifellos den Physiker und den Ingenieur zu einer guten Fertigkeit im Kalkül und zu einer guten Einsicht in den Zusammenhang zwischen der Natur der physikalischen und technischen Probleme und den dafür geeigneten mathematischen Methoden.

J. Meixner.

• **Thomas jr., George B.: Calculus and analytic geometry.** (Addison-Wesley Mathematics Series.) 2. ed. Cambridge Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1953. 731 p. \$ 8,50.

Besprechung der 1. Aufl. dies. Zbl. 43. 278.

• **Franklin, Philip: Differential and integral calculus.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. XI, 641 p. 45,— s.

Diese Einführung richtet sich in erster Linie an diejenigen Ingenieure und Naturwissenschaftler, die die Differential- und Integralrechnung vor allem als Handwerkszeug kennen lernen wollen, ohne dabei mit solchen Subtilitäten überlastet zu werden, wie es z. B. Cauchysches Konvergenzkriterium, gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz sind. Dem dargebotenen Stoff ist eine sehr große Anzahl von Zahlenbeispielen und Übungsaufgaben beigegeben, die den Leser mit den Anwendungsmöglichkeiten in der Geometrie und Physik vertraut machen sollen. Die Absicht des Verf., die Sätze in voller Exaktheit zu formulieren, aber mit möglichst einfachen Hilfsmitteln zu beweisen, führt einerseits dazu, daß die Beweise einiger grundlegenden Tatsachen durch den Hinweis auf die geometrische Evidenz ersetzt werden (z. B. Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion), und andererseits dazu, daß eine ganze Reihe von Dingen, die man sonst in einer Einführung zu behandeln pflegt, weggelassen wird, z. B. Differentiation unter dem Integralzeichen, Differentiation und Integration unendlicher Reihen, Theorie der Fourierschen Reihen usw. Sonst erstreckt sich der Stoff bis zu den Anfangsgründen der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und umfaßt die einfachsten Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in der Differentialgeometrie und in einigen Gebieten der Physik.

H. Reichardt.

• **Wylie jr., C. R.: Calculus.** New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. X, 565 S. \$ 6,00.

In diesem Lehrbuch stehen die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf Probleme der Naturwissenschaften in vorderer Linie; dies kommt bereits im 1. Kapitel deutlich zum Ausdruck, wo vorschauenderweise an Hand von einfachen Beispielen aus Physik und Technik dem Leser die wesentlichen Begriffe und Problemstellungen des Kalküls nahe gebracht werden. Dem elementaren Charakter des Buches entsprechend wird wegen Beweisen, die auf der Definition der reellen Zahlen basieren (wie z. B. der Beweis zum Satz von der Konvergenz einer monotonen beschränkten Zahlenfolge), oder aus einem ähnlichen Grunde schwieriger sind, auf weitergehende Lehrbücher oder bewußt auf die Anschauung verwiesen. Trotzdem vermittelt das Buch in einwandfreier Form alles, was es an formaler Technik in der Differential- und Integralrechnung (einschließlich Fourierscher Reihen und einfacher gewöhnlicher Differentialgleichungen) gibt. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben (mit Antworten) unterstützen dieses Ziel. Ausstattung ist vorzüglich.

G. Aumann.

Butchart, J. H. and Leo Moser: No calculus, please. Scripta math. 18, 221 236 (1953).

Verff. stellen, in Form eines Gespräches zwischen einem Professor und einem Amateur, eine Reihe von Aufgaben — meist geometrischen Inhalts — zusammen, für deren Lösung im allgemeinen die Infinitesimalrechnung benutzt wird, die hier aber direkt durch Kunstgriffe gelöst werden.

Koher, H.: On quasi-decimals and on arithmetical properties of certain perfect sets and monotone functions. J. London math. Soc. 28, 47—57 (1953).

Bezeichnungen. Es seien a, u reelle Zahlen mit $1 < a, 0 < u$. Dann existiert genau eine Darstellung, sog. a -Darstellung, $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n a^{-n}$ mit ganzzahligen $a_n \geq 0$, mit $a_n = 0$ für $n < M$ bei passendem $M < 0$ und mit $0 \leq u - \sum_{n=-\infty}^N a_n a^{-n} < a^{-N}$ für jedes N . Die a -

Darstellung heißt periodisch, wenn ganzzahlige $r > 1$ und $p > 1$ existieren derart, daß $a_n = a_{n+p}$ für $n \geq r$; $r(u, a)$ sei die kleinste derartige ganze Zahl r . — Ergebnisse: (1) Es wird eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung angegeben dafür, daß bei rationalem $a = P:Q$ mit ganzen teilerfremden P, Q die a -Darstellung von $u < 1$ periodisch ist. Jedenfalls ist dann $u = R:S$ rational mit teilerfremden ganzen R, S , und $r(u, a)$ ist die kleinste ganze Zahl k , für welche P^{k-1} und S den gleichen g. g. T. besitzen wie P^k und S . — (2) Es sei b ganz mit $2 \leq b < a$, aber a nicht notwendig rational, ferner sei $s = (a-1)(b-1)^{-1}$ und $E(a, b)$ die Menge aller $t = J + (0 \leq t \leq 1)$, für welche $0 \leq a_n \leq b-1$ in der a -Darstellung von $t:s$. Jedem $t \in E(a, b)$ werde zugeordnet die Zahl $y = w(t; a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}$ (vgl. dazu auch dies. Zbl. 35, 47).

Bei rationalem a ist y rational genau dann, wenn die a -Darstellung von $u = t:s$ periodisch ist. — (3) Behandelt werden allgemeiner gewisse „symmetrische“ nirgends dichte, perfekte Nullmengen E in J und zugehörige Funktionen $w(t)$. Die „Symmetrie“ von E ist dabei so erklärt: Sind die zu E komplementären (offenen größten) Intervalle geeignet nach der Länge geordnet und sind J', J'' irgend zwei benachbarte Intervalle der Länge L_n , so liegen zwischen ihnen genau R_{n+1} Intervalle der Länge L_{n+1} , wobei R_{n+1} nur von n abhängt. Ist $S(n)$ bzw. $T(n)$ der linke bzw. rechte Endpunkt des am nächsten bei 0 gelegenen Intervalls der Länge L_n , so genügen die durch E eindeutig bestimmten $R_n, T(n)$ gewissen Bedingungen, die umgekehrt auch hinreichen dafür, daß ein E mit solchen $R_n, T(n)$ existiert. — (4) Es heiße E Unitätsmenge, wenn jede trigonometrische Reihe $\sum c_n \exp(2\pi i n t)$ identisch in $J = (0 \leq t \leq 1)$ verschwindet, wenn sie in $J - E$ gegen Null konvergiert. Es sei E symmetrische (nirgends dichte perfekte) Nullmenge im Sinne von (3), für welche $\lim S(n):S(n+1) = A < +\infty$ existiere. Ist dann E Unitätsmenge, so ist A entweder ganz rational oder ganze algebraische Zahl, deren Konjugierte sämtlich im Einheitskreis liegen; außerdem ist $A > 1$.

Otto Haupt.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Cafiero, Federico: *Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazi astratti*. Napoli: Libreria Editrice Liguori 1953. 178 S.

Behandelt werden abzählbar additive endliche Mengenfunktionen, deren Definitionsbereiche eine größte Menge S enthalten. Als elementare Objekte der Untersuchung treten auf die obere, untere und totale Variation, die Hahnsche Zerlegung einer Menge in bezug auf eine abzählbar additive Funktion, Singularitäten von abzählbar additiven Funktionen und singuläre und absolut stetige abzählbar additive Funktionen in bezug auf ein Maß. Die Fortsetzbarkeit gewisser nichtnegativer Mengenfunktionen zu abzählbar additiven wird unter der Voraussetzung bewiesen, daß der ursprüngliche Definitionsbereich \mathfrak{C} abgeschlossen gegenüber endlicher Vereinigungs- und abzählbarer Durchschnittsbildung ist und die folgende Eigenschaft hat: zu jedem $H \in \mathfrak{C}$ gibt es zwei Folgen (H_k) und (G_k) aus \mathfrak{C} mit $H_{k+1} \subset S - G_k \subset H_k$ und $H = \bigcap_k H_k$. Die Beschrän-

kung auf nichtnegative Funktionen ist nur im Spezialfall, daß \mathfrak{C} aus den in einem festen abgeschlossenen oder offenen Intervall eines euklidischen Raumes abgeschlossenen Mengen besteht, beseitigt. Die Sätze auf den Seiten 26, 56 und 58 über die Fortsetzbarkeit von Intervallfunktionen zu abzählbar additiven Mengenfunktionen sind falsch. — Aus der Theorie der meßbaren Funktionen finden sich z. B. der Egoroffsche Satz und einiges über konvergente Folgen dem Maße nach, insbesondere Bedingungen für die Kompaktheit von Familien meßbarer Funktionen im Sinne der Konvergenz fast überall oder dem Maße nach. Die Integraldefinition geschieht zunächst nur für beschränkte Integranden und Integrationsbereiche endlichen Maßes und wird dann auf nicht beschränkte Integranden und Integrationsbereiche σ -endlichen Maßes erweitert. — Das Hauptgewicht des Buches liegt auf einer Theorie der Familien abzählbar additiver Mengenfunktionen, die sich auf den Begriff der gleichmäßigen Additivität (Caccioppoli, Dubrovskij) stützt. Die gleichmäßige Additivität einer solchen Familie Φ ist äquivalent der Existenz eines endlichen Maßes, in bezug auf das Φ gleichmäßig absolut stetig ist. Zusammen mit der gleichmäßigen Beschränktheit von Φ bildet sie eine notwendige und in Spezialfällen auch hinreichende Bedingung für die Kompaktheit von Φ im Sinne der gewöhnlichen Konvergenz. Mit Hilfe des Begriffs der gleichmäßigen Additivität einer Familie von unbestimmten Integralen werden das Problem der Vertauschung der Integration mit einem gleichzeitigen Grenzübergang beim Integranden und beim Maß sowie Teile der Theorie der in einer positiven Potenz summierbaren Funktionen ausführlich behandelt. Den Schluß bildet der Satz von Radon und Nikodym.

K. Krickeberg.

Haupt, Otto und Christian Y. Pauc: Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen. Arch. der Math. 4, 107–114 (1953).

Die Verff. beweisen rein verbandsalgebraisch je eine bereits früher (siehe dies. Zbl. 42, 282) angekündigte hinreichende Bedingung dafür, daß eine Teilmenge c eines

Booleschen σ -Verbandes \mathfrak{g} ein schwaches bzw. starkes Vitalisches System (zur Definition dieser Begriffe vgl. das zitierte Referat, wo sie in mengenalgebraischer Formulierung gegeben sind) hinsichtlich eines σ -endlichen Maßes μ darstellt, das auf einem Booleschen σ -Unterverband \mathfrak{z} von \mathfrak{g} , der c enthält, definiert und innerhalb von c positiv und endlich ist. μ habe die folgende Approximationseigenschaft: zu jeder Vereinigung F von endlich vielen Elementen aus c , jedem zu F fremden $A \in \mathfrak{g}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein abzählbares System zu F fremder $M_r \in c$, so daß $S = \bigcup M_r$ das Element A bis auf ein Element von Maß Null überdeckt und $\mu(S - A) < \varepsilon$ gilt. Dann ist c ein schwaches Vitalisches System, wenn es die schwache Haloeigenschaft (vgl. das zitierte Referat) hat. Entsprechend bildet c ein starkes Vitalisches System, wenn es die starke Haloeigenschaft hat: es gibt eine endliche positive Zahl β , so daß für jedes $C \in c$ und jedes endliche System von paarweise fremden Elementen $C_v \in c$ mit $\mu(C_v) \leq \mu(C)$ die Ungleichung $\mu(\bigcup_v C_v) \leq \beta \mu(C)$ gilt.

K. Krickeberg.

Pauc, Christian: Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz. J. reine angew. Math. 191, 69—91 (1953).

Die Arbeit enthält eine zusammenfassende, durch viele Beispiele erläuterte Theorie der der Differentiation von Mengenfunktionen dienenden Ableitungsbasen. μ sei ein σ -endliches Maß, das auf einem Borelschen σ -Mengenverband \mathfrak{M} mit einer größten Menge R definiert ist, und $\bar{\mu}$ das zugehörige äußere Maß. Durch eine Ableitungsbasis \mathfrak{B} wird jedem Punkt x einer Teilmenge E von R ein System von Moore-Smithschen Mengenfolgen, die konvergent gegen x heißen, zugeordnet; \mathfrak{S} sei das System aller in diesen Folgen auftretenden Mengen. Jede konfinale Teilfolge einer gegen x konvergierenden Folge konvergiere ebenfalls gegen x , es sei $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}$ und $0 < \mu(S) < +\infty$, wenn $S \in \mathfrak{S}$. In R braucht keine Topologie vorzuliegen; statt dessen werden mit Hilfe von \mathfrak{B} sogenannte prätopologische Begriffe erklärt. Z. B. heißt die Menge G außen offen, wenn für fast alle Punkte $x \in G \setminus E$ jede gegen x konvergierende Folge von einem gewissen Index ab nur aus Teilmengen von G besteht. A heißt außen abgeschlossen, wenn fast jeder Punkt, gegen den eine Folge konvergiert, deren Elemente alle mit A einen nicht leeren Durchschnitt haben, zu $A \cap E$ gehört. Die entsprechenden „inneren Begriffe“ entstehen durch Bildung der Durchschnitte mit E . — Mit Hilfe der Prätopologie läßt sich zunächst die von A. P. Morse in metrischen Räumen gegebene Theorie, in der die zur Differentiation benötigten „Vitalischen“ Eigenschaften von \mathfrak{B} aus „Haloeigenschaften“ abgeleitet werden, von der Metrik befreien. Δ sei eine endliche positive in \mathfrak{S} definierte Funktion und $\alpha \geq 1$. Als Halo $H(V)$ einer Menge $V \in \mathfrak{S}$ wird die Vereinigung aller zu V nicht fremden $W \in \mathfrak{S}$ mit $\Delta(W) \leq \alpha \Delta(V)$ bezeichnet und $\varrho(V) = \bar{\mu}(H(V))/\mu(V)$ gesetzt. Die folgenden Voraussetzungen mögen zutreffen: I. Jede Menge aus \mathfrak{S} ist außen abgeschlossen. II. Fast überall in E ist $\limsup_{V \rightarrow x} (\Delta(V) + \varrho(V))$

$< +\infty$. III. Jedes $X \subseteq E$ mit $\bar{\mu}(X) < +\infty$ ist in einem außen offenen G mit $\bar{\mu}(G) < +\infty$ enthalten. IV. x liegt in jeder Menge jeder gegen x konvergierenden Folge. Dann gibt es zu jeder Teilmenge X von E und jedem Teilsystem \mathfrak{B} von \mathfrak{S} , das zu fast allen Punkten $x \in X$ eine gegen x konvergierende Folge enthält, abzählbar viele paarweise fremde Mengen $V_i \in \mathfrak{B}$, die X bis auf eine Nullmenge überdecken. In wichtigen Spezialfällen kann außerdem der „Exzeß“ $\bar{\mu}(\bigcup_i V_i - X)$ beliebig klein gemacht werden, so daß also \mathfrak{B} die starke Vitalische Eigenschaft

(vgl. auch das vorangegangene Referat) hat. Dies läßt sich außerdem stets durch eine von vornherein vorgenommene Einschränkung von μ (Adaption an die Prätopologie) erreichen. Ferner bekommt \mathfrak{B} die starke Vitalische Eigenschaft, wenn man statt dessen eine Approximationseigenschaft von μ (ähnlich wie im vorangegangenen Referat) voraussetzt und $\alpha = 1$ annimmt; in diesem Fall sind die Voraussetzungen III und IV überflüssig. Zum Schluß werden spezielle Basen, auch im Zusammenhang mit einer Theorie von Denjoy, untersucht.

K. Krickeberg.

Ginsburg, Seymour: Real-valued functions on partially ordered sets. Proc. Amer. math. Soc. 4, 356—359 (1953).

A set S partially ordered by the relation \leq is oriented if every element has a predecessor. S is everywhere branching if every element of S has a pair of predecessors without a common predecessor. A subset T of S is coinital if every element of S has a predecessor in T . A real-valued function f defined on an oriented set S has a limit L if, to each element s of S and $\varepsilon > 0$, there corresponds an element $t = t(s, \varepsilon)$ such that $t \leq s$ and $|f(x) - L| < \varepsilon$ for $x \leq t$. M.M. D. a y [Duke math. J. 11, 201—229 (1944)] showed that an oriented set P can be imbedded by a \leq -isomorphism g into an everywhere branching partially ordered set Q in such a manner that if a

function f has a limit L in P , the g -transferred function $f_* = fg^{-1}$ can be extended to Q and have the limit L on Q . In the present paper this result is strengthened as follows: There exists a mapping m of Q onto P which is an extension of g^{-1} [i. e. $m(q) = g^{-1}(q)$ for $q \in g(P)$] and such that for $f_*(q) = fm(q)$, $q \in Q$, f has a limit L on P if and only if f_* has a limit L on Q . $g(p)$ is defined as the set of the elements $x \in p$. The elements q of Q are the coinitial subsets of $g(p)$ for all $p \in P$, ordered by set inclusion. $m(q)$ is the unique maximal element of q if q has one, otherwise some element of g . A complement to the main theorem concerning partial limits is given, when P is a directed set. There are a few harmless inaccuracies or gaps: p. 357, lines 18—20, p. 358, lines 8 and 14.

Chr. Pauc.

Ariñs, E. G.: Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Baire. *Uspechi mat. Nauk* 8, Nr. 3 (55), 105—108 (1953) [Russisch].

Let l_1 (resp. u_1) be the class of all the lower (upper) semi-continuous functions; let $l_2(u_2)$ be the class of all the functions each of which is the limit of an increasing (decreasing) sequence of functions of the class $u_1(l_1)$; then the class $l_2 \cap u_2$ is the first Baire's class. As a generalization of the Baire's theorem concerning the elements of $l_2 \cap u_2$ the author proves: if $f \in l_2$ (resp. $f \in u_2$), then the set of points of lower (upper) semi-continuity of the function f on P is of second categorie on every perfect set P . The converse does not hold directly but does in this form: If the set of points of lower semi-continuity of a Baire's function f is of second categorie on every P , then $f \in l_2$; the proof uses a theorem by Hurewicz [Fundamenta Math. 12, 78—109 (1928), p. 93]; the assumption that f be a Baire's function is necessary as is visible by considering the characteristic function of a Luzin set which is of the first categorie on each P .

G. Kurepa.

Bononcini, Vittorio E.: Su una estensione del campo di esistenza di una funzione continua in un insieme chiuso. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 23 (1953).

Vgl. dies. Zbl. 44, 282.

Cecconi, Jaurès: Sulla identità fra due definizioni di area. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 8, 130—137 (1953).

Let (Φ, H) : $p = p(w)$, $w \in H$, be any continuous mapping from the closed unit square H of the w -plane into the Euclidean space E_n . Thus (Φ, H) is the representation of a surface S and we shall denote by $L(S)$ the Lebesgue area of S . The following further definition of area is taken into consideration. For each simple Jordan region $r \subset H$ let $F(r)$ be the family of all surfaces σ : (q, r) with q identical with Φ on the boundary $\partial^* r$ of r . Let $H_2[\sigma]$ be the 2-dimensional Hausdorff measure of the set $\varphi(r) = [\sigma]$ (set of the points $p \in E_n$ covered by σ) where each point $p \in [\sigma]$ is counted as many times as there are distinct components of $q^{-1}(p)$ in r , and let $\mu(r) = \inf H_2[\sigma]$, for all $\sigma \in F(r)$. If now D denotes any finite subdivision of H into simple Jordan regions r , let $A(S) = \sup \sum \mu(r)$, where \sum ranges over all $r \in D$ and sup is taken with respect to D . The area $A(S)$ of the surface S has been proposed by E. R. Reifenberg (this Zbl. 44, 280). The author proves that $L(S) = A(S)$ for every surface S , i. e., for every continuous mapping from H into E_n . The proof is based on previous results of the author, and particularly on his proof of the equality of Lebesgue and Peano area (this Zbl. 38, 203), and on his recent result concerning the approximation of a surface and its area by means of almost polyhedral surfaces having the same boundary curve [Riv. Mat. Univ. Parma 4, 69—82 (1953)].

L. Cesari.

Cecconi, Jaurès: Sul teorema di Gauss-Green per una particolare classe di superficie. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 22, 81—112 (1953).

Let (T, C) : $p = T(w)$, $w \in C$, be any continuous mapping from the unit sphere C of the w -space E_3 into the p -space E'_3 , $p = (x, y, z)$, let S be the closed continuous oriented Fréchet surface determined by (T, C) , let $L(S) < +\infty$ be the Lebesgue area of S , $[S] = T(C) \subset E'_3$ the set of points covered by S in E'_3 , and $O(p; S)$, $p \in E'_3$, the topological index of S with respect to any point $p \in E'_3$ (it is equal to zero for every $p \in [S]$). If $f_i(p)$, $p \in E'_3$, $i = 1, 2, 3$, are continuous functions in E'_3 with their first partial derivatives $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}$, and $f = (f_1, f_2, f_3)$, $F = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$, let $J = (S) \int F$ be the integral of F on S considered as a particular case of the Weierstrass integral $(S) \int F(p, u)$ defined by L. Cesari for every surface S with $L(S) < +\infty$ [Ann. Scuola norm. sup. Pisa 13, 77—117 (1914)]. Finally let $V = (E'_3) \int \operatorname{div} f O(p, S) dx dy dz$. In a previous paper the author has proved that $V = J$ provided $L(S) < +\infty$ and $[S]_1 = 0$ (this Zbl. 43, 58). In the present paper the author shows that by convenient restriction of the class of surfaces S , the condition $[S]_1 = 0$ can be omitted. Let $T(w_1) = T(w_2)$ for every $w_1 \neq w_2$, $w_1, w_2 \in C$; that is, S is simple, and let D be the set of all interior points of S . For every (y, z)

let E_{yz} be the intersection of $D + [S]$ with the straight line through (y, z) parallel to the x -axis and let $I_{yz} \subset E_{yz}$ be the sum of all components of E_{yz} which are not single points. Let $D_1 = \sum I_{yz}$ where \sum ranges over all (y, z) , and $J_1 = (S) \int f_1 u_1$, $V_1 = (D_1) \int f_1 r dx dy dz$. Then $V_1 = J_1$ provided $L(S) < +\infty$. The present form of the Gauss-Green theorem is closer to a more restrictive statement due to H. Okamura (this Zbl. 45, 26). The proof is new and connected with the paper of the author quoted above and with various results of the reviewer (this Zbl. 27, 206; 40, 176). Also the conditions for the functions f_1, f_2, f_3 are replaced by weaker conditions of absolute continuity.

L. Cesari.

Goffman, Casper: One-one measurable transformations. Acta math. 89, 261—278 (1953).

Es seien I_n und I_m der n - bzw. m -dimensionale Einheitswürfel, f eine eindeutige Abbildung von I_n auf I_m derart, daß die Funktionen $f(x)$ und $f^{-1}(y)$ meßbar sind. Ist $m = n \geq 2$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Homöomorphie g von I_n auf I_m derart, daß $f(x) = g(x)$ und $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ ist auf Mengen, deren n -dimensionale Maße $> 1 - \varepsilon$ sind. (Für $m = n = 1$ ist dieser Satz falsch.) Ist $m > n \geq 1$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Homöomorphie g von I_n auf eine Teilmenge von I_m mit m -dimensionalem Maß $> 1 - \varepsilon$ derart, daß $f(x) = g(x)$ und $f^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ ist auf Mengen, deren n - bzw. m -dimensionales Maß $> 1 - \varepsilon$ ist. G. Nöbeling.

Dubovickij, A. Ja.: Über differenzierbare Abbildungen des n -dimensionalen Würfels in den k -dimensionalen Würfel. Mat. Sbornik, n. Ser. 32, 443—464 (1953) [Russisch].

Hauptergebnis: Es sei $u(\xi) = \{u_1(\xi), \dots, u_k(\xi)\}$ eine $(n - k + 1)$ -mal differenzierbare Abbildung des n -dimensionalen Würfels C_n in den k -dimensionalen Würfel C_k . Es sei Ω die Menge der singulären Punkte dieser Abbildung. Dann ist das k -dimensionale Maß der Menge $u(\Omega)$ null. Die Notwendigkeit der Voraussetzung beweist der Verf. durch das Beispiel einer $(n - k)$ -mal differenzierbaren Abbildung, die C_n auf C_k abbildet. Ferner wird für $u(\xi)$ gezeigt: Das Urbild fast aller Punkte besteht aus einer endlichen Anzahl von Komponenten, die $(n - k + 1)$ -mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten von der Dimension $n - k$ sind; wenn sie einen Rand haben, so liegt dieser auf dem Rande von C_n . Verf. ermäßigt sodann die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und zeigt: Wenn u $(n - k)$ -mal differenzierbar ist, so sind die Komponenten der Urbilder fast aller Punkte lokal zusammenhängend. Wird für u die $(n - k + 1 - r)$ -malige Differenzierbarkeit vorausgesetzt, so gilt: Es sei I'_y der Durchschnitt von Ω und dem Urbild von y . Dann ist das k -dimensionale Maß der Menge der Punkte y mit $\dim I'_y > r - 1$ null.

W. Thimm.

Puig Adam, P.: Sur les limites de certaines fonctions de partition. Revista mat. Hisp.-Amer. 13, 92—101 [Französisch], 102—111 (1953) [Spanisch].

Ein Intervall $[a, b]$ sei vorgegeben. Eine für jedes positive ganze n und jede Wahl der Größen x_0, \dots, x_n mit $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ definierte Funktion $\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_n)$ heißt eine Teilungsfunktion; diese heißt monoton wachsend, wenn es ein $\delta > 0$ so gibt, daß für $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ ($i = 0, \dots, n - 1$) bei Einführen eines neuen Teilpunktes ξ_j mit $x_i < \xi_j < x_{i+1}$ stets $\varphi(x_0, \dots, x_i, \xi_j, x_{i+1}, \dots, x_n) > \varphi(x_0, \dots, x_n)$ ist. Beispiele sind die Näherungssummen, die bei der Definition von bestimmten Integralen oder von Bogenlängen auftreten, sowie analoge Bildungen bei Produkten und Kettenbrüchen. Verf. zeigt in Verallgemeinerung der beim Existenzbeweis der bestimmten Integrale bekannten Schlüsse: Ist φ stetig für jedes feste n , ferner monoton wachsend und beschränkt und wird $\delta = \max |x_{i+1} - x_i|$ gesetzt, so existiert ein von der Wahl der Unterteilungen $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ unabhängiger Grenzwert $L(\varphi, a, b) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(x_0, \dots, x_n)$, und dieser Grenzwert ist gleich der oberen Grenze der $\varphi(x_0, \dots, x_n)$.

Verf. untersucht das so erhaltene Analogon des bestimmten Integrals. Er definiert das Analogon des uneigentlichen Integrals, er stellt ferner eine Bedingung dafür auf, daß $L(\varphi, a, x)$ als Funktion von x stetig ist, und er betrachtet solche Fälle, in denen die Ableitung $dL(\varphi, a, x)/dx$ existiert. Insbesondere kann man (unter passenden, durch die Monotonievoraussetzung bedingten Vorzeichenannahmen) eine Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ durch einen Ausdruck $y = L(\varphi, a, x)$ angeben, indem man als Werte der Teilungsfunktion φ diejenigen Größen wählt, die als Näherungswerte auftreten, wenn man Näherungslösungen der genannten Differentialgleichung mittels der Euler-Cauchyschen Polygonmethode konstruiert.

A. Stöhr.

Cafiero, Federico: Sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale di Stieltjes-Lebesgue negli spazi astratti, con masse variabili con gli integrandi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 488—494 (1953).

Es wird eine Reihe von Sätzen angekündigt, welche die bekannten Theoreme von Nikodym und Lebesgue über die Vertauschung von Grenzwert und Integral

auf den im Titel genannten Fall übertragen. Eine wesentliche Rolle spielen hierbei die beiden Begriffe: Gleichgradige Absolutstetigkeit hinsichtlich einer uneigentlichen Basis und gleichgradige Totaladditivität. Man vgl. hierzu Verf., dies. Zbl. **46**, 58, sowie die dort genannte Literatur. Es wird ein Beispiel angedeutet, welches belegt, daß sich der Satz von Vitali (Abschwächung der Konvergenz der Integranden zur Konvergenz f. ü.) auf den hier betrachteten allgemeinen Fall nicht übertragen läßt.

L. Schmetterer.

Lorentz, G. G.: An inequality for rearrangements. Amer. math. Monthly **60**, 176—179 (1953).

Es bedeute $f^*(x)$ die nicht-wachsende Umordnung von $f(x)$ [s. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934 (dies. Zbl. **10**, 107), pp. 276—277]. Verf. beweist, daß für eine stetige Funktion $\Phi(x, u_1, \dots, u_n)$ ($0 < x < 1$, $n \geq 0$)

$$\int_0^1 \Phi[x, f_1(x), \dots, f_n(x)] dx \leq \int_0^1 \Phi[x, f_1^*(x), \dots, f_n^*(x)] dx$$

dann und nur dann gilt, falls

$$\Phi(u_i + h, u_j + h) - \Phi(u_i + h, u_j) - \Phi(u_i, u_j + h) + \Phi(u_i, u_j) \geq 0,$$

$$\int_0^\delta [\Phi(x + t, u_i + h) - \Phi(x + t, u_i) - \Phi(x - t, u_i + h) + \Phi(x - t, u_i)] dt \geq 0$$

für jedes $h > 0$, $0 < \delta < x$, $\delta < 1 - x$, $j \neq i$ gilt. Hat Φ stetige zweite Derivierten, so gehen diese Bedingungen in $\partial^2 \Phi / \partial u_i \partial u_j > 0$, $\partial^2 \Phi / \partial x^2 \partial u_i < 0$ über. Spezialfälle: $\Phi = u_1 u_2$ (G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, l. c. p. 278), $\Phi = -\log(u_1 + \dots + u_n)$ (H. D. Ruderman, dies. Zbl. **46**, 51).

J. Aczél.

Dresher, Melvin: Moment spaces and inequalities. Duke math. J. **20**, 261—271 (1953).

Der Schwerpunkt einer nicht negativen Massenbelegung $d\Phi$ einer Raumkurve liegt in der konvexen Hülle der Kurve. Aus dieser einfachen Bemerkung werden Beweise der Ungleichungen von Hölder, Minkowski und Jensen abgeleitet, ferner die für $0 < r < 1 < p$ und für positive Funktionen f und g gültige Ungleichung

$$\left| \frac{\int (f + g)^p d\Phi}{\int (f + g)^r d\Phi} \right|^{1/p-r} \leq \left| \frac{\int f^p d\Phi}{\int f^r d\Phi} \right|^{1/p-r} + \left| \frac{\int g^p d\Phi}{\int g^r d\Phi} \right|^{1/p-r}$$

Für die Momente $\mu_a = \int x^a d\Phi(x)$, μ_b und μ_c ($0 < c < b < a$) einer Belegung $d\Phi$ der Strecke $0 < x < 1$ mit der Gesamtmasse 1 ergibt sich ebenso, daß der Punkt (μ_a, μ_b, μ_c) in der konvexen Hülle des Bogens (x^a, x^b, x^c) ($0 < x < 1$) liegt. Diese wird durch Ungleichungen vollständig gekennzeichnet. Das entsprechende Ergebnis für μ_1, μ_2, μ_3 und μ_4 wird ohne Beweis angegeben, Verallgemeinerungen werden in Aussicht gestellt.

H. Kneser.

Clemmow, P. C. and T. B. A. Senior: A note on a generalized Fresnel integral. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 570—572 (1953).

Verf. geben für das Integral $G(a, b) = b e^{i a^2} \int_a^\infty \frac{e^{-i \lambda^2}}{\lambda^2 + b^2} d\lambda$, das als eine Verallgemeinerung des Fresnelschen Integrals $F(a) = e^{i a^2} \int_a^\infty e^{-i \lambda^2} d\lambda$ betrachtet werden kann, verschiedene Beziehungen an, die für die Benutzung und Berechnung von Vorteil sein können, die aber hier nicht alle wiedergegeben werden können. Zum Schluß werden Hinweise auf Tabellenwerte und Funktionen gegeben, die mit den Fresnelschen Integralen in engem Zusammenhang stehen.

J. Picht.

Specht, Wilhelm: Eine mathematische Frage der Strahlentherapie. J. reine angew. Math. **191**, 92—96 (1953).

Zerlegt man ein Präparat \mathfrak{P} in Raumelemente dp der Strahlungsdichte $\sigma(p)$ und normiert die Gesamtstrahlung von \mathfrak{P} auf eins, so erreicht einen Außenpunkt a die Strahlungsintensität (1) $I = \int_{\mathfrak{P}} \frac{dp \sigma(p)}{|a-p|^3}$. Der Messung zugänglich ist im Versuch

aber nur die räumlich gemittelte Intensität, etwa bezüglich einer Einheitskugel \mathfrak{K} (2) $I^* = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathfrak{K}} d\mathfrak{k} \int_{\mathfrak{P}} \frac{dp \sigma(p)}{|a-p-k|^3}$. Mit den Beiwerten $I_n = \int_{\mathfrak{P}} \frac{dp \sigma(p)}{|a-p|^{2n}}$ gelingen

doppelseitige Schätzungen für $I^*(I)$, nämlich $I^* \leq \frac{3}{2} I$ und andererseits $I^* = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{(2n+1)(2n+3)} \geq 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_1^{n+1}}{(2n+1)(2n+3)}$. Die Abweichung der Werte

(1) und (2) ist damit leicht zu überblicken und kann tabelliert werden. *W. Maier.*

Mambriani, Antonio: Su la derivazione d'ordine qualsiasi. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 142—150 (1953).

Définition d'opérateurs de dérivation d'ordre quelconque sur un espace de fonctions pour lesquelles les intégrales indéfinies sont des primitives. Pour n entier > 0 , l'A. pose $D^n f = d^n f / dx^n$, $D^{-1} f = \int f(x) dx$ (dérivation indéfinie!), $D_{x_0}^{-1} f =$

$\int_{x_0}^x f(t) dt$ (dérivation définie!) et plus généralement $D_{x_0}^{-n} f = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$

et $D^{-n} f = D_{x_0}^{-n} f + D^{-n} 0$ avec $D^{-n} 0 = \sum_{k=1}^n c_k \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!}$ (c_k constante arbitraire).

Pour ν réel ou complexe quelconque, l'A. pose $D_{x_0}^{\nu} f = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{\nu-1}}{(-\nu-1)!} f(t) dt$

si $\Re \nu < 0$ et $D_{x_0}^{\nu} f = D^n D_{x_0}^{\nu-n} f$ avec $0 \leq \Re \nu < n$ pour $\Re \nu \geq 0$, puis $D^{\nu} 0 =$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(x-x_0)^{-\nu-k}}{(-\nu-k)!}$ (c_k constantes telles que la série soit convergente) et $D^{\nu} f = D_{x_0}^{\nu} f + D^{\nu} 0$.

Des applications sont annoncées.

A. Revuz.

Moppert, K.-F.: Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator. Commentarii math. Helvet. **27**, 140—150 (1953).

Verf. setzt für die im Intervall $x_0 < \xi \leq x_1$ definierte reelle Funktion $f(\xi)$

$$D^{\alpha} f(\xi)|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x_1 - x_0} \right)^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} f \left(x_1 - \nu \frac{x_1 - x_0}{n} \right).$$

Es ist $D^0 f(\xi)|_{x_0}^{x_1}(\xi) = f(x_1)$; ist $\alpha = 1, 2, \dots$ und ist $f^{(\alpha)}(\xi)$ in der Umgebung von x_1 stetig, so gilt $D^{\alpha} f(\xi)|_{x_0}^{x_1}(\xi) = f^{(\alpha)}(x_1)$. Ist $\alpha < 0$, ist $f(\xi)$ für $x_0 < \xi \leq x_1$ differenzierbar und ist $f(\xi) = O((\xi - x_0)^{-\beta})$ für $\xi \rightarrow x_0 + 0$ mit $\beta < 1$, so gilt

$D^{\alpha} f(\xi)|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\xi)}{(x_1 - \xi)^{\alpha+1}} d\xi$. Ist $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, \dots$, ist $f(\xi)$ für

$x_0 < \xi \leq x_1$ $([\alpha] + 1)$ -mal stetig differenzierbar und ist $f^{([\alpha] + 1)}(\xi) = O((\xi - x_0)^{-\beta})$ für $\xi \rightarrow x_0 + 0$ mit $\beta < 2$, so gilt

$$D^{\alpha} f(\xi)|_{x_0}^{x_1}(\xi) = \frac{d^{1+[\alpha]}}{dx_1^{1+[\alpha]}} \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\xi)}{(x_1 - \xi)^{\alpha - [\alpha]}} d\xi.$$

Einige Folgerungen; insbesondere wird die Frage untersucht, für welche Exponenten α, β die Beziehung $D^{\alpha} D^{\beta} = D^{\beta} D^{\alpha} = D^{\alpha + \beta}$ gilt.

A. Császár.

Boas jr., R. P.: Functions which are odd about several points. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **1**, 27—32 (1953).

L'A. studia alcune proprietà di una funzione $f(t)$ periodica, di periodo 1, la quale soddisfa all'equazione (1) $f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = 0$ per quasi tutti i valori di t . Fra l'altro viene provato: I. Se $f(t)$ è misurabile e soddisfa alla (1) e per due valori di x la cui differenza è razionale oppure per infiniti valori di x di $(0, 1)$, allora la $f(t)$ è quasi dappertutto costante. II. Se $f(t)$ è limitata su un insieme di misura positiva e soddisfa alla (1) per due valori di x razionalmente indipendenti, allora $f(t)$ è quasi dappertutto limitata (ma non necessariamente costante). III. Se $f(t)$ è limitata su un insieme di misura positiva e soddisfa alla (1) per un insieme di valori di x avente misura positiva, allora $f(t)$ è quasi dappertutto costante. IV. Se $f(t)$ è integrabile, periodica e soddisfa all'equazione $f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = h_x(t)$ per un insieme di valori di x di misura positiva, essendo $h_x(t)$ analitica nella striscia $|t| \leq \delta, \delta > 0$, allora $f(t)$ è analitica. L. Giuliano.

Aissen, Michael: A class of super-additive functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 360—362 (1953).

A_1, A_2, \dots, A_n denoting sets, f a real-valued function defined on all intersections of k of them for $k = 1, 2, \dots, n$, the Sylvester sum $\mathfrak{S}_f(A_1, \dots, A_n)$ is $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{C_k} f\left(\bigcap_{i=1}^k A_{m_i}\right)$, C_k representing any combination $(m_1, \dots, m_k, \dots, m_n)$ of k numbers out of $\{1, 2, \dots, n\}$. For an admissible set E in the plane $u(p; E)$ means the (unique) function (stress function) satisfying (a) $4u = -2, p \in E$, (b) $u = 0, p \notin E$. Theorem: Let E_v, E be admissible sets such that $E_v \subset E$ ($v = 1, 2, \dots, n$), then $u(p; E) = u(E) \geq \mathfrak{S}_u(E_1, E_2, \dots, E_n)$. Hint to the proof: Induction on n . If $c(p; X)$ denotes the characteristic function of X and $E = E_1 \cup \dots \cup E_k$, then $c(p; E) = \mathfrak{S}_c(E_1, \dots, E_k) = 0$. A is a linear operator. [Remark by the reviewer: The author's super-additive functions are G. Choquet's „fonctions monotones de tout ordre“. Set functions called „capacities“ satisfying inequalities of Sylvester type are systematically investigated in Choquet's notes, this Zbl. 43, 317; 46, 57.] Chr. Pauc.

Allgemeine Reihenlehre:

Fort, Tomlinson: Application of the summation by parts formula to summability of series. Math. Mag. 26, 199—204 (1953).

Wall, H. S.: Hausdorff means with convex mass functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 637—639 (1953).

Das Wirkfeld des Hausdorff-Verfahrens $\{H, q\}$ enthält genau dann das C_1 -Wirkfeld, wenn q eine Zerlegung $q = q_1 + q_2 + i(q_3 - q_4)$ gestattet, wo die $q_i \geq 0$, nichtabnehmend und konvex sind. Der Beweis schließt an Garabedian-Hille-Wall (dies. Zbl. 25, 38) an. Ein verwandtes Ergebnis über „totale Inklusion“ stammt von J. P. Leah (Diss., Toronto 1952). K. Zeller.

Gaier, Dieter: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. 58, 453—455 (1953).

Nachdem Hardy [Divergent Series, Oxford 1949 (dies. Zbl. 32, 58), S. 183] gezeigt hat, daß im allgemeinen (1) $e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s_r}{r!} x^r \rightarrow s(x \rightarrow \infty)$ nicht aus (2) $e^{-x} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s_{r-1}}{r!} x^r \rightarrow s$ gefolgert werden kann, gab Ref. (dies. Zbl. 3, 156) Bedingungen der Form $a_n \rightarrow M, \sum_{r=1}^n a_r = s_n$, und ähnliche an, damit (1) \leftarrow (2). Diese wurden von V. Garten (dies. Zbl. 13, 110) auf $a_n = O(n^k)$, dann von Ref. (dies. Zbl. 22, 17) bis auf $a_n = O(e^{n^q})$, $q < 1/3$, erweitert (wo sogar gezeigt wird, daß die angewandte Methode nicht einmal den Fall $q = 1/3$ zu überwinden erlaubt). Verf. zeigt nun durch überraschend einfache Überlegung, daß diese Bedingung sogar bis auf $a_n = O(K^n)$ erweitert werden

kann, also soweit, als das Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen positiven Konvergenzradius hat. Dies wird unmittelbar aus dem nachstehenden Satz gefolgert (welchen Verf. aus dem Phragmén-Lindelöfschen Prinzip ableitet): Satz 1. Die Funktion $f(z)$ sei in $R(z) > 0$ regulär, und es sei dort $|f(z)| \leq A e^{a|z|}$ für positive Konstanten A, a ; ferner sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ($z = x + i y$). Dann ist auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

J. Karamata.

Rajagopal, C. T.: On the relation of limitation theorems to high-indices theorems. *J. London math. Soc.* **28**, 322—329 (1953).

Von Austin (dies. Zbl. **44**, 285) wurden kürzlich untere Schranken angegeben für Größenordnungen u_n mit $a_n = O(u_n)$ für alle Reihen $\sum a_n$, die durch ein Verfahren (A, λ) summierbar sind. Diese Ergebnisse werden vom Verf. übertragen auf (Φ, λ) -summierbare Reihen. Dabei heißt eine Reihe $\sum a_n$ (Φ, λ) -summierbar, falls $\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q(\lambda_n t)$ für alle $t > 0$ konvergiert und $\lim_{t \rightarrow +0} \Phi(t)$ existiert. Die Funk-

tion $q(t)$ soll dabei für $t \geq 0$ stetig und monoton fallend sein, $q(0) = 1$, $q(\infty) = 0$, und zwei weitere Bedingungen erfüllen, die im wesentlichen besagen, daß $t q'(t) = O(1)$ ist. Verf. zeigt, daß für jede Folge $\{u_n\}$ mit $a_n = O(u_n)$ für alle (Φ, λ) -summierbaren Reihen $\sum a_n$ und $u_n \Phi(t \lambda_n) = O(1)$ ($n \rightarrow \infty, t > 0$ fest) die Beziehung $\mu_n = O(u_n)$ gilt, wo $\mu_n = \text{Max} \{ \lambda_n / (\lambda_{n+1} - \lambda_n), \lambda_{n-1} / (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \}$ sei. Ferner gilt: Werden durch ein Verfahren (Φ, λ) oder ein Rieszsches Mittel (λ, κ) nur Reihen mit $a_n = O(1)$ summiert, so ist $\liminf \lambda_{n+1} / \lambda_n > 1$. Im Falle der Rieszschen Mittel ist dies eine teilweise Umkehrung des „high-indices theorem“ [und ist eine unmittelbare Folge aus einem Satz von Jurkat (dies. Zbl. **42**, 294, Satz 5)]. Unter gewissen Voraussetzungen über $q(t)$ summieren die Verfahren (Φ, λ) mit $\liminf \lambda_{n+1} / \lambda_n > 1$ nur konvergente Reihen.

Rajagopal, C. T.: On a one-sided Tauberian theorem: a further note. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **17**, 33—42 (1953).

Anschließend an die Arbeit von W. B. Pennington [*Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 557—565 (1952)] ergänzt Verf. seinen Satz A (vgl. dies. Zbl. **46**, 65), wie folgt: Satz C:

Sei für $u \geq 0$: $\varphi(u)$ positiv, zweimal differenzierbar, $\varphi'(u) \leq 0$, $\varphi(0) = 1$ und $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u} du$ konvergent; sei weiter $a(u)$ reell, integrierbar in jedem endlichen Intervall, $a(u) = 0$ für $0 \leq u < 3$ und $u a(u) \lg \lg u \leq -W$, $W > 0$, für $u \geq 3$. Aus (1) $\int_0^{\infty} \varphi(u t) a(u) du \leq M$ für $t > 0$ folgt dann (2) $\limsup_{x \rightarrow \infty} \int_0^x a(u) du \leq M + W$.

— Satz c: Wird im Satz C die Voraussetzung (1) durch $\int_0^{\infty} \varphi(u t) a(u) du \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +0$) ersetzt, so folgt anstatt der Behauptung (2), daß $\int_0^x a(u) du \rightarrow -\infty$, ($x \rightarrow \infty$). Entsprechende Sätze werden weiter auf Reihen, d. h. Verfahren der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi(\lambda_n t)$, $\lambda_{n-1} < \lambda_n \rightarrow \infty$, ($\lambda_0 = 1$), und speziell auf die Rieszschen typischen Mittelbildungen übertragen.

J. Karamata.

Rajagopal, C. T.: A generalization of Tauber's theorem and some Tauberian constants. *Math. Z.* **57**, 405—414 (1953).

Es handelt sich um einen Beitrag zu einer vereinheitlichenden Theorie „Tauberscher Konstanten“. Der mitgeteilte Satz ist vom selben Typus wie die in früheren Untersuchungen vom Verf. (dies. Zbl. **40**, 322) und von H. Delange (dies. Zbl. **39**, 64) veröffentlichten Erweiterungen der Verallgemeinerung des Tauberschen Satzes für Abel-summierbare Reihen mit der Nebenbedingung $n a_n = O(1)$ auf andere Summierbarkeitsverfahren, umfaßt jedoch neben den Hadwiger-Agnewschen Ergebnissen ein entsprechendes Resultat für das Borelsche Verfahren, wo

es die Taubersche Konstante $1/2\pi$ liefert. Anwendungen auf Riesz-, Laplace-, Abel-, Lambert- und Stieltjes-Summierbarkeit beschließen die Arbeit, deren Hauptsatz lautet: $A(u)$ sei eine Funktion von beschränkter Schwankung ($u \geq 0$), es sei $\psi(x, u) \geq 0$ für alle hinreichend großen x und jedes $u \geq 0$, $A(u)$ sei eine im engeren Sinne monoton wachsende, unbeschränkte, differenzierbare Funktion, $V(u)$ die Umkehrfunktion von $A(u)$, $f(x) = y$ sei eine stetige, im engeren Sinne wachsende unbeschränkte Funktion. Über die Kernfunktion $\psi(x, u)$ der linearen Integraltransformation [Ψ -Transformation von $A(u)$] $\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, u) A(u) du$ wird weiter

vorausgesetzt: $\psi\{x, V(yu)\} \partial V(yu)/\partial u \rightarrow N(u)$ für jedes $u > 0$, $x \rightarrow \infty$. Es sei $N_{x,y}(u) = 0$ für $0 \leq u < A(0)y$ bzw. $= \psi\{x, V(yu)\} \partial V(yu)/\partial u$ für $u \geq A(0)y$ und $N_{x,y}(u) \leq F(u)$ für alle hinreichend großen x und jedes $u \geq 0$, wobei $F(u)$ und $F(u) \log u$ in $(0, \infty)$ integrierbar vorausgesetzt werden. Endlich sei noch $\lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{u \leq u' \leq \lambda u} |A(u') - A(u)| \leq K \log \lambda$ für $A(u) =$

$\lambda A(u)$, $\lambda > 1$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \Psi(x) - A\{V(f(x))\} \int_0^\infty \psi(x, u) du \right| \leq K \int_0^\infty N(u) |\log u| du$.

V. Garten.

Sonnenschein, J.: Sur une classe de procédés de sommation. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 537—542 (1953).

$H(t, \alpha)$ habe die Eigenschaft $\int_0^\infty e^{-st} H(t, \alpha) dt = e^{-\alpha h(s)}$, wo $h(0) = 0$, $h(s) \neq 0$ für $s \neq 0$. Dann wird ein Limitierungsverfahren definiert durch: ver-

allgemeinerter Limes von $\varphi(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gleich $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty H(t, \alpha) \varphi(t) dt$, wenn die rechte Seite existiert. Beispiel: $H(t, \alpha) = t^{\alpha-1} e^{-t}/\Gamma(\alpha)$, $h(s) = -\log(s+1)$. Das entsprechende Verfahren erfüllt die Permanenzbedingung. G. Doetsch.

Bosankquet, L. S.: The summability of Laplace-Stieltjes integrals. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 267—304 (1953).

Es gibt in der Theorie der Cesàro-Summierbarkeit von Laplace-Stieltjesintegralen eine Reihe von Umformungen und Bedingungen, deren genaue Gültigkeitsgrenze nicht bekannt ist. Als Beispiel sei die Formel für die Summierbarkeitsabszisse genannt. Für die Gültigkeit dieser Formel wird vorausgesetzt, daß diese Abszisse positiv ist. In der vorliegenden Arbeit untersucht nun Verf., gestützt auf Überlegungen von Austin, Borwein, Isaacs, Tatchell u. a. den genauen Geltungsbereich bei einer Reihe von Sätzen dieser Art. Die Vielzahl der Ergebnisse verbietet, sie in einem Referat im einzelnen aufzuführen. Es handelt sich um eine systematische Untersuchung der beiden folgenden Fragestellungen (sie sind in gewisser Weise miteinander verwandt). 1. Es seien die beiden Laplace-Integrale

(1) $\int_0^\infty e^{-su} dA(u)$ und (2) $\int_0^\infty e^{-su} A(u) du$ gegeben [$A(u)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall]. Wann kann von der C_α -Summierbarkeit von (1) auf die C_α -Summierbarkeit von (2) geschlossen werden und umgekehrt ($\alpha > 1$)?

2. Wann kann von der C_α -Summierbarkeit von (1) auf das Bestehen einer Beziehung

$A_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (x-u)^\alpha dA(u) = o(e^{\alpha x})$ geschlossen werden und umgekehrt ($\alpha > 0$)? Entsprechende Untersuchungen werden durchgeführt für absolute Summierbarkeit. Ferner werden die Ergebnisse übertragen auf Mellinintegrale $\int_0^\infty v^{-s} b(v) dv$.

Einige der Ergebnisse werden in einem Anhang allgemeinen Sätzen über Integraltransformationen untergeordnet. A. Peyrerimhoff.

Chow, H. C.: On the summability $[C]$ of a power series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 152—160 (1953).

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \sum_{n=0}^\infty a_n r^n e^{ni\theta}$ besitze den Konvergenzradius 1. ferner sei

$k > 0$ und (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} |a_n| < \infty$. Ist $a_n = O(n^\gamma)$ für ein γ mit $-1 \leq \gamma < k-1$ [dann ist (2) von selbst erfüllt], so ist (1) in jedem regulären Randpunkt $[C, k]$ -summierbar [Chow, Sci. Record 2, 20–21 (1947)]. Ziel der jetzigen Arbeit: Die $[C, k]$ -Summierbarkeit von (1) in einem Randpunkt hängt nur von dem Verhalten von $f(z)$ in der Umgebung des Punktes ab, insbesondere hat man $[C, k]$ -Summierbarkeit in jedem regulären Randpunkt. Genauer: Sei θ eine Stelle im Innern des Bogens (α, β) von $|z| = 1$; die Reihe für $f(e^{i\theta})$ ist genau dann $[C, k]$ -summierbar, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-k} \left| \int_{\alpha}^{\beta} z^{-n} f'(z) Q(z) dz \right| < \infty$ gilt, wobei $|z| = r = 1 - n^{-1}$ und $Q(z) = (e^{i\theta} - z)^{-k} + c_0 + c_1 z$ ist und c_0, c_1 durch $Q(e^{i\alpha}) = Q(e^{i\beta}) = 0$ bestimmt sind. Die ähnliche Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-k} \left| \int_{\alpha'}^{\beta'} d\theta \int_{\alpha}^{\beta} z^{-n} f'(z) Q(z) dz \right| < \infty$ (z wie zuvor) ist hinreichend dafür, daß $\sum a_n e^{ni\theta} [C, k]$ -summierbar ist für fast alle Punkte eines Bogens (α', β') mit $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. Anwendung zur Aufstellung einfacherer Kriterien, z. B.: Ist $0 \leq \gamma < 1$ und $f'(z) = O(|e^{i\theta_0} - z|^{-\gamma})$ in der Umgebung der Stelle $e^{i\theta_0}$, so ist $\sum a_n e^{ni\theta_0} [C, k]$ -summierbar. — Weitere Literatur: A. C. Offord, dies. Zbl. 4, 60. W. Meyer-König.

Wollan, G. N.: On Euler methods of summability for double series. Proc. Amer. math. Soc. 4, 583–587 (1953).

Für die beiden Eulerschen Verfahren der Ordnung $q > 0$ für Doppelfolgen $\{A_{mn}\}$

$$(1) \quad A_{mn}^q = (q+1)^{-m-n-2} \sum_{h,k=0}^{m,n} \binom{m+1}{h+1} \binom{n+1}{k+1} q^{m+n-h-k} A_{hk},$$

$$(2) \quad B_{mn}^q = (q+1)^{-m-n} \sum_{h,k=0}^{m,n} \binom{m}{h} \binom{n}{k} q^{m+n-h-k} A_{hk}.$$

gilt: Für Folgen A_{mn} mit beschränktem B_{mn}^q sind beide Verfahren äquivalent; sonst ist (2) (im engeren Sinn) stärker als (1). Für (2) mit $q = 1$ gilt ein o -Tauber-satz mit der Umkehrbedingung $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (m^{1/2} + n^{1/2}) (mn)^{1/2} a_{mn} = 0 \left(A_{mn} = \sum_{h,k=0}^{m,n} a_{hk} \right)$.

Beweise analog zum Fall einfacher Folgen.

A. Peyerimhoff.

Ščeglov, M. P.: Über beschränkte Folgen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 145–147 (1953) [Russisch].

Sei s_n eine beschränkte Folge, σ_n ihre C_1 -Transformierte, $\varphi(u)$ ihre Abel-Transformation. Verf. untersucht die Beziehungen zwischen $\varliminf s_n$, $\varliminf \sigma_n$, $\varliminf \sigma_{n_k}$, $\varliminf \varphi(u)$, $\varliminf \varphi(u_k)$ (n_k, u_k geeignet gewählt). Typische Folgerungen: Ist $\varliminf s_n = \varliminf \sigma_n = \alpha$, so ist auch $\varliminf \varphi(u) = \alpha$. Existiert $\lim \varphi(u_k)$, so auch $\lim \sigma_{n_k}$. Vgl. Ščeglov, dies. Zbl. 42, 68. K. Zeller.

Schoenberg, I. J.: On smoothing operations and their generating functions. Bull. Amer. math. Soc. 59, 199–230 (1953).

Wiedergabe eines Vortrags, der Gegenstände aus verschiedenen Gebieten und von zahlreichen Autoren unter dem Gesichtspunkt der „glättenden Operation“ zusammenfaßt. I. Stabilität glättender Formeln. Es wird die lineare Transformation $y_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{m-\nu} x_\nu$

betrachtet unter folgenden Voraussetzungen: a) Die erzeugende Funktion $F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu z^\nu$ ist analytisch in einem Ringgebiet, das den Kreis $|z| = 1$ enthält. b) $a_m = a_{-m}$. c) Die charakteristische Funktion $\varphi(u) = F(e^{iu}) = a_0 + 2a_1 \cos u + 2a_2 \cos 2u + \dots$ hat eine Entwicklung $\varphi(u) = 1 - \lambda u^{2k} + \dots$ ($\lambda \neq 0$). d) $|\varphi(u)| < 1$ für $0 < u < 2\pi$. (Dies letztere charakterisiert die Transformation als „glättende Formel“.) Dann ergibt sich für die Koeffizienten der n -fach iterierten Transformation $y_m^{(n)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{m-\nu}^{(n)} x_\nu$ die asymptotische Relation $a_\nu^{(n)} = (\lambda n)^{-1/2k} G_k(\nu(\lambda n)^{-1/2k}) + o(n^{-1/2k})$ für $n \rightarrow \infty$, wo die G_k ganze Funktionen sind (für $k = 1$

die Gaußsche Funktion $e^{-x^2/4} 2|\pi|$. II. Variationsvermindernde Transformationen

der Form $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ($i = 1, \dots, m$). Ihre Definition: Wenn $r(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel der x_k ist, $r(y)$ entsprechend für die y_i , so soll $r(y) \leq r(x)$ sein für alle Werte der x_k . Die Transformation ist variationsvermindernd, wenn die Matrix $A = \|a_{ik}\|$ total positiv ist, d. h. alle Minoren ≥ 0 sind. Wenn der Rang der Matrix gleich n ist, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß immer $r(y) \leq n-1$ ist, die Bedingung, daß alle nichtverschwindenden Minoren von A der Ordnung n dasselbe Zeichen haben. Dieser Satz läßt interessante Anwendungen auf konvexe Kurven und die isoperimetrische Ungleichung im R_m zu. III. Variations-

vermindernde Transformationen vom Faltungstypus $q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x-t) f(t) dt$.

„Variationsvermindernd“ heißt hier: Es sei $r(f)$ die obere Grenze der Anzahl der Zeichenwechsel von $f(x_1), \dots, f(x_n)$ ($-\infty < x_1 < \dots < x_n < +\infty$, $n = 2, 3, \dots$), entsprechend für g ; dann soll $r(g) \leq r(f)$ für jedes beschränkte f sein. Die Transformation ist dann und nur dann variationsvermindernd, wenn $A(x)$ oder $-A(x)$ eine Pólyasche Frequenzfunktion ist, d. h. $A(x) \geq 0$,

$0 < \int_{-\infty}^{\infty} A(x) dx < \infty$, $\det \|A(x_i - t_j)\|_{1,n} \geq 0$ für jedes System $x_1 < \dots < x_n$, $t_1 < \dots < t_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Diese speziellen $A(x)$ stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den ganzen

Funktionen der Gestalt $\Psi(s) = C e^{(\gamma + \sum \delta_v^2) s} \prod_{v=1}^{\infty} (1 + \delta_v s) e^{-\delta_v s}$ ($C > 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta_v \geq 0$, δ_v reell,

$0 < \gamma + \sum \delta_v^2 < \infty$): es ist $\frac{1}{\Psi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} A(x) dx$ (zweiseitige Laplace-Transformation) in dem vertikalen Holomorphiestreifen von $1/\Psi(s)$, der den Nullpunkt enthält. Durch den Differentialoperator $\Psi(D)$ wird die obige Transformation vom Faltungstypus umgekehrt. IV. Variationsvermindernde Transformationen der Form $y_n = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_{n-v} x_v$. In Analogie

zum vorigen gilt: Die Transformation ist dann und nur dann variationsvermindernd, wenn die Folge a_n total positiv (d. h. die Matrix a_{ij} hat nur nichtnegative Minoren) und normiert ist, d. h. $\sum a_n = \infty$. Eine solche Folge hat als erzeugende Funktion eine in $0 < z < \infty$ meromorphe Funktion der Gestalt

$$F(z) = C e^{a+bz^{-1}} z^m \prod_1^{\infty} (1 + \alpha_v z) \prod_1^{\infty} (1 + \beta_v z^{-1}) \left/ \prod_1^{\infty} (1 - \gamma_v z) \prod_1^{\infty} (1 - \delta_v z^{-1}) \right.$$

[$C > 0$, $a, b \geq 0$; m ganz; $\alpha_v, \beta_v \geq 0$; $0 \leq \gamma_v, \delta_v < 1$, $\sum (\alpha_v + \dots + \delta_v) < \infty$] und umgekehrt. Als Anwendung wird die Frage behandelt: Es liege eine Transformation der Gestalt $f(x) =$

$\sum_{v=-\infty}^{\infty} y_v L(x-v)$ vor, wo L eine ganze Funktion mit gewissen Eigenschaften ist. Wann erfüllt

die Transformation $f(n) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} L(n-v) y_v$ (n ganz) die unter I erwähnte Stabilitäts- oder Glättungsbedingung $q(n) = 1$? Zum Schluß wird eine Reihe von ungelösten Problemen aus diesen Gebieten aufgeführt.

G. Doetsch.

Mohr, Ernst: Elementarer Beweis für die Partialbruchzerlegung des Cotangens. Z. angew. Math. Mech. 33, 247—248 (1953).

Jacobsthal, Ernst: Über das arithmetische und geometrische Mittel. II. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 5—6 (1953).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Whittaker, J. M.: A two-point boundary problem for infinitely differentiable functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 136—141 (1953).

It is well-known that all integral functions of sufficiently slow growth can be represented by Lidstone's series, and hence are determined by a knowledge of $f^{(p_n)}(1)$, $f^{(q_n)}(0)$, when $p_n = 0, 2, 4, \dots$; $q_n = 0, 2, 4, \dots$. For a general pair of sequences $\{p_n, q_n\}$ Whittaker (this Zbl. 8, 169) proposed the following problem: Let $\{p_n, q_n\}$ be any complete pair of sequences and $f(z)$, $g(z)$ any integral functions. Is it always possible to find an integral function $h(z)$ such that $h^{(p_n)}(1) = f^{(p_n)}(1)$, $h^{(q_n)}(0) = g^{(q_n)}(0)$, ($n = 1$)? [Note. $\{p_n, q_n\}$ is a complete pair if the operators $f^{(p_n)}(1)$, $f^{(q_n)}(0)$ form a basic set.] This problem has not yet been solved for integral functions, but Whittaker here gives a solution for real functions of a real variable. Let $f(x)$

possess derivatives of all orders in $-\infty < x < \infty$. Theorem 1. Given any complete pair $\{p_n, q_n\}$ and any sequences $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, a function $f(x)$ can be found such that $f^{(p_n)}(1) = A_n$, $f^{(q_n)}(0) = B_n$ ($n \geq 1$). Theorem 3. Let $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ be any sequences. Then there is a function $f(x)$ such that $f^{(n)}(a_n) = A_n$ ($n \geq 0$). The proofs are based on results the author obtains in lemmas on trigonometric polynomials. He also poses the question: Given $f(x)$, is there a function $g(x)$ of the same kind such that $g(x+1) - g(x) = f(x)$?, and gives a proof in the case of functions of another sort, viz., integral functions, when the result is known as Guichard's theorem.

N. A. Bowen.

Inozemcev, O. I.: Zur Theorie der besten Annäherung einer Funktion von mehreren Veränderlichen mit Hilfe ganzer Funktionen endlicher Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 15—18 (1953) [Russisch].

Une fonction entière $g(z_1, \dots, z_n)$ est dite d'ordre σ si

$$\sigma = \overline{\lim} \{(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{-1/2} \log |g(z_1, \dots, z_n)|\}.$$

D'autre part, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ étant une fonction continue ≥ 1 , C_φ est l'espace, normé par $\|f\|$, des fonctions continues $f(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant

$$\|f\| = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < +\infty} \{|f(x_1, \dots, x_n)| / \varphi(x_1, \dots, x_n)\} < \infty;$$

G_σ est l'ensemble des fonctions entières $g(z_1, \dots, z_n)$ d'ordre σ telles que $g(x_1, \dots, x_n) \in C_\varphi$. φ vérifiant des conditions supplémentaires d'expression assez complexe, l'A. donne des théorèmes qui lient la meilleure approximation de $f \in C_\varphi$ par les fonctions de G_σ avec le module de continuité (convenablement défini au moyen du poids φ) de la dérivée p -ième de f prise dans une direction arbitraire.

G. Bourion.

Šaginjan, A. L.: Über die besten Annäherungen durch harmonische Polynome im Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 141—144 (1953) [Russisch].

In analogy to results for ordinary polynomials, the author first proves that if a harmonic polynomial of degree n has an upper bound M on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, then at any point of the closed sphere its p -th partial derivatives satisfy a bound of the form $CM(n/\varrho)^p$, where C may depend on p ; the proof is based on a work of T. H. Gronwall, Math. Ann. **74**, 213—270 (1913). There follow, without details of the deduction, two results on best approximations. For the first let S be a smooth surface with principal radii of curvature satisfying $1/R_1^2 + 1/R_2^2 \leq \text{const.}$, and $f(P)$ a continuous function defined on S such that the error $E_n(f)$ in the best approximation by harmonic polynomials of order n satisfies $E_n(f) < \omega(n)/n^p$, and

$\omega(x)$ is non-decreasing with $\int_0^\infty \omega(x) x^{-1} dx < \infty$; there is then a harmonic function $F(P)$ which takes the boundary values $f(P)$ and which has certain continuity properties. The second such result connects $E_n(F)$, for F defined and harmonic in a sphere, with the modulus of continuity of $\partial^p F / \partial r^p$. Combining these results he can connect the modulus of continuity of the general p -th partial derivative with that of the p -th radial derivative.

F. V. Atkinson.

Vekua, I. N.: Über die Vollständigkeit eines Systems von harmonischen Polynomen im Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 495—498 (1953) [Russisch].

Als Hauptergebnis wird die Vollständigkeit des Systems der „harmonischen Polynome“

$$U_{nm} = r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \quad (m \leq n)$$

auf einer beliebigen geschlossenen Fläche S gezeigt, wenn diese den Raum in zwei Gebiete zerlegt und noch gewissen Regularitätsbedingungen genügt („Liapounoff'sche Fläche“). Daraus werden noch verschiedene Sätze über Entwicklungen nach dem zu U_{nm} in bezug auf S gehörigen Orthonormalsystem hergeleitet, z. B.: Jede im Inneren D_i von S harmonische und in $D_i + S$ stetige Funktion kann in $D_i + S$ gleichmäßig durch die U_{nm} approximiert werden. Verschiedene

Verallgemeinerungen, z. B. für das Äußere D_e von S , für mehrfach zusammenhängende Bereiche und höhere Dimensionen werden erwähnt. *K. Prachar.*

Ibragimov, I. I.: Über die beste Annäherung von Funktionen, deren s -te Ableitung eine Unstetigkeit erster Art hat. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 973—975 (1953) [Russisch].

Ibragimov, I. I.: Über die beste Annäherung im Mittel einer Funktion, deren s -te Ableitung im Intervall $[-1, 1]$ beschränkte Variation hat. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 13—15 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um Funktionen, $f(x)$, deren s -te Ableitung (s nicht notwendig ganz, aber positiv) $q(x)$ einen Sprung macht. Verf. teilt einige Formeln über die beste Annäherung $E_n(f)$ mit; die nicht ausgeführten Beweise schließen sich an Nikol'skij (dies. Zbl. 29, 28; vgl. auch Ibragimov, dies. Zbl. 37, 178) an. Als Beispiel sei eine der Formeln mitgeteilt: unter gewissen Voraussetzungen über $q(x)$ gilt $E_n(f) \sim (2 \Gamma(s+1))^{-1} \chi \lambda(s, 1, 1) n^{-s} (n \rightarrow \infty)$; darin ist χ im wesentlichen die Sprunghöhe, $\chi = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\varphi(x+0) - \varphi(x-0)| (1-x^2)^{1/2}$, und

λ ist durch die beste Annäherung für die Funktion $V_{s-1}(x-c; a, b) = [a(x-c) + b|x-c|] |x-c|^{s-1}$ erklärt, nämlich $\lambda(s, a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s E_n(V_{s-1}(x; a, b))$.

Die zweite Note bringt die übliche Übertragung der Betrachtungen auf die beste Annäherung im Mittel, und zwar bei allgemeineren Annahmen über $q(x)$. *W. Hahn.*

Bernštejn, S. N.: Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine beinahe wachsende, gerade Funktion eine schwache Gewichtsfunktion ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 487—490 (1953) [Russisch].

Die Funktion $H(x)$ heißt „beinahe wachsend“, wenn $H(x) \rightarrow a > 0$ ist und eine von x und y unabhängige Konstante c derart existiert, daß $H(y) \leq c H(x)$ für $0 < y/x < 1$ ist. (Bezüglich „schwache Gewichtsfunktion“ vgl. dies. Zbl. 50, 70). Das Kriterium erweitert das im zitierten Ref. genannte: Es sei $H(x)$ eine beliebige ganze Funktion eines Grades $p > 0$; es sei $H(0) = 0$, der Betrag $|H(x)|$ sei gerade und nicht größer als $\varphi(x)$; mit $\alpha_k = i \beta_k$ seien die Nullstellen von $H(x)$ bezeichnet. Die Funktion $\varphi(x)$ ist dann und nur dann eine schwache

Gewichtsfunktion, wenn die obere Grenze des Ausdrucks $|H(0)| \sum_k \frac{2|\beta_k|}{(\alpha_k + \beta_k)^2}$, wobei $H(x)$ variiert, unendlich ist. — Zwei weitere Sätze charakterisieren Funktionen, die keine schwachen Gewichtsfunktionen sind. *W. Hahn.*

Bernštejn, S. N.: Schwache Gewichtsfunktionen und Majoranten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 703—706 (1953) [Russisch].

An die Stelle des im vorigen Ref. angeführten Ausdrucks, der mit Hilfe der Nullstellen von $H(x)$ gebildet ist, kann auch $\int_0^\infty x^{-2} \log \left| \frac{H(x)}{H(0)} \right| dx$ treten.

Verf. gewinnt aus den beiden Kriterien eine Reihe von Bedingungen dafür, daß eine Funktion eine gewöhnliche oder schwache Gewichtsfunktion oder eine Majorante [vgl. Bernštejn, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 65, 117—120 (1949)] ist.

W. Hahn.

Merli, Luigi: Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII, Ser. 14, 18—21, 194—197 (1953).

Considerata una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $(-1, 1)$, con eccezione dell'origine ove presenta una discontinuità di prima specie, e supposto $f(0) = 0$, nelle Note in esame si mostra che il fenomeno rilevato dall'A. (questo Zbl. 39, 66) nel caso in cui il polinomio di interpolazione di Hermite $H_r(x)$ era costruito prendendo come punti fondamentali gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima

specie, si ripresenta nella stessa forma nel caso in cui la costruzione di $H_r(x)$ viene fatta, assumendo come punti fondamentali gli zeri dei polinomi ultrasferici di Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$, con $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

S. Cinquni.

Livingston, Arthur E.: Some Hausdorff means which exhibit the Gibb's phenomenon. Pacific J. Math. 3, 407—415 (1953).

Das reguläre Hausdorffsche Mittel der Ordnung n mit dem Kern $g(x)$ für die Folge s_k ist definiert durch

$$h_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k \int_0^1 t^k (1-t)^{n-k} dg(t),$$

wo $g(x)$ von beschränkter Variation in $0 \leq x \leq 1$, $g(1) - g(0) = 1$, $g(+0) = g(0)$. Nach O. Szász (dies. Zbl. 39, 294) wird als Gibbssches Verhältnis für den Kern g

definiert $F(g) = \max_{A>0} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \text{Si}(Ax) dg(x)$ mit $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. (Wenn $F(g) > 1$,

so zeigt die Folge h_n rechts von $x=0$ das Gibbssche Phänomen.) Satz 4.1. $\alpha(x)$ sei die Treppenfunktion $\alpha(x) = \alpha_1 = 0$ ($0 \leq x < \beta_1$), $= \alpha_k$ ($\beta_{k-1} \leq x < \beta_k$, $k = 2, \dots, N$), $= \alpha_{N+1} = 1$ ($\beta_N \leq x \leq 1$), wo $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}$ und die β_1, \dots, β_N linear unabhängig über den rationalen Zahlen sind. Dann ist $F(\alpha) > 1$. — Satz 5.1. Wenn $\alpha(x)$ nur zwei Sprünge hat, so gilt der Satz auch ohne die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit.

G. Doetsch.

Tandori, Károly: Bemerkung zur Divergenz der Fourierreihen stetiger Funktionen. Publ. math., Debrecen 2, 191—193 (1953).

Mit Hilfe der Fejérschen Methode wird auf Grund einer Idee von L. Neder die Existenz der Fourierreihe einer nach 2π periodischen, stetigen Funktion $f(x)$ nachgewiesen, so daß zwar ihre Partialsummen gleichmäßig beschränkt bleiben, die Fourierreihe aber auf einer Menge, die in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, divergiert.

V. Garten.

Hammersley, J. M.: A non-harmonic Fourier series. Acta math. 89, 243—260 (1953).

It was proved by Levinson [Gap and density theorems, New York 1941, this Zbl. 26, 215] that, if $1 < p < 2$ and if there exists a D such that $|\lambda_n - n| \leq D < (p-1)/2p$, then any function $f(x) \in L^p$ in $(-\pi, \pi)$ can be represented by a series of the form $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x}$ in the same way as by its Fourier series. On the other hand, an example was given with no such D and for which the conclusion is false. Nevertheless, the above condition is not best possible. The author constructs a certain sequence $\{\lambda_n\}$, for which $\lambda_n - n \rightarrow -1/2$, so that Levinson's condition is not satisfied, but every function $f(x) \in L$ is represented by its λ_n -series. An application of this series to a problem in agricultural Botany is given.

W. W. Rogosinski.

Hirschman jr., I. I.: Fractional integration. Amer. J. Math. 75, 531—546 (1953).

Let $u(\vartheta) \in L^p$ and let $u(\vartheta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\vartheta}$ be its complex Fourier series. It is further assumed that $a_0 = 0$. If $\alpha > 0$, then the fractional integral of order α for u is defined by $u_\alpha(\vartheta) \sim \sum a_n (in)^{-\alpha} e^{in\vartheta}$; and, if $0 \leq \rho < 1$, then $u_\alpha(\varrho, \vartheta) = \sum a_n (i\tilde{n})^{-\alpha} \varrho^{|\tilde{n}|} e^{in\vartheta}$ is defined for all α . The main results obtained are the following inequalities: (i) $A' \int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|^p d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\int_0^{2\pi} |u_\alpha(\vartheta + \tau) - u_\alpha(\vartheta - \tau)|^2 \tau^{-(2\alpha+1)} d\tau \right]^{1/2p}$
 $\leq A'' \int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|^p d\vartheta$; $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$. (ii) $A' \int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|^p d\vartheta$
 $\int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\int_0^{2\pi} (1-\varrho)^{1-2\alpha} |u_{\alpha-1}(\varrho, \vartheta)|^2 d\varrho \right]^{1/2p} \leq A'' \int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|^p d\vartheta$; $1 < p < \infty$, $\alpha < 1$.

Here A' and A'' are positive constants depending only on p and α . These are generalisations of earlier results by Littlewood and Paley (this Zbl. 15, 254) and by Zygmund [Trans. Amer. math. Soc. 55, 170–204 (1944)]. W. W. Rogosinski.

Bari, N. K.: Eine Verallgemeinerung der Ungleichungen von S. N. Bernštejn und A. A. Markov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 701–702 (1953) [Russisch].

Mitteilung zweier Sätze ohne Beweis. 1. Es sei T_n ein trigonometrisches Polynom n -ten Grades, und im Intervall $[a, b]$ sei die Norm $\|T_n\|_p$ im Raum L^p ($p \geq 1$) nicht größer als M . Dann ist in jedem ganz in $[a, b]$ gelegenen Intervall $[a', b']$ $\|T'_n\|_p \leq C(a', b') n M$, wobei die Konstante C nur von a' und b' abhängt. 2. Unter den gleichen Voraussetzungen ist $\|T'_n\|_p \leq C(a, b) n^2 M$ in $[a, b]$. (Neu ist dabei die Verallgemeinerung auf die Norm $\|T_n\|_p$.) 3. Ist $\|T'_n(x) \sin x\|_p \leq M$ für $-\pi \leq x \leq +\pi$, so ist im gleichen Intervall $\|T_n(x)\|_p \leq C n M$, wobei C eine absolute Konstante ist. W. Hahn.

Spezielle Funktionen:

Agostinelli, Cataldo: Sulle funzioni epicicloidali. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 473–477 (1953).

Corput, J. G. van der: On the integral from zero to infinity of the power of e with exponent $-p e^x + q e^{rx} + s x$. Nieuw. Arch. Wiskunde, III. R. 1, 99–104 (1953).

Im Gebiet $|\arg p| < \pi$, $\operatorname{Re}(r) < 1$ sei $\int_0^\infty t^{s-1} \exp(-pt - qt^r) dt = G(p, q, r, s)$. Wird $s(r)$ eingeschränkt durch $\Gamma(kr + s) \neq \infty$ für $k = 0, 1, \dots$, so bleibt

$$G(p, q, r, s) = p^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p^{-r} q)^k}{k!} \Gamma(kr + s) = \sum_{h,k=0}^{\infty} \frac{(-p)^h q^k}{h! k! (h - kr - s)}.$$

Mit Hilfe Besselscher Funktionen ergibt sich im Sonderfall $s = 0(1)$, daß z. B.

$$G(p, q, -1, s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \left(\frac{q}{p} \right)^{s/2} J_{-s} \left(2 \sqrt{pq} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{p}{q} \right)^{n/2}}{s + n} J_n \left(2 \sqrt{pq} \right).$$

W. Maier.

Tricomi, Francesco G.: Determinazione dei limiti per $n \rightarrow \infty$ degli estremi relativi dell' n -esimo polinomio di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 107–109 (1953).

Zählt man die Extrema des n -ten Legendreschen Polynoms vom Punkt $+1$ an nach links und bezeichnet den Absolutwert des r -ten Extremums mit $\mu_{r,n}$, so ist $\lim \mu_{r,n} = J_0(j_{1,r})$ worin $j_{1,r}$ die r -te Nullstelle der ersten Besselschen Funktion bedeutet. Verf. gewinnt dieses Ergebnis (die Existenz des fraglichen Limes ist von Villari, dies. Zbl. 47, 307, bewiesen worden) aus einer früher abgeleiteten [Tricomi, Commentarii math. Helvet. 25, 196–204 (1951)] asymptotischen Formel für die Legendreschen Polynome. W. Hahn.

Humbert, Pierre: A propos des fonctions de Bessel à deux variables. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 67, 19–22 (1953).

Für die durch $J_n(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{n-k}(x) J_k(y)$ definierten Besselfunktionen mit zwei Veränderlichen werden für $n = 0, 1, 2$ symbolische Darstellungen abgeleitet, wie z. B. $J_0(x, y) = (pq/r s) (P^4 Q^2 + 1) (P^4 Q^2 - 1)$, wo p, q die x, y entsprechenden symbolischen Veränderlichen sind, $P = p + r$, $Q = q + s$, $r = \sqrt{1 + p^2}$, $s = \sqrt{1 + q^2}$. Für $x = 2\sqrt{t}$, $y = t$ ergibt sich hieraus eine, nicht gerade einfache, Integralsdarstellung für $J_0(2\sqrt{t}, t)$. O. Volk.

Toscano, Letterio: Sulle derivate dei polinomi di Laguerre e del tipo ultrasferico rispetto al parametro. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 193–195 (1953).

Die verallgemeinerten Polynome von Laguerre hängen bekanntlich außer von dem Argument und der stets ganzzahligen Ordnungszahl n noch von einem Parameter μ ab, der beliebig veränderlich sein kann. Das gleiche gilt von den verwandten Jacobischen Polynomen. Die Arbeit beschäftigt sich mit den Ableitungen dieser Polynome nach dem Parameter und stellt eine Reihe allgemeiner Beziehungen dafür auf.

H. Buchholz.

Merli, Luigi: Sopra alcune disuguaglianze riguardanti i polinomi ultrasferici di Jacobi. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 151—155 (1953).

In continuazione di alcune ricerche di G. Szegö (questo Zbl. 32, 275), G. Sansone (questo Zbl. 34, 191), G. Szasz (questo Zbl. 37, 330) e di una dello stesso A. (questo Zbl. 42, 305), si dimostra in modo rapido e diretto che se $P_n^\lambda(x)$ è l' n -mo polinomio ultrasferico di Jacobi e $F_n^\lambda(x) = P_n^\lambda(x)/P_n^\lambda(1)$, se $1 < \lambda < 2$ e $0 < k < n(n + \lambda + 1)/[n(n + \lambda - 1) + \lambda]$ sussiste per ogni x la disuguaglianza $[F_n^\lambda(x)]^2 - k F_{n-1}^\lambda(x) F_{n-1}^\lambda(x) > 0$.

G. Sansone.

Seidel, W.: Note on a persymmetric determinant. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 150—151 (1953).

Sei $D_n(\lambda, x) = |P_{i-j}^{(\lambda)}(x)/P_{i-j}^{(\lambda)}(1)|$ ($i, j = 0, 1, \dots, n-1$), $P_n^{(\lambda)}$ ultrasphärische Polynome, $\lambda > 0$. Für diese Determinante gilt (1) $D_n(\lambda, x) = C_n(\lambda) (x^2 - 1)^{n(n-1)/2}$. Ziel der Note ist ein einfacher Beweis für die von Burchnall stammende Formel

$$C_n(\lambda) = 2^{n(n-1)} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{r! \{(\lambda)_r\}^2}{(2\lambda)_{2r} (2\lambda + r - 1)_r} \quad (n \geq 2).$$

Verwendet wird dabei $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^{(\lambda)}(0)}{P_n^{(\lambda)}(1)} t^{n+1} = 1 + t {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \lambda + \frac{1}{2}, -t^2\right)$. Durch

Kettenbruchentwicklung von ${}_2F_1$ (nach Gauß) erhält man (1) für den Spezialfall $x = 0$.

K. Prachar.

Schäfer, Friedrich Wilhelm: Das Additionstheorem der Mathieschen Funktionen. Math. Z. 58, 436—447 (1953).

Zugrunde gelegt werden zwei elliptische Koordinatensysteme in der Ebene von beliebiger gegenseitiger Lage und Orientierung. Eine Lösung der zweidimensionalen Schwingungsgleichung $u + k^2 u = 0$, welche in einem dieser Koordinatensysteme separiert, also ein Produkt einer Mathieschen Funktion und einer modifizierten Mathieschen Funktion ist, läßt sich nach separierten Lösungen der zweidimensionalen Schwingungsgleichung im anderen Koordinatensystem entwickeln. Zur Herleitung dieser Entwicklungen wird von drei Sätzen ausgegangen. Der erste ist ein Satz für die Entwicklung von Funktionen mit der Eigenschaft $f(t + 2\pi) = e^{2\pi i \nu} f(t)$ (ν beliebig komplex) nach Mathieschen Funktionen derselben Eigenschaft. Der zweite sagt aus, daß jede Lösung der zweidimensionalen Schwingungsgleichung bei geeigneter Wahl des Integrationswegs als Kern einer Integralbeziehung zwischen Mathieschen Funktionen und modifizierten Mathieschen Funktionen dienen kann. Nach dem dritten Satz gibt es eindeutig bestimmte modifizierte Mathiesche Funktionen (Lösungen der Differentialgleichung $y'' - (\lambda - 2h^2 \cos z)y = 0$), die sich asymptotisch für $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ wie die Zylinderfunktionen erster bis vierter Art vom Argument $2h \cos z$ verhalten. — Die gefundene Reihenentwicklung ergibt, indem man das eine oder das andere elliptische Koordinatensystem zu ebenen Polarkoordinaten ausartens läßt und für die noch verfügbaren Parameter geeignete spezielle Werte wählt, als Spezialfälle Entwicklungen von Exponentialfunktionen oder Zylinderfunktionen nach Mathieschen Funktionen oder umgekehrt alle wichtigen Reihenentwicklungen aus der Theorie der Mathieschen Funktionen, etwa nach Exponentialfunktionen oder Zylinderfunktionen, insbesondere auch die Siegerschen Reihen für die modifizierten Mathieschen Funktionen nach Produkten von Bessel- und Zylinderfunktionen der Argumente $h e^{-z}$ und $h e^z$. Arten beide elliptische Koordinatensysteme zu Polarkoordinaten aus, so ergibt sich das bekannte Additionstheorem der Zylinderfunktionen.

J. Meixner.

Wannier, Gregory H.: Connection formulas between the solutions of Mathieu's equation. Quart. appl. Math. 11, 33—59 (1953).

ke y sei die Lösung von $d^2 f/dy^2 - (a + 2q \cosh 2y)f = 0$ mit dem asymptotischen Verhalten ke $y \sim \exp[-k e^y]/(k e^y)^{1/2}$ für $y \gg 0$. Gilt $a + 2q < 0$, so folgt für $y \ll 0$: ke $y \sim \exp[k e^y] + \Phi(a, k)/(k e^y)^{1/2}$. Mit Hilfe der WKB-Methode [siehe z. B. H. Jeffreys, Proc. London math. Soc., II. Ser. 23, 428—436

(1925)] werden nun obere und untere Schranken für $\Phi(a, k)$ mit dem Ansatz $ky = A(y) e^{-S(y)}$ bei $(dS/dy)^2 = a + 2q \cosh 2y$ bestimmt und graphisch dargestellt. — In Analogie zu den Hankelschen Funktionen definiert Verf. nun $h e^{(r)} (\pm \pi/2 + i y) = k e y$ ($r = 1, 2, 3, 4$). Mit Hilfe dieser Funktionen wird das Verhalten der Lösungen der Mathieschen Differentialgleichung $d^2 f/dy^2 + (a - 2q \cos 2y) f = 0$ im Komplexen beschrieben, und Relationen zwischen ihnen werden abgeleitet.

W. Haacke.

Wedel, Arnold Marion: Applications of Volterra's theory of composition to hypergeometric functions. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 275—276 (1953).

Slater, L. J.: Two double hypergeometric integrals. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 127—131 (1953).

Es handelt sich um die Ableitung von zwei Doppelkonturintegralen, welche eine allgemeine Transformation von hypergeometrischen Doppelreihen gestatten. Das erste Integral wird in vier Einzelintegrale zerlegt, deren Auswertung auf einen vierfachen Reihenausdruck führt. Die Konvergenz-Bedingungen für die Gültigkeit der Integral-Formeln werden angegeben. Ein zweites Doppelintegral wird in analoger Weise behandelt.

M. J. O. Strutt.

Meijer, C. S.: Expansion theorems for the G -functions. III. Indagationes math. 15, 43—49 (1953) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 43—49 (1953).

Fortsetzung der gleichbenannten Arbeiten M I, M II des Verf.; Berichte B I, B II darüber in dies. Zbl. 48, 307 und 308. Hier gewinnt Verf. den Hauptsatz 3: Wenn die Annahmen B I (2), (3) und für $j = 1, \dots, l$; $h = 1, \dots, m$ die weiteren $\operatorname{Re}(c_j - b_h) < 1$ zutreffen, ist (erster Entwicklungssatz)

$$(1) \quad \frac{1}{\prod_{j=1}^l \Gamma(1 - c_j)} G_{p+1, q+1}^m(\lambda w \mid c_1, \dots, c_l, a_1, \dots, a_p \mid b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_l) \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} {}_{l+1}\varphi_l(-r, 1 - c_1, \dots, 1 - c_l; 1 - d_1, \dots, 1 - d_l; \lambda) G_{p+1, q+1}^m(w \mid 0, a_1, \dots, a_p \mid b_1, \dots, b_q, r).$$

wo in den Koeffizienten rechts eine Abwandlung der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen erscheint,

$$(2) {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^h \prod_{j=1}^p [\alpha_j(\alpha_j + 1) \cdots (\alpha_j + h - 1)] / h! \prod_{j=1}^q \Gamma(\beta_j + h).$$

Die vom Verf. erörterten Bedingungen der Gültigkeit des Satzes 3 im Ausnahmefalle $q = p$ und der Zusammenhang der Zweige der G -Funktionen seien hier übergangen, weil sie Seitenstücke zu Aussagen in M I, II und diese in B I, II ausführlich wiedergegeben sind. Dagegen werde hier der nicht ganz einfache Gang des Beweises der (für $l = 0$ nach Satz 1 richtigen) Formel (1) im Falle $p = q$ geschildert; Verf. führt ihn, (1) für $l = k$ als richtig annehmend, durch vollkommene Induktion in bezug auf l , wie folgt: Der Umriß D laufe entlang der reellen Achse x in der u -Ebene von 0 bis $1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$), längs eines mit ε um 1 im Gegenzeigersinn beschriebenen Kreises und entlang x von $1 - \varepsilon$ nach 0 zurück. Man bestimme das Integral

$$J = \int_D G_{p+k, q+k}^m(\lambda u w \mid c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_p \mid b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_k) U du, \quad U = u^{-c_{k+1}} (u-1)^{c_{k+1}-d_{k+1}-1},$$

indem man den Bestandteil G des Integranden durch das Umrißintegral B I (1) ersetzt und das Integral $\int_D u^r U du$ nach einer bekannten Gamma-Formel (3) ausrechnet, die sich auf die Integration binomischer Differentiale längs D bezieht. Nach Umkehrung der Integrationsfolge ergibt sich

$$(3) \quad J = \Gamma(1 + d_{k+1} - c_{k+1}) G_{p+k+1, q+k+1}^m(\lambda w \mid c_1, \dots, c_{k+1}, a_1, \dots, a_p \mid b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_{k+1}).$$

Wenn man jetzt (1) für $l = k$ und für den Wert uw (statt w) der Unabhängigen mit U multipliziert und beiderseits längs D nach u integriert, erhält man nach (3) und der für gewisse Funktionen (2) aus (3) folgenden Formel

$$\int_D {}_{k+1}\varphi_k(-r, 1 - c_1, \dots, 1 - c_k; 1 - d_1, \dots, 1 - d_k; \lambda u) U du \\ = \frac{2\pi i \Gamma(1 - c_{k+1})}{\Gamma(1 + d_{k+1} - c_{k+1})} {}_{k+2}\varphi_{k+1}(-r, 1 - c_1, \dots, 1 - c_{k+1}; 1 - d_1, \dots, 1 - d_{k+1}; \lambda)$$

in der Tat die Beziehung (1) mit $l = k + 1$. — Beim Vollzug der geschilderten Schritte erweisen sich verschiedene Annahmen über die Konstanten [wie $\operatorname{Re} c_{k+1} < 1$] als zweckmäßig, deren Entbehrlichkeit Verf. im letzten Teil der Arbeit nachweist.

L. Koschmieder.

Agarwal, R. P.: On the partial sums of series of hypergeometric type. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 441—445 (1953).

Ausgehend von einer Formel Bailey's für Basisreihen [J. London math. Soc. **4**, 254—257 (1929)] beweist Verf. die Beziehung

$$\prod_{n=0}^M \frac{(1 - A q^n) (1 - E q^n) (1 - A q^n / DE) (1 - D q^n)}{(1 - A q^n / D) (1 - A q^n / E) (1 - DE q^n) (1 - q^n)} \\ \times {}_8\phi_7 \left[\begin{matrix} X, q \sqrt{X}, -q \sqrt{X}, q X / C, A / DE, C q^M, D, E; q \\ X, -X, C, DE q^{M+1}, A q / C, q X / D, q X / E \end{matrix} \right]$$

bis zum $(N + 1)$ -ten Gliede = dem gleichen Ausdrücke, nur M und N vertauscht, wobei $X = A q^M$, sowie eine entsprechende Formel für die gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen ($q \rightarrow 1$). Daraus lassen sich durch Spezialisierung insbesondere die dem Ramanujanschen Satze analogen Beziehungen ableiten.

O. Volk.

Skovgaard, H.: Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$. Math. Z. **58**, 448—452 (1953).

Die zuerst von Kienast und dann in vereinfachter Form von F. G. Tricomi [Math. Z. **52**, 669—675 (1950)] erfolgte Berechnung der Anzahl aller positiven und negativen Nullstellen der Kummerschen Funktion $F(a, c, z)$ für alle möglichen reellen Werte der beiden Parameter a und c wird in der vorliegenden Arbeit noch weiter vereinfacht. Zu diesem Zweck werden drei besondere Lehrsätze aufgestellt und bewiesen und mit deren Hilfe und mittels der Sturmschen Theoreme die Richtigkeit der früher gefundenen Sätze über die Anzahl der Nullstellen erneut bestätigt.

H. Buchholz.

Funktionentheorie:

Valiron, Georges: Sur une construction de H. Poincaré. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 239—243 (1953).

Poincaré s'est proposé de démontrer que si $f(z)$ est holomorphe pour $\Im z > 0$ et $f_1(z)$ holomorphe pour $\Im z < 0$, on peut trouver deux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ telles que φ soit holomorphe dans tout le plan sauf le long du segment $(-1, +1)$ de l'axe réel, ψ soit holomorphe dans tout le plan sauf le long des deux segments $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$ de l'axe réel, $\varphi + \psi = f$ pour $\Im z > 0$ et $\varphi + \psi = f_1$ pour $\Im z < 0$. L'A. complète les raisonnements de Poincaré, qu'il juge insuffisants.

J. Dufresnoy.

Andress, W. R.: The expansion of a function in terms of its values and derivatives at several points. Amer. math. Monthly **60**, 394—396 (1953).

Pour une fonction holomorphe $f(x)$, l'A. exprime d'abord $f(x_0) - f(a)$ au moyen d'un polynôme en $x_0 - a$ à coefficients dépendant des dérivées $f'(x_0), \dots, f^{(m)}(x_0)$ d'une part, $f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$ d'autre part, avec un reste écrit comme intégrale de contour. La „généralisation“ donnée ensuite est en réalité la forme classique pour le cas complexe de la formule d'interpolation dite de Newton (cf. N. E. Nörlund. Leçons sur les séries d'interpolation, Paris 1926; p. 10 et 11).

G. Bourion.

Nassif, M.: On the mode of increase of simple sets of polynomials of given zeros. Proc. math. phys. Soc. Egypt **4**, Nr. 4, 29—36 (1953).

Im Anschluß an die Untersuchungen von Whittaker (Sur les séries de base de polynômes quelconques, Paris 1949, dies. Zbl. **38**, 228) werden Polynombasen der Gestalt $(z + a_i)^{mk+i}$ (k fest, $m = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots, k - 1$) untersucht; die Punkte a_i sind gegeben. Verf. zeigt, daß der einfachste „Satz“ dieser Art von der Ordnung 1 und vom Typ r^{-1} ist, worin r die Wurzel eines mit den a_i gebildeten Exponentialpolynoms ist. Als Hilfssatz wird bewiesen: Ein einfacher „Satz“ von

Polynomen der fraglichen Gestalt und sein inverser haben das gleiche Wachstum, wenn sie beide von positiver Ordnung und von positivem Typ sind. — Durch ein Zahlenbeispiel werden Ergebnisse von Eweida (dies. Zbl. 30, 29) numerisch verbessert.

W. Hahn.

Makar, Ragy H.: On algebraic simple monic sets of polynomials. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 56, 250—257 (1953).

Eine Polynomfolge $p_i(z) = \sum_{j=0}^i p_{ij} z^j$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) heißt einfach monisch, wenn $p_{ii} = 1$ für alle i ist; sie heißt algebraisch von Grade m , wenn die Koeffizientenmatrix (p_{ij}) einer algebraischen Gleichung m -ten Grades genügt. Bezeichnet man mit (π_{ji}) die inverse Matrix und setzt $\omega_n(R) = \sum_{i=0}^n \pi_{ni} \max_{|z|=R} |p_i(z)|$, so ist der Grenzwert $= \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} [\log \omega_n(R)] / n \log n$ die Ordnung der Polynom-

folge. (Bezüglich der analytischen Bedeutung dieser Begriffe vgl. Whittaker, Sur les séries de base de polynomes quelconques, Paris 1949, dies. Zbl. 38, 228; R. und B. H. Makar, dies. Zbl. 38, 229.) Verf. beweist: Ist $p_i(z)$ eine einfach monische Folge vom Grade 3 und der Ordnung ω , so ist die Potenzfolge $\{p_n(z)\}^r$, d. h. die Folge mit der Koeffizientenmatrix $(p_{ij})^r$, von einer Ordnung Ω mit $\omega/2 \leq \Omega \leq 2\omega$. Die Grenzen können wirklich erreicht werden. (r ist dabei beliebig rational.) 2. Ist $\{p_n(z)\}$ von der Ordnung 2, so gilt dasselbe für alle rationalen Potenzen der Folge.

W. Hahn.

Al'per, S. Ja. und V. V. Ivanov: Über die Annäherung von Funktionen durch Teilsommen einer Reihe von Faberschen Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 325—328 (1953) [Russisch].

La frontière I' du domaine de Jordan D est formée par un nombre fini d'arcs à tangente continue, se raccordant avec des angles extérieurs non nuls. $f(z)$ est analytique dans D , $f(z)$ et $f^{(p)}(z)$ continues sur \bar{D} . Dans ces hypothèses, utilisant l'évaluation donnée par S. N. Mergelyan [Uspechi mat. Nauk 7, 2 (48), 31—122 (1952)] pour la meilleure approximation de $f(z)$ par des polynomes de degré n , les AA. obtiennent pour l'approximation de $f(z)$ par la somme partielle de degré n de son développement en série de polynomes de Faber une majoration qui est exactement du même ordre de grandeur.

G. Bourion.

Gnanadoss, A. A.: Periodically recurring series. Math. Student 20, 119—121 (1953).

Folgender Satz wird bewiesen: Genügen die Koeffizienten $u(n)$ einer Potenzreihe (1) $\sum u(n) x^n$ einer Relation

$$u(n+3) = a(n)u(n+2) + b(n)u(n+1) + c(n)u(n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wobei $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ mit K periodisch sind (K ganze Zahl), so stellt (1) eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion $f(x)$ dar; dieselbe ist überdies rational und der Nenner ist von der Form $1 - p x^K - q x^{2K} - r x^{3K}$ (p, q, r Konstante).

D. Gaier.

Waadeland, Haakon: On some transcendental equations. II, III. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 42—45, 46—49 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 46, 83). Für die Lösungen der Gleichungen $\cos z \cos z = \pm 1$, $\operatorname{tg} x = x$ und $\operatorname{tg} x = 2x$ werden von mehreren Autoren, darunter von Euler und Lord Rayleigh, Potenzreihenentwicklungen aufgestellt, deren Konvergenz aber noch nicht untersucht wurde. Der Autor schätzt die Konvergenzradien ab und findet, daß die Reihen alle konvergieren, möglicherweise mit Ausnahme der Reihe, die die kleinste positive Wurzel von $\cos z \cos z = -1$ liefern soll.

G. Lochs.

Roux, Delfina: Sul comportamento delle serie di potenze sugli archi di regolarità. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 210—212 (1953).

Noble, M. E.: On Taylor series with gaps. J. London math. Soc. **28**, 197—203 (1953).

On suppose que la série $\sum_0^\infty a_n z^n$, qui définit dans son cercle de convergence $|z| < 1$ une fonction $f(z)$, présente une infinité de lacunes: $a_m = 0$ pour $n_k < m \leq N_k$ assez larges pour que $\varphi(n_k) = o(N_k - n_k)$, en désignant par $\varphi(n)$ la majorante concave de $\log(|a_n| + \epsilon)$. Soit z_0 un point frontière du cercle-unité en lequel $f(z)$ ait une limite $A(z_0)$ quand $z \rightarrow z_0$ ($|z| < 1$): moyennant une hypothèse supplémentaire, vérifiée en particulier si $f(z) - A(z_0) = o(|z - z_0|^\alpha)$ avec $\alpha > 0$, l'A. établit la convergence vers $A(z_0)$ de la suite des sommes partielles $\sum_0^{n_k} a_n z_0^n$. Ce résultat étend un théorème de P. Erdős et C. Piranian (ce Zbl. **30**, 152) en remplaçant l'hypothèse de régularité de $f(z)$ en z_0 par une hypothèse de continuité; la démonstration s'inspire de celle de W. H. Young pour son extension du théorème de Fatou-Riesz.

G. Bourion.

Rajagopal, C. T.: A note on power series. Math. Student **20**, 99—106 (1953).

Si considera la classe di funzioni: $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, tali che $a_0 \geq 0$, $\Re f(z) \leq A$ in $|z| < 1$, per le quali stabilisce l'A. qualche proprietà generali che, in certo grado, estendono i conosciuti teoremi di Landau e Hardy per la classe di funzioni $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ tali che $|f(z)| \leq M$, in $|z| < 1$. Le proprietà in questione riguardano l'andamento di $m(r) = \sum_{n=0}^\infty |a_n| r^n$, per $0 < r < 1$, e la limitazione dalla parte reale di $\sigma_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v(z)$ essendo $s_n(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$. Per la classe di funzioni — intermezza fra i due precedenti — che soddisfano alla condizione: $|\Re f(z)| \leq A$, dimostra che $|\Re s_n(z)| \leq A L_n$ ove L_n è la costante di Lebesgue. Questo notevole risultato si ottiene appoggiandosi in la proprietà del valore massimo del modulo delle funzioni armoniche.

J. M^a. Orts.

Thron, W. J.: A class of meromorphic functions having the unit circle as a natural boundary. Duke math. J. **20**, 195—198 (1953).

The following theorem is shown: If the continued fraction $1 + K_{n=1}^\infty (d_n z^{\alpha_n}/1)$, where α_n is a positive integer and $d_n \neq 0$ for all $n \geq 1$, satisfies the conditions $\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n|^{1/\alpha_n} = 1$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$, and $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_n/h_{n-1} = \infty$ where $h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k$, then the function to which this continued fraction converges for $|z| < 1$ has the unit circle as a natural boundary.

E. Frank.

Iliev, Ljubomir: Reihen nach Faberschen Polynomen, deren Koeffizienten endlich viele Werte annehmen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 499—502 (1953) [Russisch].

Ein bekannter Satz von Szegő lautet: Nehmen die Koeffizienten c_n der Reihe $f(z) = \sum c_n z^n$ nur endlich viele Werte an, so ist $f(z)$ rational oder über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar. Verf. zeigt: Unter den gleichen Annahmen ist $\sum c_n \Phi_n(z)$ über C_1 nicht fortsetzbar, wenn die c_n nicht periodisch sind. Dabei bedeuten: $\Phi_n(z)$ die Faberschen Polynome eines einfach zusammenhängenden Gebietes G_∞ , das ∞ enthält und dessen Rand ein beschränktes Kontinuum ist, das mehr als einen Punkt enthält; die Funktion $w = \Phi(z) = z + c_0 + c_1/z + \dots$ möge G_∞ auf $|w| > \rho$ konform abbilden, und es wird angenommen, daß $\rho < 1$ ist; C_1 ist das Bild von $|w| = 1$. [Die $\Phi_n(z) = \Phi_n(z; G_\infty)$ sind dann bekanntlich durch $(\Phi(z))^n = \Phi_n(z) + b_1^{(n)}/z + \dots$ erklärt.] Für $\Phi_n(z) = z^n$ folgt das Ergebnis von Szegő.

K. Prachar.

San Juan, Ricardo: Untersuchung zweier Hardyscher Reihen. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **13**, 128—145 (1953) [Spanisch].

Als Beispiel dafür, wie naturgemäß die vom Verf. früher studierte „radiale Fortsetzung“ bei Potenzreihen ist, werden zwei von Hardy [*Messenger Math.* **43**, 58—61 (1914) und *Divergent Series*, Oxford, 1919, dies. Zbl. **32**, 58] behandelte Reihen untersucht, die von Hardy als Beispiele dafür angeführt werden, daß ein und dasselbe Summationsverfahren zu zwei Funktionen führen kann, die nicht analytische Fortsetzungen voneinander sind. I. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$ hat die Borelsche Summe $\int_0^{\infty} \exp\left(-t - \frac{t^2}{z^2}\right) dt$ in $\Re z^2 > 0$, stellt aber in $\Re z > 0$, $\Re z^2 > 0$, d. h. $|\varphi_1| < \pi/4$, und $\Re z < 0$, $\Re z^2 > 0$, d. h. $3\pi/4 < \varphi \leq 5\pi/4$, verschiedene Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ dar. Verf. stellt fest: Beide Funktionen approximieren die Reihe asymptotisch in jedem Winkel mit dem Scheitel 0 und einer Amplitude $< \pi$, aber sie sind „optimale Approximationen“ und „normale radiale Fortsetzungen“ nur in $\Re z > 0$ bzw. $\Re z < 0$; die analytische Fortsetzung der einen in die Halbebene der anderen erscheint als eine der vielen asymptotischen Approximationen, die sich durch Addition einer Funktion mit verschwindender asymptotischer Entwicklung ergeben. — Die gegebene Reihe ist im wesentlichen die erste der bekannten Cauchyschen Reihen für die Fresnelschen Integrale, und die radialen Summen dieser

Reihen ergeben in der Tat die Fresnelschen Integrale. — II. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ mit den Koeffi-

zienten $a_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{v^n}{\nu!}$ hat die Borelsche Summe $\int_0^{\infty} \exp(-t - e^{-t} z) dt$, die einerseits in $\Re z \geq 0$ und andererseits für negativ reelle z konvergiert und zwei verschiedene Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ darstellt. f_1 ist optimale Approximation in jeder Halbebene, die im Inneren der längs der negativ reellen Achse aufgeschnittenen Ebene liegt; f_2 in jeder Halbebene $\Re z \leq a < 0$. [f_2 ist ganz, f_1 meromorph mit Polen auf der negativ reellen Achse, die Differenz ist gleich $\Gamma(z+1)$.] f_1 ist normale radiale Fortsetzung auf jedem Strahl der aufgeschnittenen Ebene, f_2 auf der negativ reellen Achse. G. Doetsch.

Azpeitia, A. G.: Über eine Verallgemeinerung der Fresnelschen Integrale. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **13**, 61—80 (1953) [Spanisch].

In Verallgemeinerung der ersten der beiden von R. San Juan (vgl. vorhergeh. Referat) behandelten Reihen wird die Reihe ($k > 1$)

$$(1) \quad H_{2k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2k)^{(2k-1)n+2k-2} (2k-1) \cdots (2kn-1) \left(\frac{z}{2k}\right)^{2k(n+1)-2}$$

[das Glied $n=0$ bedeutet $(2k)^{2k-2} (2k)^{2k-2}$] betrachtet. Ihre Stieltjesische Summe ist

$$(2) \quad H_{2k}(z) = (S) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2k-1) \cdots (2kn-1)}{(2k)^n} z^{2k(n+1)-2} = \frac{2k z^{2k-2}}{\Gamma[(2k-1)/2k]} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k-2} \exp(-t^{2k})}{1 + (tz)^{2k}} dt.$$

Diese ist in jedem der $2k$ Sektoren S_j : $(2k-1)\pi/2k < \arg z < (2k-1)\pi/2k$ analytisch, stellt aber dort verschiedene Funktionen dar. Auf dem Wege über eine Differentialgleichung erster Ordnung, der $H_{2k}(z)$ genügt, wird festgestellt, daß H_{2k} in S_j identisch ist mit

$$F_{2k,j}(z) = 2k \exp(z^{-2k}) \left[\frac{e^{i\pi\lambda/k}}{2k} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2k}\right) - \int_0^{1/z} \exp(-s^{2k}) ds \right].$$

$F_{2k,j}$ ist in S_j die „optimale asymptotische Approximation“ der Reihe (2). — Durch die $F_{2k,j}$

lassen sich die Integrale (3) $I_{2k}(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} t^{2k} dt$, $J_{2k}(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} t^{2k} dt$ ausdrücken, die für $k=1$ mit den Fresnelschen zusammenfallen. Für $z \rightarrow \infty$ wird das Resultat von Z. Koutsky (dies. Zbl. **40**, 21) $\int_0^{\infty} \cos t^{2k} dt = \frac{\Gamma(1/2k)}{2k} \cos \frac{\pi}{4k}$, $\int_0^{\infty} \sin t^{2k} dt = \frac{\Gamma(1/2k)}{2k} \sin \frac{\pi}{4k}$ ($k=1$) wieder-

gefunden. [Dies ergibt sich auch aus seit langem bekannten asymptotischen Abschätzungen für $\int_0^z \exp(it^{2k}) dt$, $k \geq \frac{1}{2}$.] — Benutzt man für $F_{2k,j} - H_{2k}$ die Reihe (2), so erhält man für (3) asymptotische Entwicklungen, welche die Cauchyschen Entwicklungen für die Fresnelschen Integrale verallgemeinern. — Ebenso kann man unter Verwendung des Integrals (2) die Funktionen (3) durch Integrale darstellen. G. Doetsch.

Tanaka, Chuji: On the convergence-abcissas of the generalized factorial series. *Proc. Amer. math. Soc.* **4**, 150—160 (1953).

Es handelt sich um die (verallgemeinerte) Fakultätenreihe

$$(1) \quad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n [(s + \lambda_1) \cdots (s + \lambda_n)]^{-1},$$

s komplex, $\lambda_n = r_n e^{i\Phi_n}$, wobei $r_n \rightarrow \infty$ und $|\Phi_n| \leq \Phi < \pi/2$ ($n = 1, 2, \dots$). Literatur: E. Landau, S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss., München **36**, 151–218 (1906); S. Pincherle, Rend. Circ. mat. Palermo **37**, 379–390 (1914); G. Belardinelli, Rend. Circ. mat. Palermo **47**, 193–208 (1923); T. Fort, Trans. Amer. math. Soc. **31**, 233–240 (1929) und Bull. Amer. math. Soc. **36**, 244–258 (1930). Verf. kommt im Falle reeller λ_n über die früheren Ergebnisse hinaus. Sind alle $\Phi_n = 0$, so besitzt (1) eine Konvergenzabszisse σ_s , eine Abszisse σ_u gleichmäßiger Konvergenz und eine Abszisse σ_a absoluter Konvergenz, wobei $\sigma_s = \sigma_u \leq \sigma_a$; die Stellen $-\lambda_n$ der s -Ebene sind dabei samt beliebig kleinen Umgebungen von der Betrachtung auszuschließen. Ist $\sum 1/r_n < \infty$, so ist (1) für $s = s_0 \pm -\lambda_n$ genau dann (absolut) konvergent, wenn $\sum a_n$ (absolut) konvergiert; sind zudem alle $\Phi_n = 0$, so ist also $\sigma_s = \sigma_u = \sigma_a = -\infty$ bzw. $\sigma_s = \sigma_u = -\infty$, $\sigma_a = \infty$ bzw. $\sigma_s = \sigma_u = \sigma_a = \infty$, falls $\sum a_n$ absolut konvergiert bzw. bedingt konvergiert bzw. divergiert. Im Falle $\sum 1/r_n = \infty$, $\Phi_n = 0$ werden explizite Formeln für $\sigma_s = \sigma_u$ und σ_a angegeben, z. B.: $\sigma_s = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log |\sum a_n|$, $\sigma_a =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log \sum |a_n|, \text{ wobei } \Sigma \text{ für } [x] \leq l_n < x \text{ zu nehmen ist mit } l_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}; \text{ ferner } \sigma_a - \sigma_s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} l_n^{-1} \log n.$$

W. Meyer-König.

Artémiadès, Nicolas: Sur les séries de Dirichlet à deux variables. Bull. Sci. Math., II. Sér. **77**, 48–51 (1953).

Gegeben ist die Reihe (1) $\sum_{m,n} a_{mn} e^{\lambda_m X + \mu_n Y}$, $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \lambda_m \rightarrow \infty$, $0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots, \mu_n \rightarrow \infty$, a_{mn} komplex, X und Y mit den Realteilen x bzw. y komplex. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\lim_{m+n \rightarrow \infty} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)^{-1/2} \log(m^2 + n^2) = 0$ ($m+n$ nicht abnehmend angeordnet) wird der Bereich absoluter Konvergenz von (1) in der (x, y) -Ebene mit Hilfe der Halbebenen $\lambda_m x + \mu_n y + \log |a_{mn}| < 0$ bestimmt.

W. Meyer-König.

Kober, H.: A remark on zeta functions. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 588–590 (1953).

Mit $0 < \varepsilon < t \rightarrow \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 x} = \lambda(x)$ bleibt

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dx \lambda(x) (x + i)^{-3/4 + i t/2} \right\} = O(t^{\varepsilon-1/4} e^{-\pi t/2}),$$

dann, wenn Lindelöfs Vermutung über das Wachstum der Riemannschen Funktion gilt. — Die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ betreffend bilde man mit $|\operatorname{arc} w|$, $|\operatorname{arc} w^{-1}|$, $|\operatorname{arc}(w+x)| < \frac{\pi}{2}$

$$(1) \quad \frac{w^{(s-1)/2}}{s-1} + \int_w^{\infty} dy y^{s/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} = F_s(w),$$

so folgt (1') $F_s(w) + F_{1-s}(w^{-1}) = \Gamma(s/2) \zeta(s)/\pi^{s/2}$. In (1) ist $\operatorname{Re}(w) = 0$ singuläre Linie. Der Grenzübergang $w \rightarrow 0$, $\zeta(s) = 0$, $0 < t \rightarrow \infty$ beläßt aus (1') z. B.

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 dx x^{s/2-1} \left\{ \frac{1}{2} x^{-1/2} - t^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t x} \right\} = \frac{1}{s-1},$$

während für alle anderen nicht reellen s der Grenzwert (2) nicht beschränkt bleibt. — Es folgen Verallgemeinerungen zu Ansätzen von M. Lerch.

W. Maier.

Smith, R. C. T.: Inverse factorial series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **4**, 132–135 (1953).

The problem considered here is closely related to that discussed by the author this

Zbl. **46**, 303. By expressing the right-hand side of $\Gamma(z) A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m! a_m}{z(z+1) \cdots (z+m)}$

as a double series, it is shown that $A(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A(-m)}{m! (z+m)}$ for all finite z ,

if $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m |a_m| < \infty$, less restrictive conditions being also mentioned. Examples are given. N. A. Bowen.

Tricomi, Francesco G.: Determinazione del valore di un classico prodotto infinito. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **14**, 3—7 (1953).

Als ganze Transzendente in z existiert für $1 < a$ die vom Verf. wiederholt untersuchte Funktion $(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! (a^n - 1)} = G(z)$. (Tricomi, dies. Zbl. **47**, 313.)

Die Integraltransformation

$$\int_0^{\infty} dz G(z) e^{z/s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n+1}}{a^n - 1} \quad \text{für } |s| < a$$

bringt Anschluß an die logarithmische Ableitung von

$$(2) \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-s)^n}{(a-1) \cdots (a^n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a^n}\right).$$

In Sonderfällen ist aber (2) bekanntlich durch elliptische Transzendenten ausdrückbar. W. Maier.

Bailey, W. N.: An expression for $\vartheta_1(nz)\vartheta_1(z)$. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 569—572 (1953).

Durch Transformation n -ter Ordnung der ungeraden elliptischen Thetafunktion stellt Verf. eine ganze Funktion dar als Summe meromorpher. Aus $z = h\tau + n\tau \equiv 0 \pmod{(1/n, \tau)}$ und $3 < n \equiv 0(1)$ folgt

$$\frac{\vartheta_1((n-1)z)}{\vartheta_1(z)} = \prod_{h=1}^{n-1} \frac{\vartheta_1(nz + h\tau, n\tau)}{\vartheta_1(h\tau, n\tau)} \sum_{\nu=1}^1 \frac{\vartheta_1(\nu\tau, n\tau)}{\vartheta_1(nz + \nu\tau, n\tau)} e^{-\pi i \nu^2 n^2 / 4} e^{-2\nu i z}.$$

Mit $n = 3$ bleibt als Summe ganzer Bestandteile

$$(1) \quad \vartheta_1(2z)\vartheta_1(z) = [\vartheta_1(\tau, 3\tau)]^{-1} [e^{2\pi i z} \vartheta_1(3z + \tau, 3\tau) - e^{-2\pi i z} \vartheta_1(3z - \tau, 3\tau)],$$

und es ordnet sich (1) der 3-gliedrigen σ -Verknüpfung 4. Grades unter, welche in Weierstrassens Darstellung wesentlich ist. W. Maier.

Siddiqi, Jamil Ahmad: Quelques théorèmes d'unicité. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1727—1729 (1953).

L'A. énonce le théorème suivant: Soit $\omega(r) > 0$ une fonction décroissante continue, telle que $\omega(r) \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow +\infty$ et $\int_0^{\infty} r^{-1} (\omega(r))^2 dr < \infty$. Désignons par D le domaine $\cos \theta = (\pi/2) \omega(r)$, $r = r_0 > 0$ du plan $z = re^{i\theta}$. Soit $H(z)$ une fonction holomorphe dans D , continue sur son adhérence, telle que $\log |H(z)| = O\left(r \exp\left(\int_0^r u^{-1} \omega(u) du\right)\right)$ pour $r \rightarrow \infty$ dans D , et que $H(z) = O(e^{-a(r)})$ sur la frontière, $a(r) = o(r)$ étant > 0 et croissante. Si

$$\int_0^{\infty} \frac{a(r)}{r^2} \exp\left\{-\frac{\pi}{2} \int_0^r \frac{\omega(u)}{u} du\right\} dr = \infty,$$

alors $H(z) \equiv 0$. Pour $\omega(r) = 0$, $r_0 = 0$, $a(r) = a$ on obtient un théorème connu de Carlson. L'A. énonce comme conséquence du précédent deux théorèmes qui impliquent que si $F(z)$ est holomorphe pour $\Re z \geq 0$, $F(\lambda_n) = 0$ et si $F(z)$ est majorée d'une certaine façon liée avec la suite λ_n , alors $F(z) \equiv 0$. Ces théorèmes donnent des résultats concernant la fermeture de la suite $x^{\lambda_n}/F(x)$, l'unicité du problème des moments généralisé de Stieltjes, etc. (cf. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation, applications: Paris 1952, Chap. V.; ce Zbl. **48**, 52). J. Horváth.

Radström, Hans: On the iteration of analytic functions. Math. Scandinav. **1**, 85—92 (1953).

Verf. sucht die Antwort auf die Frage, welches die allgemeinste Funktionenklasse ist, auf die die von Fatou und Julia in der Iterationstheorie der rationalen und ganzen transzendenten Funktionen erreichten Hauptergebnisse übertragbar sind. — Es sei S das System der komplexen Zahlen (inkl. ∞), $f(x) = f^1$ eine in dem offenen, zusammenhängenden Bereich D definierte, in diesem Bereich meromorphe Funktion, $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, und D_ω der Bereich, in dem $f^n(x)$ für jedes ganze $n \geq 1$ einen Sinn hat ($D_\omega \subseteq D$). Es ist noch vorausgesetzt, daß wenn $S - D$ einen isolierten Punkt enthält, dieser Punkt eine wesentliche Singularität von f ist. — Es wird gezeigt, daß, wenn $S - D_\omega$ mehr als zwei Punkte hat, es dann einen isolierten Punkt besitzt. So kommen nur die folgenden vier Fälle vor: I. $S - D_\omega$ hat keinen Punkt; dann ist f rational; II. $S - D_\omega$ besitzt nur einen Punkt; dann ist f eine ganze transzendente Funktion; III. $S - D_\omega$ besitzt zwei verschiedene Punkte, a und b ; in diesem Fall geht f durch eine Möbius-Transformation entweder in eine Funktion von der Form $x^{-n} \cdot e^{F(x)}$ oder in eine Funktion $x^n e^{F(x)+G(1/x)}$ (F, G nicht konstante, ganze Funktionen) über; IV. $S - D_\omega$ ist eine in sich dichte Menge. — In den Fällen I. und II. wurde von Fatou und Julia festgestellt, daß D_ω eine unendliche Teilmenge besitzt, auf welcher die Funktionenfolge $\{f^n\}$ nicht normal (im Montelschen Sinne) ist. Es gilt jetzt: auch in dem Fall III ist $\{f^n\}$ in unendlich vielen Punkten von D_ω nicht normal; dies gilt aber im Fall IV nicht, dann ist nämlich $\{f^n\}$ in jedem inneren Punkt von D_ω normal. — Es bezeichne im Fall III F die Teilmenge von D_ω , wo $\{f^n\}$ nicht normal ist. Wenn $t \in F$ und φ eine in t meromorphe, aber von a und b verschiedene Funktion ist, dann erweist sich t als Häufungspunkt der Wurzeln der Gleichungen $\varphi(x) = f^n(x)$. Aus diesem Satz folgt: 1. Wenn $c \neq a, b$, dann ist jeder Punkt von F ein Häufungspunkt der Vorgänger des Punktes c . 2. Alle Punkte von F sind Häufungspunkte von Fixpunkten. 3. Die Menge $F \cup \{a, b\}$ ist perfekt. B. Barna.

Wilson, R.: The coefficient theory of integral functions with dominant exponential parts. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 142–149 (1953).

Let $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \equiv \sum_0^\infty \frac{c_n}{n!} z^n$ be an integral function of order 1, type h_1 (> 0). Its Laplace transform $f(z) = \sum_0^\infty n! a_n z^{-n-1} \equiv \sum_0^\infty c_n z^{-n-1}$ is regular outside $|z| = h_1$ and singular at one point on $|z| = h_1$ at least. If $f(z)$ is meromorphic on $|z| = h_1$, $|z| = h_2, \dots$ where $h_1 > h_2 > \dots$, then $f(z) = \sum_{\nu=1}^q \left\{ \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{(z - \alpha_\nu)^\mu} \right\} + f^*(z)$ and its inverse transform is $F(z) = \sum_{\nu=1}^q \left\{ \sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_{\mu\nu} z^{\mu-1} \right\} e^{\alpha_\nu z} + F^*(z)$. In these formulae, $f^*(z)$ is regular outside $|z| = h^* < h_1$; $h_1 > h_2 > \dots > h^*$; $|\alpha_1| = h_1$; $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots > h^*$; $F^*(z)$ is an integral function of order 1 at most and type $h^* < h_1$. The author finds necessary and sufficient conditions that $f(z)$ shall be meromorphic, with exactly p_1 poles and no other singularities on $|z| = h_1$, exactly p_2 poles and no other singularities on $|z| = h_2$, etc. He also determines the values of α_ν , $A_{\mu\nu}$. All the results are expressed in terms of the coefficients a_n . A classification of integral functions with dominant exponential parts, based on Hadamard's classification of functions meromorphic in a circle, is given; and finally some extensions of the above theory to integral functions of any finite order and mean type are made. N. A. Bowen.

Tammi, Olli: On the coefficients of the solutions of Löwner's differential equation. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 148, 7 S. (1953).

Sei S_L die Klasse derjenigen für $|z| < 1$ regulären schlichten Funktionen

(1) $w = F(z, x) = z + \sum_{\nu=2}^\infty \alpha_\nu(x; \vartheta(u)) z^\nu$, welche der Löwnerschen Differentialgleichung $\partial F(z, u) / \partial u = 2F(z, u) e^{i\vartheta(u)} F(z, u) / [1 - u e^{i\vartheta(u)} F(z, u)]$ ($0 < x \leq u \leq 1$) genügen, wo $\vartheta(u)$ eine für $x \leq u \leq 1$ stetige reelle Funktion ist. Wird $F(z, u)$ geeignet normiert, so ist $|F(z, u)| < x^{-1}$ für $|z| < 1$. Die inverse Funktion von (1) sei (2) $z = \Phi(w, x) = w + \sum_{\nu=2}^\infty \alpha_\nu(x; \vartheta(u)) w^\nu$. Verf. hat früher (dies. Zbl. 48, 310) gezeigt, daß die Koeffizienten α_ν für die Funktion $\Phi^0(w, x) = w + \sum_{\nu=2}^\infty \alpha_\nu^0(x) w^\nu$ maximalisiert werden, welche das Gebiet $|z| < 1$ auf eine radial

aufgeschlitzte Kreisscheibe $|w| < x^{-1}$ abbildet. Ist $F^0(z, x) = z \cdot \sum_{v=2}^{\infty} a_v^0(x) z^v$ die inverse Funktion von Φ^0 , so gilt $a_v^0(x) = x^{v-1} \alpha_v^0(x^{-1})$. Diese Relation wird jetzt für beliebige S_L -Funktionen verallgemeinert. Die für die Koeffizienten von (1) und (2) erhaltenen Integralausdrücke genügen folgenden Relationen:

$$\alpha_v(x; \vartheta(u)) = x^{v-1} \alpha_v(x^{-1}; \vartheta(xu)), \quad \alpha_v(x; \vartheta(u)) = x^{v-1} a_v(x^{-1}; \vartheta(xu)).$$

V. Paatero.

Tammi, Olli: On the maximalization of the coefficient a_3 of bounded schlicht functions. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 149, 14 S. (1953).

Sei $F(z, x) = z + \sum_{v=2}^{\infty} a_v(x) z^v$ für $|z| < 1$ schlicht und $|F(z, x)| < x^{-1}$.

Für $|a_3(x)|$ wird folgende genaue Schranke bewiesen: $|a_3(x)| \leq 1 + x^2$ für $e^{-1} < x \leq 1$, $|a_3(x)| \leq 2(\sigma - x)^2 + 1 - x^2 \leq 3$ für $0 \leq x \leq e^{-1}$, wo σ die Wurzel der Gleichung $\sigma \log \sigma + x = 0$ ist ($e^{-1} \leq \sigma \leq 1$). Die angewandte Methode besteht darin, daß schlichte Funktionen durch Lösungen der Löwnerschen Differentialgleichung (siehe vorsteh. Ref.) beliebig genau approximiert werden können, und daß die hierbei auftretende stetige Parameterfunktion $\vartheta(u)$ durch eine Treppenfunktion ersetzt wird. Analoge Abschätzungen werden für die Koeffizienten b_2 und c_2 der Funktionen $z F'/F = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ und $z d \log(z F') dz = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ abgeleitet.

V. Paatero.

Lohwater, A. J. and George Piranian: On the derivative of a univalent function. Proc. Amer. math. Soc. 4, 591—594 (1953).

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe univalente dans $|z| < 1$, on sait que $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r)^{1/2} |f'(re^{i\vartheta})| = 0$ sauf pour les valeurs de ϑ correspondant à un ensemble exceptionnel de points $e^{i\vartheta}$ ayant une mesure linéaire nulle. Les AA. montrent par un exemple que cet ensemble exceptionnel n'est pas toujours de capacité nulle.

J. Dufresnoy.

Schild, Albert: On a problem in conformal mapping of schlicht functions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 43—51 (1953).

Es sei $w = f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ eine reguläre und schlichte Funktion, die $|z| < 1$ auf ein in bezug auf $w = 0$ sterniges Gebiet D abbildet. Es ist vermutet worden, daß stets eine Abschätzung $d_0 d^* \geq 2/3$ gilt, worin d^* und d_0 die Abstände vom Ursprung zum Rand von D bzw. zur Kurve $w = f(r_0 e^{i\theta})$, $0 \leq \theta < 2\pi$, bezeichnen; hierbei bedeutet r_0 die Rundungsschranke von $f(z)$. Verf. beweist, daß diese Vermutung für gewisse Klassen von Funktionen sicher richtig ist. Ferner liefert er die unteren Schranken für $d_0 d^*$ für andere gewisse Klassen.

Y. Komatu.

Parthasarathy, M.: A theorem on integral functions. J. London math. Soc. 28, 377—379 (1953).

Es wird bewiesen: falls $\mu^{(n)}(r) > 0$ ($r > r_0$) stetig und wachsend ist, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(r)}(r)}{\mu(r)} = \infty$ gilt und $f(z)$ eine nicht rationale ganze Funktion ist, so folgt aus $f(z) = \mu(z) (z - r_0)$ die Relation $f^{(n)}(z) = o[\mu^{(n)}(r + r)]$ ($r \rightarrow \infty$) für jedes bestimmte $n > 0$. Es wird von folgendem Lemma Gebrauch gemacht: Falls $\mu^{(n)}(x) > 0$ ($x > x_0$) wachsend und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(x)}(x)}{\mu(x)} = \infty$ ist, dann gilt

$$\inf_{h=0} \frac{\mu(x+h)}{h^n} = o[\mu^{(n)}(x+\varepsilon)] \quad (x \rightarrow \infty)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

J. Aczél.

Lakshminarasimhan, T. V.: A Tauberian theorem for the type of an entire function. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 55—58 (1953).

Buck has given (this Zbl. 47, 315) a Tauberian theorem which he applied to integral functions of finite order ρ , type T . The author here proves the following refinement (theorem 1) of Buck's theorem, with consequent sharpening of the deduction (theorem 2). Theorem 1. Given $\Phi(x) > 0$, continuous, $\Phi(x) \sim c/x$ as $x \rightarrow \infty$, $c > 0$; $f(x)$ nondecreasing;

$$\Psi(x) = \exp \int_0^x \Phi(t) dt, \quad g(x) = \int_0^x f(t) \Phi(t) dt, \quad A = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Psi(x)}, \quad a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\Psi(x)}.$$

Then, if $\lambda \geq 1$, we have $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\Psi(x)} \geq \lambda^{-c} (a + A \log \lambda^c)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\Psi(x)} \leq A \lambda^{-c} + a \log \lambda^c$. —

Theorem 2. Let $n(r)$ represent the number of zeros of the integral function in $|z| \leq r$, and let $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) = L$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} n(r) = l$. Then $L e^{-(L-1)/L} \leq \rho T$. — This theorem is obtained from theorem 1 when the right hand sides of the inequalities have been replaced by their absolute maxima and minima, $A e^{-(A-a)/A}$ and $a + a \log (A/a)$ respectively. In a corollary to theorem 2, it is shown that, when $L = \rho T e$, then $l = 0$; and when $l = \rho T$, then $L = l$. — A direct proof of theorem 2 is implied in a paper by S. K. Singh [Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 38, 120–121 (1953)], who obtains the inequality $l + L \log k \leq k \rho T$, $k \geq 1$. We have chosen to choose the most favourable k .
N. A. Bowen.

Henriksen, Melvin: On rings of entire functions of finite order. J. Indian math. Soc., n. Ser. 17, 59–61 (1953).

Helmer (this Zbl. 23, 239; Theorem 9) proved that in the ring R of entire functions, every finitely generated ideal is principal; that is, if f, g are entire functions without zeros in common, then there exist s, t in R such that $sf + tg = 1$. References are given here to show that this theorem is not true in the ring R^* of all entire functions of finite order. Henriksen (this Zbl. 48, 90) showed that, if M is any maximal ideal of R , the residue class field R/M is isomorphic with the complex field. Here, under some restrictions, he extends this theorem to the ring R_λ of all entire functions of order $\leq \lambda$, and hence to R^* .
N. A. Bowen.

● Nevanlinna, Rolf: Eindeutige analytische Funktionen. 2. Aufl. (Grund-
lehrn der Mathematischen Wissenschaften, Band XLVI.) Berlin-Göttingen-Heidel-
berg: Springer-Verlag 1953. X, 379 S.

Ein Überblick über Aufbau und Stoff der 2. Aufl. dieses Buches kann unterbleiben, da dafür die umfangreiche Besprechung der 1. Aufl. in dies. Zbl. 14, 163 herangezogen werden kann. Hier sollen kurz die Forschungsergebnisse erwähnt werden, die in der Neuauflage berücksichtigt wurden. Die früher behandelten funktionentheoretischen Majorantenprinzipien wurden durch das Prinzip der Anzahlfunktionen von O. Lehto ergänzt. Es besagt, daß die Anzahlfunktion $N(r, a)$ einer im Einheitskreise meromorphen Funktion $w(z)$, deren Werte in ein schlechtes Teilgebiet G der w -Ebene mit mindestens drei Randpunkten fallen, durch die Anzahlfunktion der Funktion $\zeta(z)$ majorisiert wird. $\zeta(z)$ bildet $|z| < 1$ auf die universelle Überlagerungsfläche G^∞ von G ab, wobei $\zeta(0) = w(0)$ gilt. Beim Verzerrungssatz von Ahlfors wird für die Größe $[u_1(x_2) - u_2(x_1)]/a$ eine Abschätzung durch eine Funktion

von $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)}$ nach unten hergeleitet, was nach O. Teichmüller mit Hilfe einer von H. Grötzsch

stammenden Modulabschätzung gelingt. Der Abschnitt über Punktmengen der Kapazität Null ist wesentlich erweitert. Man findet die Darstellung einer Konstruktion von H. D. Ursell, die eine in der 1. Aufl. ausgesprochene Vermutung widerlegt. Danach gibt es Punktmengen, die von endlichem h -Maß $\left(\int_0^{h(r)} \frac{1}{r} dr \right)$ divergent und von positivem harmonischen Maß sind,

wenn die Maßfunktion $h(r)$ der Bedingung $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) \cdot \log \frac{1}{r} = 0$ genügt. Die Beweise zum

zweiten Hauptsatz der Wertverteilungslehre werden durch einen weiteren von K. J. Virtanen ergänzt, der methodisch zu den „nichtelementaren“ Beweisen des zweiten Hauptsatzes zu zählen ist. Schließlich ist noch eine Bemerkung von D. Dugué aufgenommen worden, nach der der Defekt eines Wertes a von der Wahl der Mittelpunkte der $|z| < \infty$ ausschöpfenden konzentrischen Kreise abhängig sein kann. Nach G. Valiron spielt diese Wahl keine Rolle, wenn die Charakteristik $T(r, w)$ der Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r + 1, w)}{T(r, w)} = 1$ genügt. Von Interesse ist der Hinweis auf eine Arbeit von W. K. Hayman, in der eine ganze Funktion konstruiert wird, für welche

ein defekter Wert nicht Zielwert ist. — Ein umfangreiches Literaturverzeichnis weist u. a. auf die Arbeiten hin, die den in dem Buch behandelten Problemkreisen angehören, aber aus Platzmangel nicht berücksichtigt werden konnten. Das Namen- und Sachverzeichnis ist gegenüber der 1. Aufl. wesentlich erweitert. Wer sich mit modernen funktionentheoretischen Fragen vertraut machen will, wird gern zu diesem ausgezeichneten Werk greifen und beim Studium die meisterhafte Darstellung des Stoffes bewundern.

H. Wittich.

Virtanen, K. I.: Eine Bemerkung über die Anwendung hyperbolischer Maßbestimmungen in der Wertverteilungslehre der meromorphen Funktionen. *Math. Scandinav.* **1**, 153—158 (1953).

Exposé synthétique des idées directrices de la théorie de R. Nevanlinna sous la forme qui lui a été donnée par F. Nevanlinna.

J. Dufresnoy.

Shah, S. M. and S. K. Singh: Borel's theorem on a -points and exceptional values of entire and meromorphic functions. *Math. Z.* **59**, 88—93 (1953).

On sait que si une fonction entière d'ordre fini présente une v. e. (valeur exceptionnelle) de Borel λ , elle est d'ordre entier et ne peut présenter d'autre v. e. Les Aa. montrent qu'il n'y a pas de résultat analogue dans le cas où l'hypothèse faite sur λ est remplacée par $\liminf \{ \log^+ n(r, \lambda) \log r \} < \liminf \{ \log \log M(r) \log r \}$. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini dans $z < \infty$. Si λ et ∞ ont 1 pour défaut, alors $T(r, f) \sim T(r, f)$; si λ_1 et λ_2 ont 1 pour défaut, alors $T(r, f) \sim 2T(r, f)$. Si $f(z)$ présente λ et ∞ comme v. e. E , alors 0 et ∞ sont v. e. E pour $f^{(k)}(z)$; si $f(z)$ présente deux v. e. E finies, alors $f'(z)$ présente 0 comme seule v. e. E .

J. Dufresnoy.

Lohwater, Arthur-J.: Les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes dans le cercle-unité. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 16—18 (1953).

Verf. beweist, daß eine in $|z| < 1$ meromorphe und dort endlich viele Null- und Unendlichkeitsstellen besitzende Funktion $f(z)$, für die $f(re^{i\theta}) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow 1$) ist fast überall auf einem Bogen A von $|z| = 1$, mittels des Spiegelungsprinzips über A analytisch fortsetzbar ist, wenn und nur wenn $f(z)$ weder 0 noch ∞ als ihren Zielwert auf A besitzt. Ferner zeigt sich, daß jede in $|z| < 1$ meromorphe und dort der Bedingung $T(r) = O(1)$ genügende Funktion $f(z)$, für die $f(re^{i\theta}) \rightarrow 1$ ($r \rightarrow 1$) ist fast überall auf A , jeden Ausnahmewert mit absolutem Betrag Eins als ihren Zielwert in jeder Umgebung einer Singularität auf A besitzt.

Y. Komatu.

Dinghas, Alexander: Zu Nevanlinna's zweitem Fundamentalsatz in der Theorie der meromorphen Funktionen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* **151**, 8 S. (1953).

Soit $w = f(z)$ une fonction méromorphe pour $z < R$, ∞ . Si $R < \infty$, on suppose que $\lim_{r \rightarrow R} T(r)/\log(R-r)^{-1} = \infty$. Quelles que soient les q ($q \geq 3$) valeurs a_k ,

on a $(q-2)S(r) = \sum n(r, a_k) + n_1(r) < o(S(r))$ pour une suite infinie de valeurs de r tendant vers R . L'A. établit cette relation en suivant une méthode utilisée par Ahlfors pour démontrer le second théorème fondamental de Nevanlinna sous sa forme classique. Cette relation peut être comparée à une relation voisine obtenue par Ahlfors dans sa théorie des surfaces de recouvrement.

J. Dufresnoy.

Künzi, Hans P.: Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem. *Arch. der Math.* **4**, 210—215 (1953).

Une fonction $w = f(z)$ méromorphe dans tout le plan fini engendre une surface de Riemann. Sur un exemple particulier, l'A. déduit de la seule connaissance de cette surface les expressions asymptotiques des fonctions de Nevanlinna $T(r)$ et $N(r, a)$ relatives à la fonction $w = f(z)$.

J. Dufresnoy.

Tsuji, Masatsugu: On a direct transcendental singularity of an inverse function of a meromorphic function. *J. math. Soc. Japan* **5**, 75—80 (1953).

Nouvelle démonstration du théorème suivant, dû à l'A. (ce Zbl. **43**, 83): Si $w(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine infini A et sur sa frontière I , telle que $|w(z)| < R$ dans A et $|w(z)| = R$ sur I , on a $\log T(r) \geq$

$\pi \int_{r_0}^{\alpha r} \frac{dr}{r \theta(r)}$ const. α est un nombre quelconque compris entre 0 et 1; $r \theta(r)$ est

la longueur totale des arcs de $|z| = r$ intérieurs à Δ ; $T(r) = \int S(r) dr/r$ où $S(r)$ est l'aire sphérique de la surface de Riemann décrite par $w(z)$ quand z décrit la partie de Δ qui est intérieure à $|z| < r$.

J. Dufresnoy.

Wittich, Hans: Bemerkung zur Wertverteilung von Exponentialsummen. Arch. der Math. 4, 202—209 (1953).

On sait que les solutions transcendentes $w(z)$ d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients et le second membre sont des polynômes, sont des fonctions entières de type moyen d'ordre rationnel. L'A. montre que, δ désignant le défaut de Nevanlinna, on a $\delta(c, w) = 0$ si la constante c n'est pas solution de l'équation différentielle, tandis que dans le cas contraire $\delta(c, w) = \delta(0, w')$. Cela généralise un résultat de Schwengeler sur les sommes d'exponentielles.

J. Dufresnoy.

Polak, A.: Analytische Funktionen und offene Abbildungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 617—618 (1953) [Russisch].

Ist $f(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, so daß die Menge F der Punkte z , für welche $|f(z) - f(z_0)| \leq a$, ein kompaktes Kontinuum im Regularitätsbereich von f bildet, und hat $f(z) - f(z_0)$ die einzige Nullstelle z_0 in F , so gibt es für jede Zahl d' mit $0 < d' < d$, wo d der größte Durchmesser der Menge $f^{-1}(w)$ für $|w| \leq a$ ist, ein $|w_0| \leq a$, so daß der Durchmesser von $f^{-1}(w_0)$ genau gleich d' ist. — Dieser Satz ist eine direkte Folge der bekannten Tatsache (Polak, Eilenberg), daß die Inversen offener Abbildungen von Kompakten vollstetig sind.

S. Stoilow.

Suvorov, G. D.: Die Primenden einer Folge ebener Gebiete, die gegen einen Kern konvergiert. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 73—100 (1953) [Russisch].

Wenn eine Folge einfach zusammenhängender schlichter ebener Gebiete, die den Ursprung enthalten, einen offenen Limes besitzt, dem der Ursprung angehört, so heißt dieser Limes der Kern. (Seine Existenz ist nach Carathéodory notwendig und hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Abbildungsfunktionen.) Für solche Folgen entwickelt Verf. eine Primendentheorie. Die Gebiete B_n der Folge und der Kern B_0 werden abstrakt zu einem Raum zusammengefaßt, und die Definition der Enden und Primenden beruht auf der Betrachtung von Gebieten $b_n \subset B_n$, $b_0 \subset B_0$, die von Querschnitten β_n , β_0 berandet werden; die β_n sollen nach β_0 konvergieren und im Limes das Gebiet B_0 in derselben Weise wie β_0 zerlegen. — Die Bedeutung dieser Primendentheorie für die Funktionentheorie erhellt aus dem Satz: Vollzieht $f_n(z)$ mit $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$ die konforme Abbildung des Einheitskreises auf B_n , so entspricht jeder Folge z_n mit $|z_n| < 1$ und $|\lim z_n| = 1$ eine Folge $f_n(z_n)$, die nach einem Primende der Bereichfolge konvergiert; hierdurch entsteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Randpunkten des Einheitskreises und den Primenden der Bereichfolge. — Die Klassifikation der Primenden von Bereichfolgen ist komplizierter als die von Bereichen. Verf. führt sie durch und gibt eine Anzahl von Beispielen. Er weist hin auf den Zusammenhang mit Untersuchungen von A. I. Markuševič (dies. Zbl. 16, 310) und mit einer inzwischen erschienenen Arbeit von J. Le-long-Ferrand (dies. Zbl. 46, 306 und J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 245—252 (1952)).

H. Freudenthal.

Myrberg, P. J.: Über die Linearisierung der schlichten konformen Abbildungen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 145, 8 S. (1953).

Let $z' = T(z)$ be a one-to-one conformal mapping of a plane domain D into itself with two boundary fix-points. The author proves that there exists a conformal mapping $z = \varphi(t)$ of D onto D' such that $\varphi^{-1}T\varphi$ is linear on D' . φ need not be unique.

J. Górski.

Komatu, Yûsaku: Einige kanonische konforme Abbildungen vielfach zusammenhängender Gebiete. Proc. Japan Acad. 29, 1—5 (1953).

Gegeben sei ein Gebiet D von endlichem Zusammenhang, welches im Innern den Punkt $z = \infty$ enthält. Es sei S die Familie der schlichten Funktionen $h(z)$, $z \in D$, welche um $z = \infty$ in der Form $h(z) = z + O(1)$, ($z \rightarrow \infty$), normiert sind und einen vorgegebenen Punkt $z_0 \in D$ in den Ursprung überführen. Es sei $C = C_1 + C_2$, $C_1 \cdot C_2 = 0$ der Rand von D , der aus lauter Kontinuen besteht. Der Verf. beweist, daß es nur eine einzige Funktion $f(z) \in S$ gibt, die die Teile C_1 und C_2 in senkrechte bzw. horizontale Randteile überführt. Die senkrechten bzw.

horizontalen Randteile können durch radiale gegen den Ursprung gerichtete bzw. durch um den Ursprung gezeichnete kreisförmige Randteile ersetzt werden.

J. Górski.

Paatero, V.: Über die Verzerrung bei der Abbildung mehrblättriger Gebiete von beschränkter Randdrehung. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 147, 7 S. (1953).

An eine frühere Abhandlung (siehe dies. Zbl. 48, 58) anschließend, betrachtet Verf. eine Funktion $\zeta(z)$, die den Einheitskreis auf ein endlich-vielblättriges Gebiet von beschränkter Randdrehung abbildet. Er leitet für $|\zeta'(z)|$ genaue Abschätzungen ab und gibt die Extremalfunktion explizit an. Weiter wird eine Abschätzung für $|\zeta''(z)|$ abgeleitet, deren Schranke aber nur unter einer Zusatzbedingung über $\zeta(z)$ genau ist.

Y. Komatu.

Sario, Leo: Minimizing operators on subregions. Proc. Amer. math. Soc. 4, 350—355 (1953).

R sei eine beliebige Riemannsche Fläche, D ein kompaktes Teilgebiet, berandet von α . Die Funktion s ist eindeutig und reell in D und zudem harmonisch auf α . Verf. beweist, daß die Bedingung $\int_{\alpha} ds = 0$ notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine eindeutige Funktion p_{λ} auf R existiere, mit den drei Eigenschaften: 1. $p_{\lambda} = s$ harmonisch auf D . 2. p_{λ} harmonisch auf $R - D$. 3. Der Wert eines bestimmten Funktional $m_{\lambda}(u)$ wird minimisiert für $u = p_{\lambda}$. — Beim Beweise bedient sich Verf. einer Operatorenmethode, welche gegenüber seiner früher eingeführten (dies. Zbl. 46, 308) Verfeinerungen aufweist.

H. P. Künzi.

Myrberg, Lauri: Über die Existenz von positiven harmonischen Funktionen auf Riemannschen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 146, 6 S. (1953).

Existieren Greensche Funktionen $g(P, Q)$ auf einer Riemannschen Fläche F und gibt es auf F einen festen Punkt Q und eine gegen den idealen Rand strebende Punktfolge P_n , so daß $\limsup g(P_n, Q) = 0$, dann zeigt Verf., daß eine Teilfolge von $g(P, P_n)$ eine nichtkonstante harmonische Grenzfunktion besitzt, die auf F regulär und positiv ist. Von früher her war bekannt, daß sogar beschränkte positive harmonische Funktionen auf F existieren, falls der Rand zwei Kernelemente besitzt. Verf. findet somit: Falls es überhaupt Riemannsche Flächen gibt, die wohl Greensche Funktionen, aber keine nichtkonstanten positivregulären harmonischen Funktionen besitzen, dann hat jede solche Fläche nur ein einziges Randelement, und dieses Element ist regulär.

G. af Hällström.

Tornehave, Hans: On analytic functions of several variables. A theorem on analytic continuation. Math. Scandinav. 1, 73—81 (1953).

Verf. beweist einen Satz über die Holomorphiehüllen einer speziellen Klasse von Gebieten des Raumes C^m der m komplexen Veränderlichen $z_{\mu} = x_{\mu} + i y_{\mu}$ ($\mu = 1, \dots, m$). Führt man für die reellen Vektoren $x = (x_1, \dots, x_m)$ bzw. $y = (y_1, \dots, y_m)$ die Norm $|x| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$ bzw. $|y| = (y_1^2 + \dots + y_m^2)^{1/2}$ ein, so werden im wesentlichen solche Gebiete Ω des C^m betrachtet, die in der Form $(|x|, |y|) \in \omega$ darstellbar sind; dabei ist ω eine Punktmenge im Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$ der (x, y) -Ebene. Jeder Punktmenge ω des Quadranten $x \geq 0, y \geq 0$ wird eindeutig eine Punktmenge ω^* , vom Verf. die hyperbolische Hülle von ω genannt, nach folgender Vorschrift zugeordnet: Ein Punkt (x, y) gehört genau dann zu ω^* , wenn es einen Punkt $(x_0, y_0) \in \omega$ gibt mit folgenden Eigenschaften: $x^2 - y^2 = x_0^2 - y_0^2, 0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0$. Offenbar gilt $\omega \in \omega^*$. Es wird nun bewiesen: Ist Ω ein Gebiet des C^m ($m \geq 2$), welches in der Form $(|x|, |y|) \in \omega$ darstellbar ist, so enthält die Holomorphiehülle $\hat{\Omega}(\Omega)$ alle Punkte (x, y) , für die gilt $(|x|, |y|) \in \omega^*$.

R. Remmert.

Bergman, Stefan: A theorem of Green's type for functions of two complex variables. Proc. Amer. math. Soc. 4, 102—109 (1953).

D sei ein Gebiet im Raum von n komplexen Veränderlichen C^n . Wenn $n \geq 1$, so läßt sich

im allgemeinen zu vorgegebenen stetigen Randwerten auf dem Rande von D keine „ B -harmonische Funktion“ (das ist eine Funktion, die Realteil einer holomorphen Funktion ist) finden, die die vorgegebenen Randwerte annimmt. In der Funktionentheorie von mehreren komplexen Veränderlichen spielen die „Gebiete mit ausgezeichneten Randfläche“ (darunter insbesondere die „analytischen Polyeder“) eine Rolle. Schreibt man die Randwerte nur auf der (n -dimensionalen) ausgezeichneten Randfläche vor, so ist die Klasse der B -harmonischen Funktionen immer noch zu klein. Sie wird daher zur „extended class“ so erweitert, daß das Randwertproblem (in letzterer Form) eindeutig lösbar ist mit Funktionen aus der Klasse; allerdings hängt die Klasse vom Gebiet ab. Verf. beschränkt sich in der vorliegenden Arbeit auf den C^2 und Gebiete spezieller Gestalt. Es wird ein dem Dirichletintegral ähnliches Integral betrachtet und unter Anwendung Stokes-Greenscher Sätze und unter Ausnutzung der Eigenschaften des Gebietes und der Funktionen der „erweiterten Klasse“ in andere Integrale umgeformt: $h(\zeta_1, \zeta_2) = h^{(1)}(\zeta_1, \zeta_2) + i h^{(2)}(\zeta_1, \zeta_2)$ sei holomorph und eindeutig im Gebiet $\{1 - \varepsilon < |\zeta_1| < 1 + \varepsilon; |\zeta_2| < 1\}$. Die Transformation $z_1 = h(\zeta_1, \zeta_2)$; $z_2 = \zeta_2$ bildet dann den Rand des Einheitsdizylinders $\{|\zeta_1| < 1; |\zeta_2| < 1\}$ auf eine geschlossene Fläche im (z_1, z_2) -Raum ab. Das Innere dieser Fläche sei das Gebiet D . Die „ausgezeichnete Randfläche“ S von D ist das Abbild von: $\{|\zeta_1| = 1; |\zeta_2| = 1\}$. d sei das Abbild von: $\{|\zeta_1| = 1; |\zeta_2| \leq 1\}$. — Die Funktionen $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = H(z_1, z_2)$ ($z_1 = x_1 + i x_2$; $z_2 = x_3 + i x_4$) der erweiterten Klasse $E(D)$ des Gebietes D sind die Funktionen mit folgenden Eigenschaften: 1. $H(z_1, z_2)$ ist harmonisch in z_1 in der Punktmenge $\{z_2 = z_2^{(0)}\} \cap D$ für jedes feste $z_2^{(0)}$ mit $|z_2^{(0)}| < 1$ und stetig differenzierbar entsprechend für $|z_2^{(0)}| \leq 1$. 2. $H(h(\zeta_1, \zeta_2), \zeta_2)$ ist harmonisch in ζ_2 in $\{\zeta_1 = \zeta_1^{(0)}; |\zeta_2| < 1\}$ für jedes feste $\zeta_1^{(0)}$ mit $|\zeta_1^{(0)}| = 1$ und stetig differenzierbar in $\{\zeta_1 = \zeta_1^{(0)}; |\zeta_2| \leq 1\}$ für jedes feste $\zeta_1^{(0)}$ mit $|\zeta_1^{(0)}| = 1$. — Es sei ferner: $\zeta_1 = \xi_1 + i \xi_2 = \varrho_1 e^{i \lambda_1}$; $\zeta_2 = \xi_3 + i \xi_4 = \varrho_2 e^{i \lambda_2}$; $\nabla = (\partial/\partial \xi_3, \partial/\partial \xi_4)$. Es wird dann als Haupttheorem der Arbeit bewiesen: Sind $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ zwei Funktionen aus $E(D)$, dann gilt:

$$\iiint_D \sum_{k=1}^2 \sum_{m=3}^4 \left(\frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial x_k \partial x_m} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \mathfrak{T}(H^{(1)}, H^{(2)}; d) + \mathfrak{D}(H^{(1)}, H^{(2)}; S),$$

wobei $\mathfrak{T} = - \int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \iint_{\{|\zeta_2| < 1\}} \left[\left(\nabla H^{(1)} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_k} \nabla h^{(k)} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\sum_{v=1}^2 h^{(v)} \nabla \frac{\partial H^{(2)}}{\partial x_v} \right) + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^2 \left(\nabla h^{(k)} \cdot \nabla \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(H^{(2)} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial H^{(2)}}{\partial x_k} h^{(k)} \right) \right] d\lambda_1 d\xi_3 d\xi_4$$

und $\mathfrak{D} = \int_{\lambda_1=0}^{2\pi} \int_{\lambda_2=0}^{2\pi} \left(\frac{\partial H^{(1)}}{\partial \varrho_2} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x_k} \frac{\partial h^{(k)}}{\partial \varrho_2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(H^{(2)} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial H^{(2)}}{\partial x_k} h^{(k)} \right) d\lambda_1 d\lambda_2.$

Die Summe der beiden Funktionale \mathfrak{T} und \mathfrak{D} ist, wie dann noch gezeigt wird, gleich der Summe zweier anderer Funktionale ähnlicher Gestalt. Sind $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ B -harmonische Funktionen, so treten Vereinfachungen ein. Für Reinhardtsche Kreiskörper läßt sich $\mathfrak{T} + \mathfrak{D}$ abschätzen. Der Verf. hat die „Gebiete mit ausgezeichneten Randfläche“ sowie die „erweiterte Klasse“ schon in einer Reihe anderer Arbeiten behandelt.

H. J. Bremermann.

Severi, Francesco: Funzioni analitiche e forme differenziali. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 125—140 (1953).

Verf. betrachtet in Gebieten G des R^n (falls die n Veränderlichen x_1, \dots, x_n reell) bzw. des R^{2n} (falls x_1, \dots, x_n komplex sind) geschlossene Differentialformen ω k -ten Grades (vgl. E. Cartan: Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques) der Veränderlichen x_1, \dots, x_n , deren Koeffizienten dort analytisch und eindeutig sind. Die Singularitätenmannigfaltigkeit — soweit sie im Innern von G liegt — sei I . I soll endliche Vereinigung analytischer Mengen E sein, jede dieser Mengen zusammenhängend, rein d -dimensional, orientierbar und nur aus gewöhnlichen Punkten bestehen. Für $k = n - d - 1$ wird mit Hilfe der Verschlingungszahlen das Residuum von ω erklärt. Aus ihm ergibt sich in gewissen Fällen umgekehrt die Verschlingungszahl. Für $k \geq n - d$ wird unter gewissen Einschränkungen ebenfalls das Residuum definiert. Verf. wendet die gewonnenen Begriffe zur Gewinnung der Verschlingungszahlen auf die Gaußsche Integralformel an; ferner werden behandelt Integralsdarstellungen analytischer Funktionen nach Ségre (dies. Zbl. 20, 143), Martinelli (dies. Zbl. 22, 240), Caccioppoli Formel (dies. Zbl. 40, 192) und ein Wirtingerscher Integralsatz (dies. Zbl. 16, 408).

H. Röhrli.

Stoll, Wilhelm: Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen. Math. Z. 57, 211—237 (1953).

Le point de départ est un résultat important de H. Kneser (ce Zbl. 18, 410) qui permet d'exprimer une fonction entière d'ordre fini $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ dans un certain domaine contenant l'origine ($F(0) \neq 0$) en mettant en évidence la variété $F = 0$. Le noyau utilisé est

$$e(x, q) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [x^{n-1} \log E(x, q)], \text{ où } E(x, q) = (1-x) \exp \left[\sum_{k=1}^q \frac{x^k}{k} \right]$$

est le noyau de Weierstrass; on a posé $x = (\sum z_i a_i) (\sum a_i a_i)$, a étant un point de la variété $F = 0$; à ce noyau on associe l'aire $d\omega_{2n-2}$ de la variété $F = 0$ dans l'espace P^{n-1} des plans à 1 dimension complexe issus de l'origine et le nombre $v(a)$ de points d'intersections de la variété avec un tel plan. On a

$$\log F(z) = G(z) + \frac{1}{W_{2n-2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|a| < r} v(a) e[x(a, z), q] d\omega_{2n-2}(a).$$

$W_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{(n-2)!}$; $G(z)$ est un polynôme. L'A. montre que l'intégrale du second membre représente une fonction entière s'annulant sur la variété donnée. L'inconvénient de la méthode suivie est de donner de cette fonction entière un développement qui ne converge que dans un domaine $z \in K$ pour lequel $\sum_{i=1}^n a_i (a_i - z_i) \neq 0$, pour tout a de la variété. Néanmoins l'A. parvient

par une étude directe sur les plans $z = \vec{a} \cdot n$ (\vec{a} vecteur unitaire complexe) à montrer que la fonction entière obtenue est de même ordre et de croissance comparable à celle de l'indicatrice de la variété prise sous la forme:

$$n(r) = \frac{1}{W_{2n-2}} \lim_{|a| \rightarrow r} \int v(a) d\omega_{2n-2}.$$

Le résultat s'étend aux fonctions méromorphes. Note: Par une méthode différente, liée à l'étude des fonctions plurisousharmoniques, on obtient pour $\log F(z)$ un développement qui converge uniformément sur tout domaine borné de l'espace; la totalité de la mesure positive de Radon, „aire de la variété $F = 0$ “, satisfait à de nombreuses identités [cf. P. Lelong, ce Zbl. 39, 88; c. r. Acad. sci., Paris 237, 691–693, 865–867, 1379–1381 (1953)].
P. Lelong.

Vekua, I. N.: Eine allgemeine Darstellung der Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen, die Ableitungen im Sinne S. L. Sobolev besitzen, und das Problem der primitiven Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 773–775 (1953) [Russisch].

Es sei T ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand L in der $z = (x + iy)$ -Ebene. Wenn u in T summierbar ist und $\iint_T |u(z)| dT < \infty$ und wenn es ferner eine Funktion $\omega(z)$ gibt, die für beliebige in T differenzierbare Funktionen v mit $v = 0$ in einer Umgebung von L der Integralrelation $\iint_T \omega v dT = \iint_T u \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} dT = 0$ genügt, so nennt man u im Sinne von S. L. Sobolev differenzierbar und schreibt $\partial u / \partial \bar{z} = \omega(z)$. Verf. beweist für solche Funktionen: 1. Ist $\partial u / \partial \bar{z} = 0$, so ist u holomorph in T . 2. u gestattet die Integraldarstellung $u(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\omega(t)}{t-z} dT_t$

($z \in T$), in welcher $f(z)$ und $\omega(z)$ in T summierbare Funktionen sind und $f(z)$ innerhalb T holomorph und $\omega(z) = \partial u / \partial \bar{z}$ ist. Auch die Umkehrung von 2. ist gültig. Noch einige andere Integralsätze werden bewiesen.
W. Haack — G. Hellwig.

Fréchet, Maurice: Propriétés des fonctions para-analytiques à n dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2191–2193 (1953).
Fréchet, Maurice: Formes canoniques des fonctions para-analytiques à deux et à trois dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2364–2366 (1953).

I. Die Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung für die Komponenten der para-analytischen Funktionen werden aus der Bedingung der Differenzierbarkeit hergeleitet. Ausgehend von konvergenten Potenzreihen in der hyperkomplexen Variablen werden die elementaren transzendenten Funktionen eingeführt. — II. Für den zweidimensionalen Fall existieren zwei kanonische Formen für die Differentialgleichungen der para-analytischen Funktionen: Der elliptische Fall (Gleichungen

von Cauchy-Riemann) und der parabolische Fall. Alle andern Systeme sollen sich durch „einfache Operationen“ auf die Normalformen transformieren lassen. Für die Definition dieser Operationen wird auf eine weitere Publikation verwiesen. Auch im Falle $n = 3$ existieren zwei Normalformen. *A. Kriszten.*

Fedorov, V. S.: Über die Monogenität der hyperkomplexen Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. **32 (74)**, 249—254 (1953) [Russisch].

In der komplexen Algebra mit der Basis $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, wo $\omega_i \omega_j = 0$ für alle i, j ist, gilt für $\alpha = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \omega_k$, $\beta = \beta_0 + \sum_{k=1}^m \beta_k \omega_k$, $\beta_0 \neq 0$:

(*) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\alpha_k}{\beta_0} - \frac{\alpha_0}{\beta_0} \cdot \frac{\beta_k}{\beta_0} \right) \omega_k$. Verf. betrachtet Funktionen $\alpha = f(\beta)$, wo jedes α_k eine eindeutige und stetige Funktion der komplexen Variablen $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ist. D_i ist der Variabilitätsbereich von β_i . Existiert die nach (*) berechnete Ableitung

$$f'(\gamma) = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \gamma} \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma}$$

für jede Wahl der γ_j in D_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) und unabhängig vom Wege $\beta \rightarrow \gamma$ (außer $\Delta\beta_0 \neq 0$), so heißt $f(\gamma)$ monogen. Es wird gezeigt, daß die Monogenität genau den Funktionen der Form

$$f(\beta) = \varphi(\beta_0) + \sum_{j=1}^m \{ \varphi'(\beta_0) \beta_j + \sigma_j(\beta_0) \} \omega_j, \quad \beta_j \text{ in } D_j,$$

zukommt, wo $\varphi(\beta_0)$ und $\sigma_j(\beta_0)$ in D_0 reguläre Funktionen sind. Hieraus folgen einige weitere Eigenschaften monogener Funktionen. *E. Trost.*

Spampinato, Nicolo: Le funzioni totalmente derivabili nell'algebra dei numeri n -potenziali. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 220—231 (1953).

Die Definition der monogenen Funktionen $f(\zeta) = \sum_{k=0}^n f_k(\zeta) u_k$ der Variablen

$\zeta = \sum_{k=0}^n u_k z_k$ in einer kommutativen Algebra ($u_0 = 1, u_1, \dots, u_n$) verlangt die Existenz einer von der Richtung unabhängigen Ableitung. In speziellen Algebren, z. B. in den Potenzalgebren ($u_k = u_1^k, u_1^{n+1} = 0$) ist dadurch die Gestalt der Funktionen $f_k(z_0, \dots, z_n)$ der komplexen Variablen z_i bereits vollständig festgelegt: Die Funktion f_k hängt nur von den Variablen z_0, \dots, z_k ab, z. B. ist $f_0 = \varphi_0(z_0)$, $f_1 = z_1 \varphi_0(z_0) + \varphi_1(z_0)$, etc. *A. Kriszten.*

Rizza, Giovanni Battista: Teoremi e formule integrali nelle algebre iper-complesse. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 204—209 (1953).

Zusammenstellung von bekannten Resultaten des Verf. über hyperkomplexe Funktionen der Fueterschen Art, und einer Integraldarstellung für eine Klasse von nach Scheffers monogenen Funktionen, d. h. Funktionen, die eine von der Richtung unabhängige Ableitung besitzen. Der Funktionswert in einem Punkt des betrachteten Raumes kann aus den Funktionswerten auf einer geeigneten Kreis-peripherie berechnet werden. *A. Kriszten.*

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Cirquini, Silvio: Sopra il problema dell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 66—67 (1953).

Maurin, K.: On Parseval equation for almost periodic vectors. Studia math. **13**, 83—86 (1953).

H. Weyl hat in seiner Theorie fastperiodischer Vektoren (dies. Zbl. **32**, 30) die Parsevalsche Gleichung ohne Benutzung von Hilfssätzen aus anderen Theorien hergeleitet. Verf. beweist diese Gleichung sehr einfach, indem er den Hauptsatz von

Rellichs Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen heranzieht (dies. Zbl. 10, 25). Weitergehende Vereinfachungen haben Kawada (dies. Zbl. 41, 414) und Ref. [dies. Zbl. 37, 339 und Math. Ann. 129, 157—166 (1950)] angegeben. W. Maak.

Lalaguë, Pierre: Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2473—2475 (1953).

Soit E un ensemble et M_n une suite de nombres positifs. Désignons par ${}^{CE}\{M_n\}$ l'ensemble des fonctions $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) presque périodiques au sens de Bohr, ainsi que leur dérivées, de spectre contenu dans E , indéfiniment dérivables et vérifiant $|f^{(n)}(x)| \leq c^n M_n$. L'A. énonce une condition nécessaire et suffisante pour que ${}^{CE}\{M_n\} \subset {}^{CE}\{M'_n\}$. Cet énoncé utilise une „régularisée“ de la suite M_n , dont la construction dépend de E . Dans le cas particulier des fonctions périodiques on retrouve des résultats de Gornay (cf. Mandelbrojt, Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Paris 1952. Théorèmes 6.5. III (p. 226) et 6.7. III (p. 238); ce Zbl. 48, 52). J. Horváth.

Berezanskij, Ju. M.: Über verallgemeinerte fastperiodische Funktionen und Folgen, die mit Differential- und Differenzgleichungen zusammenhängen. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 157—194 (1953) [Russisch].

Im ersten Teil der Arbeit beschäftigt sich Verf. mit den verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen, welche mit der Differentialgleichung

$$\partial^2 u / \partial t^2 - q(t) u = \partial^2 u / \partial s^2 - q(s) u \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

verknüpft sind (bezüglich dieser Frage s. z. B. B. M. Levitan's grundlegende Arbeit, dies. Zbl. 33, 123). Mit einer zur Bochnerschen analogen Methode beweist er die Parsevalsche Gleichung — in klassischer Form — für die verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen bei der Annahme $q(t) = O(1/t^{2+\epsilon})$ ($\epsilon > 0$) und einen allgemeinen Approximationssatz. Danach verallgemeinert er B. M. Levitan's Approximationstheorem [dies. Zbl. 35, 173, insbesondere S. 343, Th. (2.2.1) dieser Arbeit] für den Fall $q(t) = O(1/t^{2+\epsilon})$ ($\epsilon > 0$). Im zweiten Teil der Arbeit beweist Verf. einen analogen Satz für die fastperiodischen Folgen, welche zu dem bezüglich des Gewichts $h(\lambda)(1-\lambda)^\alpha(1+\lambda)^\beta$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$; $\alpha, \beta > -1$; $h(\lambda) \geq 0$, $h(\lambda) \sim \text{Lip } 1$) orthonormierten Polynomsystem gehören. (Hinsichtlich der fastperiodischen Folgen s. z. B. B. M. Levitan's angeführte Arbeit.) In dieser Weise verallgemeinert er auch ein Theorem von B. M. Levitan [Mat. Sbornik, n. Ser. 17 (59), 9—44 (1945), insbesondere S. 17, Th. XI]. Zuletzt wird der Fall $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ eingehend erörtert, unter der Annahme, daß der zweite Differentialquotient von $h(\lambda)$ beschränkt ist. Mit Verwendung seiner Ergebnisse in bezug auf die Stetigkeit der Operatorenttransformationen [Ukrain. mat. žurn. 3, 412—432 (1951)] beweist Verf. in diesem Fall den Approximationssatz in klassischer Form. Dieses letztere Ergebnis ist in einer früheren Arbeit des Verf. ohne Beweis ausgesprochen worden (dies. Zbl. 45, 60, insbesondere S. 496, Th. 5 der Arbeit). B. Sz. Nagy — K. Tandori.

Struble, Raimond A.: Almost periodic functions on locally compact groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39, 122—126 (1953).

Ist \mathfrak{G} lokalkompakt und μ das (z. B. linksinvariante) Haarmaß auf \mathfrak{G} , so kann man Mengensysteme $\{U_t\}$ ($0 < t < \infty$) erklären, so daß für fastperiodische Funktionen $f(x)$ auf \mathfrak{G} gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(U_t)} \int_{U_t} f(x) d\mu(x) = M\{f\}$, wobei $M\{f\}$ der v. Neumannsche Mittelwert von f ist. Wenn man also derartige Mengensysteme $\{U_t\}$ wirklich angegeben hätte, welche die drei vom Verf. geforderten Eigenschaften besitzen, so würde man die Mittelwerttheorie ganz nach dem alten H. Bohrschen Muster aufziehen können. — Außerdem zeigt Verf., daß man die stetigen fastperiodischen Funktionen auf lokalkompakten Gruppen mit Hilfe des Begriffs ϵ -fastperiodisch, also wieder nach H. Bohrs Muster, definieren kann. W. Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzgleichungen:

• Nelson, A. L., K. W. Folley and M. Coral: Differential equations. Boston: Heath; London: Harrap 1953, X, 299 p. 17 s. 6 d.

Das Buch ist darauf abgestellt, eine Fertigkeit in der praktischen Lösung von Differentialgleichungen zu vermitteln. Die ersten acht Kapitel sind den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Bemerkenswert sind besonders je ein reichhaltiges Kapitel über lineare Differential-

gleichungen beliebiger Ordnung, über numerische Lösungsmethoden und über Lösungen in Form von Potenzreihen. Das neunte und zehnte Kapitel behandeln partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und gipfeln in einer kurzen Darstellung des Cauchyschen Problems. Das Buch ist von einem elementaren Standpunkt präzise und klar geschrieben, Existenztheoreme werden mit Hinweis auf klassische Literatur aufgeführt. Die vielen den Anwendungsgebieten entnommenen, genau durchgeführten Beispiele und die noch zahlreicheren mit Lösungen versehenen Übungsaufgaben lassen das Buch, das auch Funktionentabellen und eine Integraltafel enthält, als zum Selbststudium und als Anregung bei der Abhaltung von Übungen geeignet erscheinen.

M. J. De Schwarz.

Carleson, Lennart: On infinite differential equations with constant coefficients. I. Math. Scandinav. 1, 31–38 (1953).

Sia $F(z)$ una trascendente intera $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $F(0) = 1$, che si possa porre nella forma $F(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_{\nu}}{\lambda_{\nu}}\right)^{\mu_{\nu}}$, dove i μ_{ν} sono numeri interi ≥ 1 , e la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_{\nu}}{|\lambda_{\nu}|}$ converge; si studia allora l'equazione differenziale di ordine infinito con coefficienti costanti $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(x) = 0$. Costruita, in corrispondenza ad una data soluzione $y(x)$, una trascendente intera $G(z)$, si trova per $y(x)$ lo sviluppo formale $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\mu_{\nu}-1} c_{\nu k} x^k e^{\lambda_{\nu} x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu}(x) e^{\lambda_{\nu} x}$, dove le $c_{\nu k}$ sono determinate come coefficienti della parte principale della funzione meromorfa $G(z)/F(z)$ nel suo polo λ_{ν} di ordine μ_{ν} (così che $\frac{G(z)}{F(z)} - \sum_{k=0}^{\mu_{\nu}-1} c_{\nu k} \frac{k!}{(z - \lambda_{\nu})^{k+1}}$ sia regolare in λ_{ν}). Si danno inoltre condizioni necessarie e sufficienti perchè una soluzione dell'equazione di ordine infinito sia analitica.

M. Cinquini-Cibrario.

Quade, W.: Konstruktion einer Integralbasis an einer schwach singulären Stelle. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 56, 88–104 (1953).

Nell'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n nella funzione $w(z)$

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n z^{\nu} A_{\nu}(z) w^{(\nu)} = 0, \quad A_n(z) \equiv 1,$$

le $A_{\nu}(z)$ siano funzioni olomorfe della z in un intorno dell'origine di raggio R e si abbia $A_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu, k} z^k$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$), o, come si dice, il punto $z = 0$ sia un punto singolare regolare

per la (1). È noto che, se la così detta equazione determinante $(2) F_0(s) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu, 0} \nu! \binom{s}{\nu} = 0$

ammette n radici s_1, s_2, \dots, s_n distinte tra loro due a due, esiste un sistema fondamentale di integrali della (1) appartenenti rispettivamente agli esponenti s_1, s_2, \dots, s_n , ed è altresì noto che se la (2) ammette radici multiple e si ha $F_0(s) = (s - s_1)^{\alpha_1} (s - s_2)^{\alpha_2} \dots (s - s_m)^{\alpha_m}$ il procedimento di D'Alembert e quello di Frobenius permettono ancora di costruire un sistema fondamentale di integrali della (1). L'A. prova che questa costruzione può conseguirsi con un procedimento assai interessante fondato sull'uso degli operatori differenziali lineari. — Posto

$z = e^t$, e $(3) F_k(D) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu, k} \nu! \binom{D}{\nu}$, ($k = 0, 1, \dots; D = \frac{d}{ds}$), la (1) si scrive formalmente

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} [e^{kt} F_k(D)] h = 0, \quad \text{dove } t = \tau + i\sigma \text{ è variabile nella regione } \Gamma: -\infty < \tau < \log R, \\ -\pi < \sigma < \pi. \text{ — Si soddisfa formalmente a questa equazione ponendo}$$

$$(5) \quad h(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t) e^{(s_{\mu} + l)t} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

dove s_{μ} è una radice della (2) e i polinomi $P_l(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{l, \nu} t^{\nu}$ sono determinati dal sistema ricorrente $F_0(D + s_{\mu}) P_0 = 0, F_0(D + s_{\mu} + 1) P_1 + F_1(D + s_{\mu}) P_0 = 0, F_0(D + s_{\mu} + 2) P_2 + F_1(D + s_{\mu} + 1) P_1 + F_2(D + s_{\mu}) P_0 = 0, \dots$. L'A. prova che partendo da $P_0 = 1, t, t^2, \dots, t^{s_{\mu}-1}$

($\mu = 1, 2, \dots, m$), e costruita la successione $\{P_n\}$ si ottengono n serie (5), ciascuna convergente uniformemente in ogni regione chiusa e limitata appartenente alla semistriscia P , e ritornando alla variabile z risulta costruito un sistema fondamentale di integrali della (1) della forma $w = z^{\mu} \int_0^{\infty} P_l(\log z) z^l dz$. — La dimostrazione, assai semplice, richiede soltanto la conoscenza degli elementi della teoria delle funzioni di una variabile complessa. *G. Sansone.*

Zlámal, Miloš: Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Nachr. 10, 169—174 (1953).

Verf. verallgemeinert eine Arbeit von Haupt über die Asymptoten der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung (dies. Zbl. 27, 60) auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung: Es sei i ganz, $0 \leq i \leq n-1$ und $\varepsilon \geq 0$. Wenn $\int_0^{\infty} t^{i-1} |a_j(t)| dt < \infty$ für $j = 1, \dots, n$ und

$$\int_0^{\infty} \left| \sum_{j=n-i}^n (n-j)! \binom{i}{n-j} t^{j+i-1+\varepsilon} a_j(t) - t^{n-1+\varepsilon} f(t) \right| dt < \infty$$

ist, so hat eine Lösung von $y^{(n)} - \sum_{j=1}^n a_j(x) y^{(n-j)} = f(x)$ die Gestalt $y = x^i + o(x^{-\varepsilon}), \dots, y^{(i)} = i! + o(x^{-i-\varepsilon}), y^{(k)} = o(x^{-k-\varepsilon})$ für $i < k < n$. Nun wird gezeigt, daß die Aussage von Haupt als Spezialfall hierin enthalten ist. Für $i = 0$ ergibt sich eine einfache Bedingung dafür, daß die allgemeine Lösung die Gestalt

$$y = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j + o(x^{-\varepsilon}) \text{ bzw. } y = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j [1 + o(x^{-\delta})] + o(x^{-\delta})$$

mit $\delta < \varepsilon$ hat.

W. Haacke.

Ascoli, G.: Sul comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione $y'' - (1 + \eta) y = 0$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 115—123 (1953).

Einfache Beweise für im wesentlichen bekannte Resultate über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $y''(x) - (1 + \eta(x)) y(x) = 0$ ($x \rightarrow +\infty$). Zugrunde gelegt werden z. B. die beiden Voraussetzungen: η p -integrabel über $(0, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$; oder: $1 + \eta = \beta^2 + C$, $\beta^2 \rightarrow 1$ ($x \rightarrow +\infty$), β^2 von beschränkter Schwankung in $[0, \infty]$, C integrabel über $(0, \infty)$. In beiden Fällen zeigt sich die

Existenz eines Fundamentalsystems y, z mit $y(x) \sim y'(x) \sim \exp \int_1^x \left(1 + \frac{\eta(\xi)}{2}\right) d\xi$.

$$z(x) \sim -z'(x) \sim \exp \left\{ - \int_1^x \left(1 + \frac{\eta(\xi)}{2}\right) d\xi \right\}.$$

F. W. Schäfke.

Pöschl, Klaus: Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Ann. 125, 344—349 (1953).

In der Differentialgleichung (1) $w'' + c_1(z) w' + c_2(z) w = 0$ seien $c_1(z) = a z^{k_1} + \dots$ und $c_2(z) = \alpha z^{k_2} + \dots$ Polynome vom Grad k_1 und k_2 . Für $\frac{1}{2} k_2 < k_1 \leq k_2$ sind ganze transzendente Lösungen der Ordnung $1 + k_1$ und $1 + k_2 - k_1$ möglich. Verf. reduziert die Frage, welche Fälle für (1) möglich sind, durch eine Transformation der Form $w = y e^{h(z)}$, $h(z)$ ein passendes Polynom, auf die Frage, ob die transformierte Differentialgleichung $y'' + C_1(z) y' + C_2(z) y = 0$ ($C_1(z)$ vom Grad k_1 , $C_2(z)$ vom Grad $\leq k_1 - 1$) Polynomlösungen besitzt oder nicht. Besitzt sie solche, so gibt es Lösungen von (1) mit der kleineren Ordnung $1 + k_2 - k_1 < 1 + k_1$. Im anderen Falle hat jede ganze transzendente Lösung von (1) die Ordnung $1 + k_1$. Daß es stets Lösungen der größtmöglichen Ordnung $1 + k_1$ gibt, ist leicht einzusehen.

H. Wittich.

Richard, Ubaldo: Su una classe di „funzioni ausiliarie“ riguardanti le equazioni differenziali del 2° ordine. Atti. IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 200—203 (1953).

L'A. osserva acutamente che il teorema di Sturm e in generale i teoremi di

oscillazione e di non oscillazione delle soluzioni delle equazioni $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y(x) = 0$ possono dedursi associando all'equazione una forma quadratica in $y(x)$, $y'(x)$, $\varphi(x) = A(x) y^2 + 2 B(x) p y y' + C(x) p^2 y'^2$, la cui derivata φ' si esprima con la forma, pure quadratica in y e y' ,

$$\varphi'(x) = [A' - 2q B] y^2 + 2[A - p q C + p B'] y y' + [2p B + p^2 C'] y'^2.$$

L'A. fa altre interessanti considerazioni per le soluzioni dell'equazione $\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y^n(x) = 0$.

G. Sansone.

Pipes, Louis A.: Matrix solution of equations of the Mathieu-Hill type. J. appl. Phys. **24**, 902—910 (1953).

Die Diskussion des Verf. gründet sich auf die Feststellung, daß man den „Vektor“ (x_t, \dot{x}_t) mit Hilfe einer von dem Anfangsvektor (x_0, \dot{x}_0) unabhängigen Matrix $\mathfrak{M}(t)$ darstellen kann. Ist in der Mathieu-Hillschen Gleichung $\ddot{x} + F(t)x = 0$ $F(t)$ stückweise konstant, so läßt sich $\mathfrak{M}(t)$ leicht angeben. Der Fall eines stetigen $F(t)$ läßt sich durch Approximation hierauf zurückführen. Numerische Beispiele hierzu. Aus $\mathfrak{M}(T)$ $[F(t + n T) = F(t)]$ läßt sich das Stabilitätsverhalten ablesen.

F. Penzlin.

Schäffke, Friedrich Wilhelm: Eine Methode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten einer Hillschen Differentialgleichung. Z. angew. Math. Mech. **33**, 279—280 (1953).

Es wird ein Verfahren angegeben, das gestattet, den charakteristischen Exponenten der Hillschen Differentialgleichung in brauchbarer numerischer Näherung zu bestimmen. Dies wird am Beispiel der Mathiesuschen Differentialgleichung erläutert. Von der Weierstraßschen Produktdarstellung ausgehend [Verf., Math. Nachr. **3**, 20—39 (1949)] werden Umformungen angegeben, die die Konvergenz dieser Darstellung verbessern (Beweise siehe dies. Zbl. **42**, 100).

W. Haacke.

Taam, Choy-Tak: Linear differential equations with small perturbations. Duke math. J. **20**, 13—25 (1953).

The author considers the differential equation (1) $(p(x) y')' + q(x) y = f(x)$, where $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ are complex-valued functions defined for all $x \geq 1$ and L -integrable at least in each finite interval $[1, b]$, and where conditions of absolute continuity are required for the solutions $y(x)$. By using also various lemmas previously proved by R. Bellman [Duke math. J. **10**, 643—647 (1943), **11**, 513—516 (1944) and this Zbl. **29**, 357] the author proves in the present paper some very general sufficient conditions in order that the solutions $y(x)$ to (1) behave as the solutions to $y'' = 0$ as $x \rightarrow +\infty$. For instance: I. If $(p(x))^{-1} - a$, $x^2 q(x)$, $f(x)$ are L -integrable in $(1, +\infty)$, then $y(x) = A x + B + \varepsilon(x)$, where A , B are constants and $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$. II. If $(p(x))^{-1}$, $q(x)$, $f(x)$ are L -integrable in $(1, +\infty)$, then $y(x) = C + \varepsilon(x)$, where C is a constant and $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$. These results extend previous results of E. Hille (this Zbl. **31**, 354). Extensions are given to third order differential equations and it is pointed out that the method is general. Extensions of the previous results to the behavior of the solutions to (1) in a sector of the complex domain are given.

L. Cesari.

Moser, Jürgen: Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Ann. **125**, 366—393 (1953).

Bei der Differentialgleichung $-(p(x) u')' + q_\varepsilon(x) u = \lambda k(x) u$ in $a < x < b$ mit $q_\varepsilon(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v q^{(v)}(x)$ ($|\varepsilon| < \varepsilon_0$) sei ε reell, $p(x)$, $k(x)$ in $a < x < b$ positiv und stetig, $q_\varepsilon(x)$

dort stückweise stetig; die Funktionen $q^{(v)}(x)$ seien in $a < x < b$ stetig bis auf höchstens gewisse, für alle v gemeinsame, im Innern von (a, b) sich nicht häufende Unstetigkeitsstellen, die Konvergenz der Reihe sei in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig; für $\varepsilon = 0$ werde bei $x = a$ der Grenzkreisfall und bei $x = b$ der Grenzpunktfall angenommen; a, b kann auch $\pm \infty$ sein. Nach Formulierung einer für verschiedene Werte ε gemeinsamen

Randbedingung bei $x = a$ wird ein von ε regulär analytisch abhängendes Fundamentalsystem $q_\varepsilon(x, \lambda)$, $\theta_\varepsilon(x, \lambda)$ aufgestellt unter der Voraussetzung, daß für die Störglieder $q^{(v)}(x)$ für ein festes λ eine Abschätzung

$$(1) \quad \int_a^b \Phi(x, \lambda)^2 |q^{(v)}(x)| dx = \gamma K^{v-1} \quad (\gamma > 0, K > 0, v = 1, 2, \dots)$$

gilt. Es wird $\Phi(x, \lambda)^2 = |q_0(x, \lambda)|^2 + |\theta_0(x, \lambda)|^2$ gesetzt. Dann liegt für $|\varepsilon| < \xi = (\gamma + K)^{-1}$ bei $x = a$ der Grenzkreisfall und für $|\varepsilon| < \frac{1}{3}\xi$ bei $x = b$ der Grenzpunktfall vor. Die Regularität der charakteristischen Funktion $q_\varepsilon(\lambda)$ des Spektrums in Abhängigkeit von ε für ein abgeschlossenes Intervall I der λ -Achse $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ wird gezeigt, wenn außer den genannten Voraussetzungen a) (1) für alle $\lambda \in I$ gilt, b) für eine gewisse Lösung $\chi(x, \lambda)$ der gestörten Aufgabe bei $\lambda = l + i\delta$ eine Abschätzung der Form $|\chi(x, \lambda)| \leq C \Phi(x, \lambda)$ gilt. Unter nicht wesentlich schärferen Bedingungen wird auch die Regularität der Spektralschar $E_\varepsilon(I)$ bewiesen. Sind die Voraussetzungen nicht nur für ein bestimmtes Intervall I , sondern für das ganze Spektrum erfüllt, so kann die gestörte Differentialgleichung durch eine unitäre Transformation U_ε in die ungestörte transformiert und U_ε und U_ε^{-1} für kleine ε in konvergente Potenzreihen nach ε entwickelt werden. Hilssche Differentialgleichung in $0 \leq x < \infty$ und einige andere Differentialgleichungen als Beispiele. L. Collatz.

Obi, Chike: A non-linear differential equation of the second order with periodic solutions whose associated limit cycles are algebraic curves. J. London math. Soc. 28, 356—360 (1953).

The paper deals with the problem of the existence of equations of the form $\ddot{x} + \varphi(x) \dot{x} + \chi(x) = 0$, with a discrete number of periodic solutions whose associated limit cycles in the phase-plane (x, \dot{x}) are algebraic curves. The following theorem is proved by elementary arguments: Suppose $f(x)$ and $g(x)$ have continuous second derivatives. Then to any pair of numbers $a_2 > a_1$ such that 1. $f(a_1) = f(a_2) = 0$, 2. $f'(a_1) > 0$, $f'(a_2) < 0$, 3. $f(x) > 0$ for $a_1 < x < a_2$, 4. $f(x)g^2(x) \neq 1$ for $a_1 \leq x \leq a_2$, there corresponds a family of periodic solutions of the equation (1) $\ddot{x} - (\frac{3}{2}f'g + f'g')\dot{x} - \frac{1}{2}f'(1 - fg^2) = 0$. Moreover to this family there corresponds the integral curve (2) $\dot{x}^2 - 2f(x)g(x)\dot{x} - f^2(x)g^2(x) - f(x) = 0$, of the phase-plane equivalent of (1); and this curve is algebraic when f and g are algebraic. J. Szarski.

Savinov, G. V.: Eigenschwingungen in wesentlich nicht-linearen quasikonserverativen Systemen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 995—997 (1953) [Russisch].

The author aims to clarify the form of periodic solutions of the autonomous system $\ddot{x} + g(x) = \mu f(x, \dot{x}, \mu)\dot{x}$, where μ is a small parameter. Formulae, presumably approximate, are given in terms of elliptic functions for the particular case in which $g(x)$ is a cubic polynomial. F. V. Atkinson.

Cimino, Massimo: Sulle soluzioni dell'equazione generale del potenziale newtoniano di una sfera fluida in equilibrio. Boll. Un. mat. Ital., III, Ser. 8, 164—172 (1953).

L'A. considera l'equazione (1) $\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + x^2 f(y) = 0$, ($\lambda = 0$), con $f(y)$ continua e non decrescente in $(0, \infty)$, $f(y) = 0$ per $y = 0$, $|f'(y)| \leq L$ per $0 \leq y \leq C$ e prova un teorema di esistenza e di unicità della soluzione che soddisfa la condizione $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = C$. Seguono un teorema di confronto tra due equazioni del tipo della (1) ed alcune applicazioni all'esistenza di uno zero per $y(x)$. G. Sansone.

Mohr, Ernst: Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mittels Operatorenrechnung. Math. Nachr. 10, 1—49 (1953).

Das Anfangswertproblem für ein System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten läßt sich am einfachsten vermittle Laplace-Transformation lösen, weil diese das Problem in ein System von linearen algebraischen Gleichungen übersetzt, in das die Anfangsbedingungen eingegangen sind. In den bisherigen Darstellungen war aber das System von r Gleichungen n -ter Ordnung nur für den „Normal-

fall“, daß die Determinante den höchsten Grad $r \cdot n$ hat, wirklich vollständig diskutiert worden. Verf. diskutiert nun sämtliche überhaupt auftretenden Möglichkeiten in voller Allgemeinheit, und zwar unter Zuhilfenahme der Elementarteilerttheorie und in Matrizensprache. Insbesondere wird auch der Fall der mit dem System unverträglichen Anfangsbedingungen behandelt. Mit dem dargebotenen Apparat ist es nunmehr möglich, jede konkrete Aufgabe restlos zu erledigen.

G. Doetsch.

Duncan, W. J.: Solution of ordinary linear differential equations with variable coefficients by impulsive admittances. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 122—127 (1953).

L'A. rappelle l'expression (connue, mais rarement donnée dans les manuels) d'une intégrale d'une équation différentielle linéaire non homogène au moyen d'une solution fondamentale de l'équation homogène (admittance initiale). Il forme les expressions correspondantes pour des systèmes différentiels linéaires. Ch. Blanc.

Germay, R. H.: Sur les intégrales régulières au sens de Fuchs de certains systèmes d'équations différentielles. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1. Sér. 67, 69—76 (1953).

Per un'equazione differenziale lineare di tipo fuchsiano vengono calcolati esplicitamente i coefficienti degli sviluppi in serie degli integrali regolari nel senso di Fuchs. Analoga questione per un sistema di equazioni differenziali lineari del tipo $dy_i/dx + [f_{i1}y_1 + f_{i2}y_2 + \dots + f_{in}y_n]/(x-a) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$), con le $f_{ij}(x)$ olomorfe nell'intorno di a .

G. Cimmmino.

Jacobsthal, Ernst: Über ein spezielles System simultaner Differentialgleichungen. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 78—81 (1953).

In dem Differentialgleichungssystem $f(x) y'_k = \varphi_k(x) + \sum_{\lambda=1}^n a_{k\lambda} y_\lambda$ ($k = 1, \dots, n$) seien die Funktionen f, φ_k ($n-1$)-mal differenzierbar, $f \neq 0$, $a_{k\lambda}$ Konstante. Dieses System läßt sich bekanntlich in n lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung für die y_k umformen: $L_k(y_k) = \vartheta_k(x)$. Nun zeigt Verf. mit Hilfe des Matrizenkalküls, daß die L_k alle gleich sind. Er benutzt zum Beweis die Eigenschaften der Cayley-Hamiltonschen Eigenwertgleichung. Sind alle $\varphi_k = 0$, so gilt auch $\vartheta_k \equiv 0$ ($k = 1, \dots, n$).

W. Haacke.

Amato, Vincenzo: Sull'integrazione di un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a matrice circolante w . Matematiche 8, 23—26 (1953).

Soit le système linéaire (*) $y' = A y$, où $y = (y_1, \dots, y_n)$, et A est la matrice $A = a_1 E + a_2 W + \dots + a_n W^{n-1}$, $a_i = a_i(x)$, et $W = \|a_{i,j}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,1} = w = \text{const} \neq 0$, autrement $a_{i,j} = 0$; soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines n -ièmes de $1/w$. Alors l'intégrale générale de (*) est donnée par

$$y_k = \frac{w}{n} \sum_i C_i \alpha_i^{n-k+1} A_i(x), \text{ où } A_i(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x w \sum_j a_j \alpha_i^{n-j+1} dx \right).$$

Ch. Blanc.

Agliata, Salvatore: Integrazione di particolari sistemi di due equazioni differenziali lineari e periodicità dei loro integrali generali. Matematiche 8, 14—22 (1953).

Quelques remarques sur l'intégration du système différentiel $y'_1 = a(x) y_1 + b(x) y_2$, $y'_2 = -b(x) y_1 + a(x) y_2$ et une condition de périodicité. Ch. Blanc.

Burdina, V. I.: Kriterien für die Beschränktheit der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen 2-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 329—332 (1953) [Russisch].

Es wird das System von Differentialgleichungen (1) $u' = p_{11}(t) u + p_{12}(t) v$, $v' = p_{21}(t) u + p_{22}(t) v$ betrachtet, wo $p_{ij}(t)$ periodische Funktionen mit der Periode ω sind. Mit den Bezeichnungen: $\mu_0 = \frac{1}{2\omega} \int_0^\omega (p_{11} + p_{22}) d\tau$, $H = \begin{pmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$,

H^* die Transponierte von H , h_{\min} und h_{\max} der kleinste und der größte Eigenwert der Matrix $\frac{1}{2}(H + H^*)$, wird das folgende Kriterium der Beschränktheit der Lösungen des Systems (1) aufgestellt: Wenn $\mu_0 < 0$ und für eine ganze Zahl k und ein β , $0 \leq \beta \leq \pi$ die Ungleichheiten gelten

$$k\pi - \int_0^{\omega} h_{\min} d\tau \leq \arccos \frac{1 - \operatorname{ch} \mu_0 \omega \cdot \cos \beta}{\operatorname{ch} \mu_0 \omega - \cos \beta} \cdot \int_0^{\omega} h_{\max} d\tau \leq k\pi + \arccos \frac{1 + \operatorname{ch} \mu_0 \omega \cdot \cos \beta}{\operatorname{ch} \mu_0 \omega - \cos \beta},$$

dann sind alle Lösungen von (1), für $t \rightarrow +\infty$, beschränkt. J. Szarski.

Conti, Roberto: Problemi ai limiti lineari generali per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un teorema di esistenza. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 153—159 (1953).

L'A. considera il sistema (1) $y'_i = \sum_{j=1}^3 F_{j,i} y_j + q_i$ ($i = 1, 2, 3$) dove le $F_{j,i}$, q_i sono funzioni di x , y_1, y_2, y_3 definite in $C: \alpha \leq x \leq \beta$, $|y_i| < \infty$, e soddisfacenti le condizioni di Carathéodory. Siano ξ_1, ξ_2, ξ_3 tre punti di (α, β) e si cerchino le soluzioni del sistema (1) soddisfacenti le condizioni ai limiti $\sum_{i=1}^3 \eta'_{i,i} y_i(\xi_i) = \eta_i$ ($i = 1, 2, 3$). L'A., valendosi del teorema del punto invariante, dimostra che se un certo determinante, costruito con i dati, si mantiene in valore assoluto maggiore di un numero positivo, il problema ammette almeno una soluzione. G. Sansone.

Gradštejn, I. S.: Über Lösungen von Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei den Ableitungen auf der Zeit-Halbgeraden. Mat. Sbornik, n. Ser. 32 (74), 533—544 (1953) [Russisch].

The question of the convergence of the perturbed solution to the solution of the degenerate system in the whole half-axis $t \geq 0$ is examined. Consider the system $\dot{X} = A(t)X + B(t)Y + \Phi(X, Y, t, t_1)$, $t_1 \dot{Y} = C(t_1)X + D(t_1)Y + \Psi(X, Y, t, t_1)$, X, Y, Φ, Ψ vectors, A, B, C, D , matrices, $\Phi(0, 0, t, 0) = \Psi(0, 0, t, 0) = 0$; assume that Φ and Ψ satisfy Lipschitz conditions with respect to X, Y (uniformly in t and t_1) with a Lipschitz constant tending to 0 when $X, Y \rightarrow 0$. If the roots Ω, ω of the equations $|D(0) - E\Omega| = 0$, $\begin{vmatrix} A(0) - E\omega & B(0) \\ C(0) & D(0) \end{vmatrix} = 0$, have real parts $< -3q$, $q > 0$, given $\varepsilon > 0$ there are $\sigma(\varepsilon) > 0$ and $\eta_1 > 0$ such that if $|X(0, t_1)|, |Y(0, t_1)| < \sigma$, $0 \leq t_1 \leq \eta_1$, then $|X(t, t_1)|, |Y(t, t_1)| < \varepsilon e^{-qt}$ for all $t \geq 0$. A similar result is found in terms of the existence of a Ljapunov function.

J. L. Massera.

Obi, Chike: Periodic solutions of non-linear differential equations of order $2n$. J. London math. Soc. 28, 163—171 (1953).

This paper extends some of the results of a previous one (this Zbl. 44, 90). It is concerned with systems of the form $\ddot{x}_r + \chi_r(x_r, \dot{x}_r^2) = k_{2r-1} f_{2r-1}(x_r, \dot{x}_r^2) \dot{x}_r + k_{2r} f_{2r}(x_r, \dot{x}_r) x_r + F_r(x, \dot{x}, t)$, $r = 1, 2, \dots, n$, where all the functions are analytic in all their arguments, F_r vanishing for all $t_r = 0$, the x_r 's and the k_r 's being small. The F_r 's are either independent of t or periodic and of least period 2π in this variable. The system $\ddot{x}_{r,0} + \chi_r(x_r, \dot{x}_r, \varepsilon) = 0$ has a non constant analytic solution satisfying certain initial conditions. The author studies only those solutions of the given system which are all periodic, none reducing to a constant, the initial conditions being the same as those of the system $\ddot{x}_{r,0} + \chi_r = 0$ and satisfying the conditions $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_r = x_{r,0}$. The conditions that such solutions exist are stated in his Theorem 1.

They are of various kind and complicated. This theorem is completed by theorem 2 where the least periods common to the solutions of the system, whose existence theorem 1 proves, are determined as functions of the least periods of the solutions of the reduced system. C. Racine.

Antosiewicz, H. A.: Correction to the paper „Forced periodic solutions of systems of differential equations“. Ann. of Math., II. Ser. 58, 592 (1953).

It is noted that in order to prove the results of the mentioned paper (this Zbl. 50, 91) it is not sufficient to assume that p satisfies a Lipschitz condition, but it should be assumed that the Lipschitz constant relative to p in the region $\|x\| \leq \varrho$, $t \geq 0$, may be made as small as we please if ϱ is small enough.

J. L. Massera.

Hukuhara, Masuo: Sur un théorème de Kneser. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 6, 329—344 (1953).

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires (1) $dy/dx = f(x, y)$ [où y désigne le vecteur (y_1, \dots, y_n)] dont le second membre est continu et borné dans un ensemble E et envisageons la famille $\mathfrak{F}(E)$ de courbes-solutions de (1) situées dans E . Nous dirons que cette famille jouit de la propriété droite de Kneser, lorsque A étant un continu dans E , la section $R_\xi(A)$, par un hyperplan quelconque $x = \xi$ situé à droite de A , de la zone d'émission $R(A)$ par rapport au système (1), est aussi un continu. D'après un théorème de Kneser, la famille $\mathfrak{F}(E)$ jouit de la propriété droite de Kneser, lorsque E est une couche Ω : $a \leq x < b$, $|y| < \infty$. Or, l'A. cherche des conditions suffisantes concernant E , pour que $\mathfrak{F}(E)$ jouisse de la propriété droite de Kneser. Il considère à ce but, d'une façon plus générale, le système d'inégalités différentielles (2) $|dy/dx - f(x, y)| \leq \varepsilon$, où $\varepsilon \geq 0$ est une constante fixée arbitrairement. Toute fonction continue $\varphi(x)$ est dite solution de (2), lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x, \varphi(x)) \right| \leq \varepsilon.$$

En ce qui concerne la famille $\mathfrak{F}(E)$ de courbes-solutions de (2), l'A. démontre le théorème suivant. Soit $f(x, y)$ une fonction continue et bornée dans un ensemble E fermé par rapport à la couche Ω . La famille $\mathfrak{F}(E)$ de courbes-solutions de (2) jouit de la propriété droite de Kneser, si à tout nombre positif δ et à tout point $A(x, \beta)$ de E on peut faire correspondre un ensemble $E^\delta(A)$ satisfaisant aux conditions suivantes: (i) tout point (x, y) de $E^\delta(A)$ appartient à E et satisfait aux inégalités $0 \leq x - \alpha \leq \delta$, $|(y - \beta)(x - \alpha) - f(x, \beta)| \leq \varepsilon + \delta$; (ii) pour $\rho > 0$, suffisamment petit, tout point (x, y) de E tel que $0 \leq x - \alpha \leq \rho$, $|(y - \beta)(x - \alpha) - f(x, \beta)| \leq \varepsilon + \rho$, appartient à $E^\delta(A)$; (iii) il existe une suite décroissante $\{\xi_\nu\}$, $\xi_\nu \rightarrow \alpha$, telle que la section $E_{\xi_\nu}^\delta(A)$ de $E^\delta(A)$ par l'hyperplan $x = \xi_\nu$ est un continu non-vide.

J. Szarski.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lindahl, Clarence H.: Overlapping Pfaffians with application to utility theory. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 210—211 (1953).

Aržanyč, I. S.: Über die Integration eines kanonischen Systems von Gleichungen in exakten Differentialen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 99—104 (1953) [Russisch].

The methods of Poisson and Jacobi for the integration of Hamilton's equations are extended to systems of the type $\partial q_\nu / \partial t_\sigma = \partial H_\sigma / \partial p_\nu$, $\partial p_\nu^h / \partial t_\sigma = -\partial H_\sigma / \partial q_\nu$, ($\sigma = 1, \dots, s$; $\nu = 1, \dots, n$). The complete integrability of the system is secured by the conditions $\partial H_\sigma / \partial t_\rho - \partial H_\rho / \partial t_\sigma = (H_\sigma, H_\rho)$, where the last expression denotes the Poisson bracket.

L. Gårding.

Hornich, Hans: Zur regulären Lösbarkeit gewisser partieller Differentialgleichungen. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 128—130 (1953).

Als notwendig und hinreichend dafür, daß die Gleichung

$$\sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = \sum A_{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$$

eine am Nullpunkt reguläre Lösung u hat, wird folgende Bedingung nachgewiesen: Für jedes Indexsystem j_1, \dots, j_n für welches der Ausdruck $S(j_1, \dots, j_n) =$

$\sum a_{i_1 \dots i_n} \binom{j_1}{i_1} \dots \binom{j_n}{i_n} i_1! \dots i_n!$ verschwindet, ist auch $A_{j_1 \dots j_n} = 0$, und im übrigen

ist $\lim |A_{j_1 \dots j_n} / S(j_1, \dots, j_n)|^{1/(j_1 + \dots + j_n)} < \infty$. Dann und nur dann, wenn kein $S(j_1, \dots, j_n)$ verschwindet, ist die Lösung eindeutig.

O. Perron.

Lax, Peter D.: Nonlinear hyperbolic equations. Commun. pure appl. Math. 6, 231—258 (1953).

Si considera un sistema quasilineare di n equazioni alle derivate parziali del primo ordine in n funzioni incognite, supponendo che il sistema stesso sia di tipo iperbolico e sia stato ricondotto alla forma (1) $\bar{U}_\nu = A \bar{U}_x + C$, dove \bar{U} è un vettore incognito a n componenti, A una matrice di ordine n , C un vettore assegnato a n componenti; A e C sono funzioni di x, y, U . Si studia per il sistema (1) il problema di Cauchy: determinare un vettore soluzione di (1) soddisfacente la (2) $\bar{U}(x, 0) = \Phi(x)$, dove $\Phi(x)$ è un vettore assegnato a n componenti. Supposto che i coefficienti del sistema (1) e il vettore $\Phi(x)$ siano funzioni analitiche dei loro argomenti, si risolve in

grande il problema di Cauchy nel caso analitico. Si passa poi al caso non analitico; nell'ipotesi che i coefficienti del sistema (1) e il vettore $\Phi(x)$ siano funzioni continue soddisfacenti una condizione di Lipschitz, si approssima il sistema (1) mediante una successione di sistemi a coefficienti analitici (3) $U_v = A_1 U_v + C_1$, e contemporaneamente si approssima il vettore $\Phi(x)$ mediante una successione $\{\Phi_v(x)\}$ di vettori analitici. Se C_1 è il vettore, che soddisfa il sistema (3) e la condizione $U_1(x, 0) = \Phi_1(x)$, la successione $\{U_v\}$ converge a un vettore U , che soddisfa la (2) e soddisfa quasi dappertutto la (1) in senso generalizzato (col significato dato nel lavoro a questa frase); U costituisce una soluzione generalizzata del problema di Cauchy. Se i coefficienti del sistema (1) e il vettore $\Phi(x)$ hanno derivate prime lipschitziane, allora U ha pure derivate prime lipschitziane e soddisfa dappertutto il sistema (1). M. Cingini-Cibrario.

Volkov, D. M.: Über die genauen Lösungen einer Klasse von hyperbolischen Gleichungen, die in der Theorie des hydraulischen Stoßes Anwendung finden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 49—50 (1953) [Russisch].

L'A. détermine des intégrales particulières de (*) $\partial^2 u / \partial x \partial y = B(x + y) \cdot (\partial u / \partial x + \partial u / \partial y)$ qui sont de la forme $u = \sum_{r=0}^N g_r(x + y) \frac{d^r \varphi(x)}{dx^r}$, où $\varphi(x)$ est une fonction quelconque; cela exige que l'on ait $g'_{v+1}(z) - 2B(z)g'_{v-1}(z) = B(z)g_v(z) - g'_v(z)$, $v = 0, \dots, N$, d'où l'on tire, avec des constantes d'intégration, g_0 et g_N plus une relation de récurrence entre g_v et g_{v+1} ; on en déduit facilement une relation de condition pour B , d'où des cas d'intégrabilité élémentaire de (*). Ch. Blanc.

Grib, A. A.: Eine Verallgemeinerung der Euler-Darboux'schen Gleichung mit ganzen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 953—956 (1953) [Russisch].

L'A. étudie des cas où une équation

$$(*) \quad \partial^2 Z / \partial x \partial y + P(x, y) \partial Z / \partial x + Q(x, y) \partial Z / \partial y = R(x, y) Z$$

peut se ramener à une équation d'Euler-Darboux $\partial^2 Z / \partial x \partial y + [A(x + y)] \partial Z / \partial x + [B/(x + y)] \partial Z / \partial y = CZ/(x + y)^2$, dont l'intégrale générale est connue. Entre autre, il montre ainsi que si $t = t(x, y)$ est tel que $P = c \ln t \partial x$, $Q = c \ln t \partial x$, $\partial^2 t / \partial x \partial y + Rt = 0$, alors l'intégrale générale de (*) est $Z = [F_1(x) + F_2(y)]/t$, F_1 et F_2 étant des fonctions arbitraires; puis que si $P = c \ln t \partial y$, $Q = c \ln t \partial x$, $t = f_1(x) + f_2(y)$, l'intégrale générale de (*) est $Z = u/t$, où u est l'intégrale générale de $\partial^2 u / \partial x \partial y - Ru = 0$. Ch. Blanc.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the inverse of the parabolic differential operator $\partial^2 / \partial x^2 - \partial / \partial t$. Amer. J. Math. **75**, 598—610 (1953).

Soit $\partial u = u_{xx} - u_t$ l'opérateur différentiel du type parabolique; on fait lui correspondre l'opérateur

$$\partial^* u = \lim_{h \rightarrow 0} \partial_h u, \text{ où } \partial_h u = \{[u(x + h, y) + u(x - h, y) - 2u(x, y)] + [u(x, y + h^2) - u(x, y)]\} h^{-2}.$$

Soit R un domaine rectangulaire (fermé) et R_0 son intérieur. Si la fonction $u(x, y)$ constitue une solution de l'équation $\partial^* u = 0$ dans R_0 , elle y est de classe C^1 . Il est connu que si la fonction $f(x, y)$ est assez régulière dans R_0 , l'intégrale

$$(1) \quad u(x, y) = -\frac{1}{2} \pi^{-1/2} \iint_R G(x, y; x', y') f(x', y') dx' dy',$$

où $G(x, y; x', y') = (y - y')^{-1/2} \exp[-(x - x')^2 / 4(y - y')]$, constitue une solution de l'équation $\partial u = f(x, y)$ dans R_0 . Les A.A. exposent l'exemple d'une fonction continue $f(x, y)$, telle que l'intégrale (1) correspondante ne satisfasse plus à l'équation $\partial u = f$. Au contraire, la fonction f étant continue dans R , l'intégrale (1) constitue une solution de l'équation $\partial^* u = f$. Elle est continue ainsi que la dérivée u_x et les dérivées fractionnaires $\partial^{1-\alpha} u / \partial y^{1-\alpha}$, $\partial^{2-\alpha} u / \partial x^{2-\alpha}$ ($\alpha > 0$) dans R_0 . Afin que les dérivées u_y et u_x existent dans R_0 , il faut et il suffit qu'il existe une limite pour $t \rightarrow 0$ de l'intégrale $\iint f(x', y') G_v(x, y; x', y') dx' dy'$, $D(t)$ étant le sous-ensemble de R , défini par les inégalités $|x' - x| < \varepsilon^{1/2}$, $y > y' > y - \varepsilon$. M. Krzyżński.

Fulks, W.: On the unique determination of solutions of the heat equation. Pacific J. Math. **3**, 387—391 (1953).

L'A. considera l'equazione (1) $u_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0$ nel rettangolo R : $0 < x < 1$, $0 \leq t \leq k$. Egli dimostra che solo la funzione $u = 0$ è la soluzione della (1) che verifica le seguenti condizioni: a) è non negativa in R ; b) u_{xx} e u_t sono continue in R ; c) $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$; d) $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$, se (x, t) tende al punto $(0, s)$

della frontiera di R lungo qualche arco d'equazione $t - s = a x^2$ ($a > 0$);
(e) $\lim u(x, t) = 0$ se (x, t) tende al punto $(1, s)$ della frontiera di R lungo qualche
arco d'equazione $t - s = a(x - 1)^2$ ($a > 0$). *G. Fichera.*

Douglis, Avron: A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Commun. pure appl. Math. 6, 259—289 (1953).

Ein System $\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x, y) u_j \right) = g_i(x, y) \quad (i = 1, \dots, n)$

oder in Matrixform $u_x + b u_y + c u = g$ heißt elliptisch, falls alle Elementarteiler von b komplex sind. Ist p eine reguläre Matrix, für die $p^{-1} b p = B$ die Jordansche kanonische Darstellung ist, und setzt man $w = p^{-1} u$, so ergibt sich die Gleichung $w_x + B w_y + C w = G$. Der Hauptteil kann nun hyperkomplex zusammengefaßt werden. Seien i und e zwei hyperkomplexe Elemente: $i^2 = -1$, $i e = e i$, $e^2 = 0$. Da nun die Matrix B direkte Summe von Matrizen B_j ist, die die Form $B_j = (b^{(j)}_{i,k})$ und \bar{B}_j besitzen mit $b^{(j)}_{i,k} = z_j$ bzw. $= 1$ bzw. $= 0$ für $i = k$ bzw. für $k = i + 1$ bzw. sonst, zerfällt der Hauptteil in eine Reihe von unter sich unabhängigen Systemen. Ein derartiges System $W_x + B_j W_y = 0$ kann nun in der Form $DW = 0$ geschrieben werden, wo $D = \partial/\partial x + (a + i b + e)\partial/\partial y$ und $W = \sum_{k=1}^r (u_k + i v_k) e^k$ bedeutet (a, b Konstante; u_k, v_k Real- und Imaginärteil der Funktionen w_k der Spaltenmatrix w ; w ist auch bei reellem u i. a. komplex, da p komplex sein kann). Aus der Struktur der durch (i, e) erzeugten Algebra geht hervor, daß die Lösungen W eine kommutative Algebra bilden. Die Konstruktion einer Elementarlösung ergibt die Cauchyschen Integralsätze. Zum Schluß werden noch analoge Fragen für Systeme mit mehr als zwei unabhängigen Variablen untersucht. *A. Kriszten.*

Douglis, Avron: Uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations. Commun. pure appl. Math. 6, 291—298 (1953).

Die in vorsteh. Referat entwickelte Theorie wird zum Beweise des folgenden Satzes benutzt: Die Anfangswerte bestimmen die Lösungen eines derartigen Systems eindeutig, falls die Koeffizienten gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen. Die verwendeten Methoden sind Verallgemeinerungen der für ähnliche Untersuchungen entwickelten Verfahren von Carleman und Lewy; dies erlaubt es auch, die Resultate auf gemischt elliptisch-hyperbolischen Typus zu übertragen. *A. Kriszten.*

Collatz, Lothar: Sulla maggiorazione dell'errore nel problema di Dirichlet per le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 68—71 (1953).

Verf. berichtet, ohne auf die Beweise einzugehen, über einige sehr bemerkenswerte Fehlerabschätzungen zum Dirichletschen Problem bei der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $L[u] = r$ vom elliptischen Typus und mit n unabhängigen Veränderlichen. Die Matrix der Koeffizienten der zweiten Ableitungen von u soll symmetrisch und negativ definit sein. Die Fehlerabschätzungen ergeben sich aus folgendem Satz: Es sei $w(x_1, \dots, x_n)$ eine nicht konstante Funktion mit stetigen zweiten Ableitungen, die in einem endlichen Gebiet G der Bedingung $L[w] \leq 0$ genügt. Ferner sei M das absolute Maximum von w in G und auf dem Rande Γ von G . Dann wird M nur auf dem Rande Γ angenommen, wenn entweder der Koeffizient c von u in $L[u]$ gleich Null ist oder wenn $c \geq 0$ und $M \geq 0$ ist. Aus diesem Satz werden Fehlerabschätzungen für die Lösung u des Dirichletschen Problems für das Gebiet G mit vorgegebenen Randwerten \tilde{u} auf Γ hergeleitet. Hierbei werden zwei Fälle betrachtet: 1. approximierende Funktionen v , welche der Differentialgleichung $L[v] = r$ in G streng genügen, 2. approximierende Funktionen \tilde{v} , die auf Γ die strengen Randwerte $\tilde{v} = \tilde{u}$ annehmen. Die Abschätzungen werden an der Wärmeleitungsgleichung als Beispiel erläutert und auf allgemeinere Randbedingungen ausgedehnt. Außerdem werden sie in Zusammenhang gebracht mit einer Methode von R. von Mises, bei der die Differentialgleichungen und Randbedingungen eines physikalischen Problems durch Ungleichungen $|F[v]| \leq \delta$ in G und $|V_\mu(v)| \leq \delta_\mu$ auf Γ ersetzt werden. *R. Sauer.*

Zitarosa, Antonio: Su un problema misto di Dirichlet-Neumann. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 257—260 (1953).

Karol', I. L.: Zur Theorie der Gleichungen vom gemischten Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 397—400 (1953) [Russisch].

The author considers the equation (1) $u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = 0$ in a region bounded by a curve Γ in the upper half-plane with endpoints in $A = (0, 0)$ and $B = (1, 0)$ and by two characteristic parabolas $4y + x^2 = 0$ and $4y + (x-1)^2 = 0$ in the lower half-plane meeting in $C = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$. If $\alpha < 0$, the equation has a unique solution with given boundary values which can be found by solving in succession Goursat's and Dirichlet's problems. If $0 < \alpha < 1$, boundary values should be given only on Γ and one of the arcs: AC or BC (Tricomi's problem). By a transformation of variables, $t = \operatorname{sgn} y (1 - \alpha)^{2/(1-\alpha)} y^{1-\alpha}$, (1) becomes one of the types $u_{xx} + \operatorname{sgn} t t^m u_{tt} = 0$, ($0 < m < 1$), $u_{xx} + \operatorname{sgn} t u_{tt} = 0$ or $\operatorname{sgn} t t^n u_{xx} + u_{tt} = 0$ ($n > 0$). For these equations, Tricomi's problem has been treated by various authors. If $\alpha > 1$, a solution of (1) is in general not bounded in a neighborhood of the x -axis and this case seems to be of little interest.

L. Gårding.

Lions, Jacques-Louis: Problèmes aux limites (I)–(III). C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2373–2375, 2470–2472; 237, 12–14 (1953).

Let Ω be an open subset of R^n and let E_L^1 be the set of all complex-valued differentiable functions in Ω with the square norm $\|u\|^2 = \int_{\Omega} (|u|^2 + \sum |\partial u / \partial x_i|^2) dx = \|u\|_{L^2}^2 + \sum \|\partial u / \partial x_i\|_{L^2}^2$. Let D_L^1 be the closure in E_L^1 of D_{Ω} , i. e. all infinitely differentiable functions vanishing outside compact subsets of Ω . Let D be an elliptic differential operator given by $Dq = - \sum \frac{\partial q}{\partial x_i} (g_i, \frac{\partial q}{\partial x_j})$ where $g_{ij} = g_{ji} \in L^{\infty}(\Omega)$ are real, have locally square integrable derivatives and satisfy $\sum g_{ij} \xi_i \xi_j = a(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)$, ($a > 0$), almost everywhere in Ω . Let M be a function in $L^{\infty}(\Omega)$ which is constant > 0 almost everywhere in Ω . Let H be the Hilbert space of all u in E_L^1 such that $Du \in L^2$ with the norm $\|u\|_H = (\|u\|_{L^2}^2 + \|Du\|_{L^2}^2)^{1/2}$. Let V be a closed subspace of E_L^1 containing D_L^1 and let $N(V, D)$ be the closed subspace of H consisting of functions u in V with Du in L^2 and such that $(Du, v)_{L^2} = \int_{\Omega} \sum g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx (= g(u, v)$, say) for all v in V . The following general boundary value problem is considered: Find u in H which satisfies $Du + Mu = f$ (f given in L^2), such that $h - u \in N(V, D)$, where h is given in H . Observing that $(g(u, u) + (Mu, u)_{L^2})^{1/2}$ is a norm in E_L^1 , equivalent with $\|u\|_{L^2}$, the solution is obtained as $u = h - h'$, where $h' \in V$ is defined by $(Dh + Mh - f, v)_{L^2} = g(h', v) + (Mh', v)_{L^2}$ for all v in V . When $V = D_L^1$ and $V = E_L^1$, we get Dirichlet's and Neumann's problems respectively. A problem of mixed type is obtained by taking V to be the closure in E_L^1 of the set of functions in D_L^1 vanishing in neighborhoods of a part of the frontier of Ω . [Reviewers's remark. The same procedure has recently been sketched by the reviewer, Math. Scand. 1, 55–72 (1953)]. Various extensions and variants are given. It is possible to replace D by an elliptic operator of the type $(-1)^m \sum_{|p|=|q|=m} D^p (g_{p,q} D^q q)$, (D^p a derivative of order $|p|$), and also to add lower terms

or to treat systems of equations. The scalar product $g(u, v) + (Mu, v)$ can be changed by adding a term $(A \gamma u, \gamma v)_F$ where γ is a bounded linear operator from E_L^1 to a Hilbert space F such that $\gamma f = 0$ when $f \in D_{\Omega}$ (boundary operator) and A is a bounded and positive or sufficiently small operator on F (The problem of Neumann-Višik; Višik, this Zbl. 44, 96). In the second note modifications necessary for the introduction of L^p -spaces are given. In the third note mixed boundary value problems for hyperbolic and parabolic equations are treated. Let $D(t, E)$ be the set of all distributions on D_R (R the real line), with values in a Banach space E . The hyperbolic equation $Du + Mu + \epsilon^2 u \epsilon^2 = T$ and the parabolic equation $Du + mu + \epsilon u / \epsilon t = T$ are considered, where $T \in D'(t, L^2(\Omega))$ vanishes when $t < 0$ and the boundary condition is $S = u - D(t, N(V, D))$, S being given in $D'(t, H)$. Both problems have unique solutions which can be found by a Laplace transformation. Various extensions are sketched and it is stated that most of the results of the first note are valid for functions with values in a Hilbert space. No proofs.

L. Gårding.

Éjdus, D. M.: Abschätzungen des Betrages von Eigenfunktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 973–974 (1953) [Russisch].

Improving a result by Smolickij (this Zbl. 41, 220) the author proves that if u is a normalized eigenfunction of a vibrating membrane in m -space and λ is the

corresponding eigenvalue, then $|u| \leq C \lambda^{m/4}$ where C depends only on the membrane. The tool is Green's formula applied to u^2 .

L. Gårding.

Rao, P. Sambasiva: On eigenfunctions of the membrane problem. *J. Indian math. Soc.*, n. Ser. 17, 1—20 (1953).

Es sei D ein begrenztes Gebiet im k -dimensionalen Euklidischen Raum mit einer regulären Begrenzung B . Das Randwertproblem (I) $\sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \lambda u = 0$ mit den Randbedingungen (I) $u(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$, (II) $\partial u / \partial n = 0$ längs B , wo n die Richtung der Normalen zur Begrenzung bedeutet, hat eine unendliche Anzahl von positiven Eigenwerten, die entsprechend einer wachsenden Folge der Größe nach geordnet werden können. Der n -te Eigenwert sei mit λ_n , die zugeordnete Eigenfunktion mit ω_n bezeichnet. Ferner wird angenommen, daß die Funktionen ω_n ein orthogonales System bilden. Sämtliche Eigenwerte sind positiv bei der ersten Randwertaufgabe ($u = 0$), während bei der zweiten $\lambda = 0$ einen einfachen Eigenwert mit der Eigenfunktion $\omega = |D|^{-1/2}$ darstellt, wo D das Volumen des von D begrenzten Gebietes ist. Läßt man n alle Werte 1, 2, 3, ... im Fall (I) und 0, 1, 2, ... im Fall (II) durchlaufen, so sind in beiden Fällen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ alle positiv, $\lambda_0 = 0$. Verf. betrachtet die Dirichletsche Reihe

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(P) \omega_n(Q)}{\lambda_n^{s+\beta/2+k/4}} J_{\beta+k/2}(R\sqrt{\lambda_n}), \quad s = \sigma + i\tau,$$

wo P und Q zwei Punkte im Innern des Gebietes D , J_ν die Besselfunktion ν -ter Ordnung, β und R zwei reelle Zahlen bezeichnen. Die Reihe (2) ist absolut konvergent für alle hinreichend großen Werte von σ , etwa $\sigma > \sigma_0$, und daher stellt ihre Summe eine analytische Funktion von s dar für $\sigma > \sigma_0$. — Verf. stellt sich als Aufgabe, die analytische Fortsetzung der Summe der Reihe (2) im ganzen komplexen Gebiet s zu studieren, und bezeichnet diese Funktion mit $\zeta_k(P, Q, \beta, s)$. Das Ergebnis kann wie folgt summiert werden: Wenn die als Länge gedeutete Größe R sich von der Entfernung zwischen P und Q unterscheidet, ist $\zeta_k(P, Q, \beta, s)$ eine Funktion von s allein, und wenn R der Entfernung zwischen P und Q entspricht, ist $\zeta_k(P, Q, \beta, s)$ eine meromorphe Funktion von s mit einfachen Polen auf der reellen Achse. Indem $k \geq 2$ angenommen wird, kann die Reihe (2) wie im Fall $k = 1$ mit Hilfe der Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion und der Kreisfunktionen untersucht werden. In der Arbeit wird ferner angenommen, daß die Kugel mit dem Mittelpunkt in P oder Q und vom Radius R vollständig im Gebiet D enthalten ist.

R. Gran Olsson.

Browder, Felix E.: On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 39, 433—439 (1953).

Let D be a bounded domain in R^n and let $H_m(D)$ be the completion with respect to the scalar product $(f, g)_m = \int_D \sum_{|\alpha| \leq m} D_\alpha f \overline{D_\alpha g} dx$, ($D_\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$), of the set $C_0^m(D)$ of

all complex-valued $2m$ times continuously differentiable functions vanishing outside compact subsets of D . Let K be a suitably differentiable linear elliptic but not necessarily self-adjoint differential operator of order $2m$ and B a suitably differentiable self-adjoint linear differential operator of order $2s$, ($s < m$), such that $(Bf, f)_0$ or $-B(f, f)_0$ is comparable to $(f, f)_s$ when $f \in C_0^{2s}(D)$. An eigenfunction of order 1 of K with respect to B is an element φ of $C^{2m}(D) \cap H_m(D)$ satisfying $K\varphi = \lambda B\varphi$ for some complex λ . An eigenfunction of order k is a φ in $C^{2m}(D) \cap H_m(D)$ satisfying $K\varphi = \lambda B\varphi + B\psi$ where ψ is an eigenfunction of order $k-1$ corresponding to λ . It is shown that all the eigenfunctions of K with respect to B are complete in $H_m(D)$. The following proof, which requires the boundary of D to be smooth if $4m-2s \leq n$, is sketched. Let K be the adjoint of K and put $L = \frac{1}{2}(K + K^*)$ and $A = \frac{1}{2}(K - K^*)$. Changing if necessary the signs of K and B and replacing K by $K + tB$, we may assume without loss of generality that $\lambda = 0$ is no eigenvalue and that $(Lf, f)_0$, ($f \in C_0^{2m}(D)$), can be extended to a scalar product $L(f, f)$ on $H_m(D)$ comparable to $(f, f)_m$. Then $A(f, f)_0$ and $(Bf, f)_0$ can be extended to completely continuous quadratic forms $A(f, f)$ and $B(f, f)$ on $H_m(D)$ and defining the completely continuous operators U and V by $A(f, g) = L(Uf, g)$, ($f, g, A \in H_m(D)$), and $B(f, f) = L(Vf, f)$, ($f, V \in H_m(D)$), it is seen that $K\varphi - \lambda B\varphi = B\psi$ is equivalent with (1) $(1 + U - \lambda V)\varphi = V\psi$. Because 0 is no eigenvalue, $T = V(1 + U)^{-1}$ exists and it is easy to see that it suffices to show the completeness of the eigenfunctions of T with respect to the identity operator. Now if f is orthogonal to all the eigenfunctions of T , then $q(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}f$ is analytic except perhaps at the origin. It can be shown that $q(\zeta)$ is bounded at the origin when $|\arg \zeta| \geq \varepsilon$ and $|\arg \zeta - \pi| \geq \varepsilon$ for arbitrary $\varepsilon > 0$ and that it has bounded order there. This combined with the Phragmén-Lindelöf theorem proves that $q = 0$ and hence $f = 0$. [Reviewer's remark. The completeness also follows from the results of Keldyš [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 11—14 (1951)] which can be applied directly to (1) once it is verified that some power of V is of Hilbert-Schmidt type. This is indeed true without any restrictions on the boundary of D . Replacing L by $L + t$ and A by $A - t$ (t a suitable constant), Keldyš's results also show

that it is possible to remove the restriction that B be definite. The completeness is still true if $Bq = 0$ implies that $q = 0$. The well-known inequalities of Soboleff (see Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome II, Paris 1951, this Zbl. 42, 114) show that completeness in $H_m(D)$ implies completeness in $L^p(D)$ for $p < 2n/(n-2m)$ if $2m < n$ and the boundary of D is smooth and completeness in any $L^p(D)$ with $p \leq 1$ if $2m = n$. Finally, some inequalities connecting the real and imaginary parts of the eigenvalues of K with respect to B are given.

L. Gårding.

Povzner, A. Ja.: Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Operators $-\Delta u + cu$. Mat. Sbornik. n. Ser. 32 (74), 109–156 (1953) [Russisch].

Es wird der Operator $Bu = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + c(x)u$ ($c(x)$ stetig) in unbeschränkten Gebieten untersucht. Ergebnisse: 1. Es sei B eine beliebige selbstadjungierte Fortsetzung von B . Die Resolvente R_λ von B ist ein Integraloperator von Carleman'schem Typus: $R_\lambda f(x) = \int_{E_s} H(x, y; \lambda) f(y) dy$. 2. Die Spektralschar $\{E_\lambda\}$ von $B \supset B$ wird erzeugt durch die Spektralfunktion ϑ : $(E_\beta - E_\alpha) f(x) = \int_{E_s}^\beta d_s \int_{E_s} \vartheta(x, y; s) f(y) dy$, wobei $\vartheta(x, y; \beta) - \vartheta(x, y; \alpha) = \int_\alpha^\beta \psi(x, y; s) d\sigma(s)$; $\sigma(s)$ eine nichtabnehmende Funktion; die Funktion $\psi(x, y; s)$ genügt in gewissem Sinne (nach x sowie y) der Differentialgleichung: $-\Delta u + cu - su = 0$. 3. Im Falle der Halbbeschränktheit von B ist R_λ die Laplace-Transformierte der Lösung einer Volterra'schen Integralgleichung. Defektindizes von B sind $(0, 0)$. Das kontinuierliche Spektrum der äußeren Randwertaufgabe: $du/dn + r(x)u|_S = 0$ ($r(x)$ stetig auf S) ist unabhängig von S sowie von $r(x)$. 4. Falls $c(x)$ absolut integrierbar ist, ist $\sigma(s)$ auf dem kontinuierlichen Spektrum von B differenzierbar. Anwendung: außerhalb des Punktspektrums hat das Quantenproblem der elastischen Streuung nur eine Lösung.

K. Maurin.

Levitán, B. M.: Über die Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 133–135 (1953) [Russisch]. Definitionen: $u_1(x), u_2(x), \dots$ sind Eigenfunktionen und μ_1^2, μ_2^2, \dots Eigenwerte des Problems:

$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \mu^2 u = 0, u|_B = 0$; B ist der Rand des beschränkten Bereiches D ; $\bar{D} = D \cup B$; D_ε die Untermenge von D , deren Punkte von B den Abstand ε haben. $\theta_s(x, y; \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n = \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s u_n(x) u_n(y)$, $\theta_s^*(x, y; \mu) = x^{-m/2} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{m/2-s} r^{-m/2-s} J_{m-2s}(\mu r) (s \geq 0)$,

$r = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$; $J_p(z)$ Besselsche Funktion p -ter Ordnung. Für $f(y) \in L_2(D)$, $x \in D_\varepsilon$,

$s \geq 0$ sei $c_n = \int_D f(y) u_n(y) dy$; $R_s(x, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n = \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right) c_n u_n(x)$; $R_s^*(x, \mu) =$

$\int_0^\mu \left(1 - \frac{r^2}{\mu^2}\right)^s d_r R^*(x, r)$, wobei $R^*(x, r) = \int_D f(y) \theta_s^*(x, y; r) dy$. Es werden die vier folgenden

Sätze gänzlich ohne Beweise ausgesprochen: 1. Es gibt eine Konstante $C = C_\varepsilon$, derart daß für $x, y \in D_\varepsilon$ $\sum_{\mu_n = \mu} |u_n(x) u_n(y)| \leq C \mu^{m-1}$ gilt. 2. Es gelten für $\mu \rightarrow \infty$ folgende bei fixiertem ε in $x, y \in D_\varepsilon$ gleichmäßige asymptotische Abschätzungen: $\theta_s(x, y; \mu) = \theta_s^*(x, y; \mu) + O(\mu^q)$ mit $q = m-1-s$ für $|s| \leq m-1$, $q = |s| - s$ für $m-1 < |s| \leq m$, $q = -1$ für $|s| > m$. 3. Bei fixiertem ε gilt gleichmäßig in $x \in D_\varepsilon$: $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \{R_{(m-1)/2}(x, \mu) - R_{(m-1)/2}^*(x, \mu)\} = 0$.

4. Es seien $p = (m-1)/2$; $s \geq p$; $s = [s] + \alpha$. Es gibt eine Konstante $C = C_\varepsilon$, derart, daß bei $\mu \rightarrow \infty$, $x \in D_\varepsilon$ gilt: $|R_s(x, \mu) - R_s^*(x, \mu)| < C_\varepsilon \mu^q$ mit $q = -1$ für $|s| \geq p+1$, $q = p-s$ für $|s| \leq p$, $q = -\alpha$ für $p < |s| < p+1$. Es sollen entsprechende Sätze für den Außenraum von D gelten.

K. Maurin.

Martin, M. H.: A generalization of the method of separation of variables. *J. rat. Mech. Analysis* **2**, 315—327 (1953).

L'A. determina tutte le soluzioni dell'equazione $u_{xx} + u_{yy} = 0$ della forma $u = u(X(x) + Y(y))$.
C. Miranda.

Ghizzetti, Aldo: Nuovo metodo di risoluzione del problema di Dirichlet per l'ellissoide. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **2**, 108—114 (1953).

Es wird eine Methode zur Lösung des Dirichletschen Problems für das Innere eines Ellipsoids entwickelt, welche analog zu dem von Verf. erstmals in der Ebene auf den Fall der Ellipse angewandten Verfahren (vgl. dies. Zbl. **42**, 337) verläuft.
A. Huber.

Košelev, A. I.: Die Differenzierbarkeit der Lösungen einiger Aufgaben der Potentialtheorie. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **32 (74)**, 653—664 (1953) [Russisch].

Let u be the solution of $\Delta u = f$ in a plane region D with boundary values zero and v the solution of $\Delta v = 0$ with boundary values g . Put $u_{ik} = \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k$, ($i, k = 1, 2$), $|f| = \left(\int |f|^p dx\right)^{1/p}$ and $|g| = \left(\int_C |g|^p ds\right)^{1/p}$ ($p > 1$; C the boundary of D). The inequalities $|u_{ik}| \leq M|f|$ and $|v_{ik}| \leq M|g|$ where M depends only on the region and p , are shown when D is a rectangle or the unit circle or a region which can be transformed into one of them by a sufficiently well-behaved conformal transformation. This generalizes a result of Michlin for $p = 2$ (this Zbl. **42**, 337). The proof uses a well-known result by Marcinkiewicz (this Zbl. **20**, 354).

L. Gårding.

Ninomiya, Nobuyuki: Sur un ensemble de capacité nulle et l'infini d'un potentiel. *Math. J. Okayama Univ.* **2**, 99—101 (1953).

Prolongeant les résultats de Evans-Deny qu'il cite, l'A. montre que pour le potentiel d'ordre α ($0 < \alpha < 3$) dans l'espace ordinaire, on peut charger tout ensemble A du type G_δ contenu dans un F_σ de capacité nulle d'ordre α , par une mesure > 0 sur A de façon que le potentiel soit infini sur A et fini sur CA .
M. Brelot.

Bradford, W. H.: Sub-biharmonic functions. *Duke math. J.* **20**, 173—176 (1953).

Mit Hilfe der Greenschen Formel und bekannter Eigenschaften subharmonischer Funktionen werden Sätze über gewisse Mittelwerte subharmonischer Funktionen zweier Variablen hergeleitet. Eines dieser Resultate (Theorem 2) ist als Spezialfall in einem Satz von M. Nicolesco (vgl. dies. Zbl. **3**, 210 und **5**, 206) enthalten.

A. Huber.

Loewner, Charles: On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings. *Pacific J. Math.* **3**, 417—436 (1953).

Dans le plan on sait que les seules transformations conservant la biharmonicité, de type $x' = \varphi(x, y)$, $y' = \psi(x, y)$ (φ, ψ ayant les dérivées quatrièmes continues) sont les similitudes. Si l'on ajoute que la fonction subit une transformation du type $u' = \chi(x, y)u$ (χ régulière comme φ, ψ) l'A. montre que toutes les transformations s'obtiennent par combinaison des similitudes et de l'inversion accompagnée de $u' = u/r^2$. Mais pour une fonction biharmonique fixée, il peut y avoir des transformations conformes à un paramètre (avec $\chi = 1$) autres que les similitudes. D'autre part des exemples sont donnés où la fonction de Green Γ est de signe variable; lorsque le domaine est l'extérieur d'une courbe convexe et le pôle à l'infini, la condition $\Gamma > 0$ équivaut à $\Delta \Gamma > 0$.

M. Brelot.

Szegő, G.: Remark on the preceding paper of Charles Loewner. *Pacific J. Math.* **3**, 437—446 (1953).

Exemples assez simples où la fonction de Green biharmonique d'un domaine plan n'est pas de signe constant. On considère \bar{R}^2 muni d'une coupure selon un arc

circulaire ou l'extérieur de certaines courbes simples de Jordan; le pôle est pris à l'infini pour la fonction de Green. M. Brelot.

Amanov, T. I.: Zur Lösung des biharmonischen Problems. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 389—392 (1953) [Russisch].

Let σ be the interior of the unit circle and put $W_0(f) = \int_{\sigma} f^2 d\sigma$, $W_1(f) = \int_{\sigma} (f_{\theta}^2 + \varrho^{-2} f_{\varrho}^2) d\sigma$ and $W_2(f) = \int_{\sigma} (f_{\varrho\varrho}^2 + 2\varrho^{-4} (\varrho f_{\varrho\theta} - f_{\theta})^2 + \varrho^{-4} (\varrho f_{\theta} - f_{\theta\theta})^2) d\sigma$, where ϱ and θ are polar coordinates. Then $W_1(f)$ is Dirichlet's integral and among all f with given $f(1, \theta) = \varphi(\theta)$ and $f_{\theta}(1, \theta) = \psi(\theta)$, $W_2(f)$ is minimized by a biharmonic function. Put $r = r - 1$ when r is entire and $r = [r]$ otherwise. For a function g defined on the unit circle put $|g| = \left(\int_0^{2\pi} g^2(\theta) d\theta \right)^{1/2}$ and let g_h be the translated function, $g_h(\theta) = g(\theta + h)$. The function g is said to be of class H^r if $|g| < \infty$ and f has absolutely continuous derivatives of order $\leq r - 1$ and $f^{(r)}$ satisfies a Lipschitz condition $|g^{(r)} - g| \leq M |h|^{r-1}$ if r is not entire and $|g_h^{(r)} - 2g^{(r)} + g^{(r)}_h| \leq M |h|$ if r is entire (M depends on g). It is shown among other things that if u is biharmonic and $W_0(u) + W_1(u) + W_2(u) < \infty$, then its boundary values φ and ψ exist almost everywhere and are of class $H^{3/2}$ and $H^{1/2}$ respectively. Conversely, if φ and ψ are of class $H^{3/2+\varepsilon_1}$ and $H^{1/2+\varepsilon_2}$ respectively, ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$), then there exists a unique biharmonic u having them as boundary values and satisfying $W_2(u) \leq K(\varepsilon_1^{1/2} M_{\varphi} + \varepsilon_2^{1/2} M_{\psi})$ where K is an absolute constant and M_{φ} and M_{ψ} the best Lipschitz constants for φ and ψ . Analogous theorems for harmonic functions were proved by S. M. Nikol'skij (this Zbl. 46, 105). L. Gårding.

Pini, Bruno: Sulle singolarità delle soluzioni della equazione $\Delta u + cu = 0$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 21—26 (1953).

Verf. verallgemeinert auf den Fall von im Mittel aufgenommenen Randwerten und verbessert im Falle von im gewöhnlichen Sinne aufgenommenen Randwerten einige Ergebnisse von Picone über die Lösungen der im Titel genannten Gleichung (dies. Zbl. 30, 304; 35, 347), indem er noch schwächere Bedingungen als die von Picone angibt, welche das identische Verschwinden der Lösung $u(P)$ in einem Gebiet mit sich bringen. G. Cimmino.

Pini, Bruno: Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 192—206 (1953).

Es handelt sich um die folgende Randwertaufgabe für die Lösungen $u(x, y)$ der Gleichung $u_{xxxx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$: in einem Gebiet der xy -Ebene, dessen Rand aus den beiden Kurven $x = \chi_1(y)$, $x = \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq a$ (die $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ sind stetig differenzierbar vorausgesetzt, mit $\chi_1(y) < \chi_2(y)$) und den beiden Strecken $y = 0$, $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$ und $y = a$, $\chi_1(a) \leq x \leq \chi_2(a)$ besteht, fragt man nach einer Lösung $u(x, y)$ der genannten partiellen Differentialgleichung, für welche $u(\chi_1(y), y)$, $u(\chi_2(y), y)$, $u(x, 0)$, $u_x(\chi_1(y), y)$, $u_x(\chi_2(y), y)$, $u_y(x, 0)$ vorgegebenen Funktionen von y in $0 \leq y \leq a$ oder von x in $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$ gleich sind. Das Problem wird zunächst auf den Fall zurückgeführt, daß $u(x, 0)$, $u_y(x, 0)$ identisch verschwinden sollen. In diesem Falle wird

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^2 \int_0^y \mu_i(\eta) \frac{1}{y - \eta} \exp \left[-\frac{x(-\xi)^2}{4(y-\eta)} \right] d\eta \\ + \sum_{i=1}^2 \int_0^y \nu_i(\eta) \frac{(x-\xi)^2}{(y-\eta)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} \right] d\eta$$

gesetzt; die obengesagten Randbedingungen ergeben dann ein System von vier Volterraschen Integralgleichungen 2. Art für die vier zu bestimmenden Funktionen $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\nu_1(y)$, $\nu_2(y)$. G. Cimmino.

Schwarz, Maria Josepha de: Su un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali concernente gli spostamenti nelle volte cilindriche sottili. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 82—88 (1953).

Es handelt sich um ein System von drei linearen partiellen Differentialglei-

chungen mit konstanten Koeffizienten in drei unbekannten Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$, dessen Lösungen im homogenen Fall (der inhomogene Fall läßt sich auf den homogenen leicht zurückführen) sich als gewisse lineare Differentialoperatoren der Lösungen $F(x, y)$ von $\Delta_3^2 F + K F_{xxx} = 0$ (K konstant) ausdrücken können. Verf. skizziert die Idee eines Rechenverfahrens für die Bestimmung einer Lösung u, v, w des gegebenen Differentialgleichungssystems im Rechteck $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$, für welche gewisse lineare Randbedingungen befriedigt sind.

G. Cimmino.

Variationsrechnung:

Boerner, Hermann: Carathéodory's Eingang zur Variationsrechnung. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **56**, 31—58 (1953).

Verf. gibt eine gedrängte Darstellung der Variationsrechnung vom Standpunkt der Feldtheorie. Die §§ 1—11 behandeln einfache Integrale und können mit Nutzen als Einführung und Ergänzung zum Buch von Carathéodory (dies. Zbl. **11**, 356) gelesen werden. Der Zusammenhang mit der analytischen Mechanik wird unter Skizzierung von Beispielen klar hervorgehoben. In §§ 12—14 werden Verallgemeinerungen der Feldtheorie auf mehrfache Integrale gebracht, insbesondere die Divergenzmethode nach De Donder-Weyl und die Carathéodorysche Determinantenmethode. Die Vielfalt der Feldtheorien für mehrfache Integrale erklärt sich dadurch, daß es sich immer um die Aufstellung hinreichender Bedingungen handelt, deren Leistungsfähigkeit sich überschneidet, während, wie Verf. betont, der Beweis der Notwendigkeit von Bedingungen im Rahmen der Feldtheorie auf Schwierigkeiten stößt.

M. J. De Schwarz.

Darbo, Gabriele: Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **22**, 134—142 (1953).

Let $Q(x, y)$, $(x, y) \in R = [a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$ be any given function and K the class of all functions $y(x)$, $a \leq x \leq b$, absolutely continuous in $[a, b]$ and such that $c \leq y(x) \leq d$. For any pair of functions $y_1, y_2 \in K$ let $\varrho = \varrho(y_1, y_2) = \max |y_1(x) - y_2(x)|$ for all $x \in [a, b]$. In view of applications to calculus of variations the following theorems are proved concerning the measurability of the function $Q[x, y(x)] y'(x)$, $a \leq x \leq b$, and the continuity of the functional $I[y(x)] =$

$\int_a^b Q[x, y(x)] y'(x) dx$. I. If $Q(x, y)$ is almost continuous in R and there are two functions $F(x)$ monotone in $[a, b]$, and $\varphi(y)$ L -integrable in $[c, d]$ such that $|Q(x', y) - Q(x'', y)| \leq |F(x') - F(x'')| \varphi(y)$ for all $(x', y), (x'', y) \in R$, then $Q[x, y(x)] y'(x)$ is almost continuous in $[a, b]$ for every $y(x) \in K$. II. If $Q(x, y)$ is also bounded in R , then $Q[x, y(x)] y'(x)$ is L -integrable in R and $I[y(x)]$ is uniformly continuous in K ; i. e., there exists a function $\theta(\varrho)$ such that $\theta(0+) = 0$ and $|I[y_1] - I[y_2]| \leq \theta(\varrho)$ where $\varrho = \varrho(y_1, y_2)$ for all $y_1, y_2 \in K$. These statements contain as a particular case previous results of L. Tonelli [Fondamenti di calcolo delle variazioni, Bologna, 1922—23], and in the proofs, which are new, a lemma of the reviewer is used [Cesari, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. **3**, 127—145 (1946)].

L. Cesari.

Bertolini, Fernando: A new proof of the existence of the minimum for a classical integral. Compositio math. **11**, 37—43 (1953).

Verf. zeigt die Existenz bei festgehaltenen Endpunkten des Minimums des klassischen Funktionals

$$F(L) = \int_L y^{1/\nu} ds \quad (\nu \text{ reell} \neq 0)$$

in der Klasse Γ der stetigen und rektifizierbaren Kurven der Halbebene $y \geq 0$ ($y > 0$) mit Hilfe eines Verfahrens, das aus Theoremen von M. Picone (dies. Zbl. **42**, 107) folgt. Dies läuft darauf hinaus, daß eine passende monoton wachsende

Folge von Unterklassen von Γ gebildet wird, deren Vereinigungsmenge Γ ist, für die das Minimum sofort aufzustellen ist, und gezeigt wird, daß dasselbe von einem bestimmten Index der Folge ab sich nicht ändert. *M. J. De Schwarz.*

Föllinger, Otto: Ebene Variationsprobleme mit freien Endpunkten. *Math. Z.* 58, 98—112 (1953).

Sia: $I(C) = \int_C F(x, y, x', y') ds$ un integrale del calcolo delle variazioni ove F è definita nel campo $\mathcal{G}_4: (x, y) \in \mathcal{G}_2; x'^2 + y'^2 > 0$ e positivamente omogenea in x', y' . L'A. studia il problema dei minimi relativi forti nel caso che: (A) i punti terminali sono liberi; (B) il secondo punto terminale è libero mentre il primo varia su di una curva passante per il primo punto terminale della curva estremante. Una curva C_0 di estremi P_1 e P_2 fornisce un minimo relativo forte con punti terminali liberi se è possibile determinare un intorno \mathcal{U} di C_0 e due intorni \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 ($\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2 = \emptyset$), di P_1 e P_2 rispettivamente, in modo che per tutte le curve C che appartengono ad \mathcal{U} col primo punto terminale in \mathcal{R}_1 ed il secondo in \mathcal{R}_2 , si abbia: $I(C) \geq I(C_0)$. Per trattare questi problemi l'A. riprende alcuni risultati di Rasmadse [*Math. Ann.* 75, 380—401 (1914)] relativi al caso di un'estremale con un punto terminale fisso e l'altro completamente libero. Per il problema (A) egli trova una condizione analoga a quella di Bliss per le estremali con punti terminali ambedue mobili su due curve. *G. Stampacchia.*

Pennisi, Louis L.: An indirect sufficiency proof for the problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions. *Trans. Amer. math. Soc.* 74, 177—198 (1953).

Sia R una regione dello spazio a $2n + 1$ dimensioni $(x, y, p) = (x, y^1, \dots, y^n, p^1, \dots, p^n)$ e si considerino le curve $C: y^i(x)$, ($i = 1, \dots, n; x^1 \leq x \leq x^2$) tali che le funzioni $y^i(x)$ sono assolutamente continue con derivate del primo ordine a quadrato integrabile e per le quali i punti $(x, y(x), y'(x))$ appartengono a R per quasi tutti gli x di (x^1, x^2) . — Siano $f(x, y, p)$; $\Phi^\beta(x, y, p)$, ($\beta = 1, \dots, m$); $\Psi^q(x, y, p)$, ($q = m + 1, \dots, m + t$; con $m + t \leq n$) funzioni di classe C'' nella regione R , si indichi con D l'insieme delle curve C per le quali è $\Phi^\beta(x, y(x), y'(x)) \geq 0$, ($\beta = 1, \dots, m$); $\Psi^q(x, y(x), y'(x)) = 0$, ($q = m + 1, \dots, m + t$), e si consideri l'integrale $I(C) = \int_{x^1}^{x^2} f(x, y(x), y'(x)) dx$. — Prefissati due punti $Q^s = (x^s, y^{s1}, \dots, y^{sn})$, ($s = 1, 2$)

e considerata una curva C_0 , appartenente all'insieme D , di classe C' e congiungente Q^1 e Q^2 , l'A. dimostra, sotto opportune condizioni, l'esistenza nello spazio (x, y^1, \dots, y^n) di un intorno I' di C_0 tale che la disuguaglianza $I(C) \geq I(C_0)$ è verificata per ogni altra curva C dell'insieme D , la quale appartiene all'intorno I' e congiunge i punti Q^1 e Q^2 . *S. Cinquini.*

Magenes, Enrico: Sul minimo relativo nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine n . *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 139—141 (1953).

Kondrašov, V. I.: Zur Theorie der nicht-linearen und linearen Eigenwertprobleme. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 90, 129—132 (1953) [Russisch].

Definitionen: D sei der Bereich des n -dimensionalen Raumes mit der Berandung $S = \sum_{i=1}^n S_n$, wobei S_n eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. $L_p^{(m)}(0)$ ist die Unter-
menge von $L_p^{(m)}(D)$, deren Elemente auf gewisse Weise am Rande verschwinden.

$$F_m^p(u) = \sum A_{l,r,q_r}(x) \left| \frac{\partial^{l_1} u}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right|^{q_1} \dots \left| \frac{\partial^{l_r} u}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right|^{q_r} \dots \left| \frac{\partial^{l_H} u}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} \right|^{q_H},$$

$$\max l_r \leq m, \quad \sum q_r \leq p, \quad \Phi_m^p(u) = \sum_{\Sigma \lambda = m} A_{m,\lambda}(x) \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} \right| + \bar{F}_m^p(u),$$

$\Phi_m^{p-1,1}(u, q)$, $F_m^{p-1,1}(u, q)$ sind entsprechende $(p-1, 1)$ -Formen. Die Form $F_m^p(u)$ heißt zugelassen, wenn $\int_D F_m^p(u) dD$ für jede $u \in L_p^{(m)}(D)$ sinnvoll ist. Hauptsatz. Bei allen zugelassenen Φ_m^p und F_m^q $|1 \leq \lambda \leq m; 1 \leq q \leq n p / (n - p \lambda)|$ gibt es eine unendliche Folge $\{u_k\}$ von Lösungen folgender rekurrenten Variationsaufgaben: es ist in $L_p^{(m)}(0)$ zu finden $\varphi = u_k$, für die $\int_D \Phi_m^p(\varphi) dD = \text{Minimum}$ wird bei den Zusatzbedingungen: $\int_D F_{p-\lambda}^q(\varphi) dD = 1$;

$\int_D F_{m-\lambda}^{q-1}(u_j, \varphi) dD = 0; j = 1, \dots, k-1.$ Die u_k sind dabei Lösungen der Gleichung:

$$(1) \int_D \Phi_{m-\lambda}^{p-1,1}(u_k, \xi_k) dD = \mu_k \int_D F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_k, \xi_k) dD; \mu_k = \frac{q}{p} \int_D \Phi_m^p(u_k) dD; \int_D F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_j, \xi_k) dD = 0;$$

$j = 1, \dots, k-1.$ ξ_1 durchläuft $L_p^{(m)}(0)$, ξ_k durchläuft $L_p^{(m)}(0)$ im Falle $q = p = 2$. Für Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) gelten Analoga der klassischen Hilbert-Schmidtschen Sätze. Es wird die Lösung der Eigenwertprobleme gewisser sehr allgemeiner elliptischer nichtlinearer Integralgleichungen angeführt. Das Ganze ist in recht kondensierter Form referiert, Beweise werden nicht angegeben.

K. Maurin.

Fet, A. I.: Ein Zusammenhang zwischen den topologischen Eigenschaften und der Anzahl der Extremalen auf einer Mannigfaltigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 415—417 (1953) [Russisch].

Sei R eine v -mal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der ein positiv reguläres Variationsproblem definiert ist. Verf. skizziert die Beweise folgender Sätze. Satz 1: Wenn es in R ein Punktpaar gibt, das nur durch einen Extremalenbogen verbunden werden kann, so ist R in sich auf einen Punkt deformierbar. Satz 2: Wenn eine Abbildung f eines Kompaktums A in den Raum $\Omega_{a,b}(R)$ der Kurven mit festgehaltenen Endpunkten existiert, so daß $\text{cat } f = k$ ist, so existieren auf R entweder k Extremalenbögen verschiedener Länge zwischen a und b oder ein Kontinuum solcher Bögen. Dabei ist $\text{cat } f$ die kleinste Zahl k mit der Eigenschaft: A ist als Summe von k abgeschlossenen Mengen A_1, \dots, A_k darstellbar, so daß f auf A_1, \dots, A_k nullhomotop ist. Satz 3: Sei R geschlossen, einfach-zusammenhängend und alle Bettischen Gruppen $H^r(R) = 0$ für $1 \leq r \leq k$, während $H^{k+1}(R) \neq 0$ ist. Dann ist die k -te Typenzahl der geschlossenen Extremalen nicht kleiner als die $(k+1)$ -te Bettische Zahl (mod 2) von R . Satz 4: Sei R geschlossen und nicht einfach-zusammenhängend. Dann gibt es auf R entweder nicht weniger als drei nicht null- und zueinander homotope kürzeste geschlossene Extremalen, oder eine nicht nullhomotope kürzeste geschlossene Extremale und eine nullhomotope geschlossene Extremale, oder ein Kontinuum nullhomotoper und eine nicht nullhomotope geschlossene Extremale. Die Zahl der geschlossenen Extremalen ist also nicht kleiner als zwei.

E. Burger.

Fet, A. N.: Über die algebraische Anzahl der geschlossenen Extremalen auf einer Mannigfaltigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 619—621 (1953) [Russisch].

Durch Anwendung von Homotopiemethoden (vgl. auch Fet, dies. Zbl. 46, 110) gelingt Verf. der Beweis einiger Homologieeigenschaften des Raumes Σ der geschlossenen Kurven auf einer einfach-zusammenhängenden, v -mal stetig-differenzierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit R , für welche die erste nichttriviale Bettigruppe $H^1(R)$ nicht nur aus Elementen ungerader Ordnung besteht. Hieraus ergeben sich für die geschlossenen Extremalen auf R unter den angegebenen Bedingungen die beiden Sätze: 1) Die Länge (mod 2) von Σ ist ≥ 3 . Diese untere Schranke 3 ist nicht verbesserbar. In Σ existiert ein solcher Kozyklus (mod 2) Z^{m-1} , daß $(Z^{m-1})^3$ nicht nullhomolog ist. Die Kategorie von Σ ist ≥ 3 . — 2) Die algebraische Anzahl der geschlossenen Extremalen eines positiv regulären Variationsproblems auf R ist ≥ 3 . Es existieren nämlich entweder drei geschlossene Extremalen mit den Indizes $(m-1)$ bzw. $2(m-1)$ bzw. $3(m-1)$ und den Längen $c_1 < c_2 < c_3$ oder ein Kontinuum geschlossener Extremalen gleicher Länge.

E. Burger.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germy, R. H.: Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certains systèmes d'équations intégrodifférentielles récurrentes. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 67, 13—18 (1953).

Una precedente ricerca dell'A. sulle equazioni integrodifferenziali ricorrenti (questo Zbl. 47, 347) viene estesa al caso di sistemi di simili equazioni. G. Cimmino.

Roberts, J. H.: A nonconvergent iterative process. Proc. Amer. math. Soc. 4, 640—644 (1953).

W. R. Mann und Fr. Wolf (dies. Zbl. 43, 100) betrachteten die Integralgleichung

(1) $y(t) = \int_0^t \frac{G[y(x)]}{[\pi \cdot (t-x)]^{1/2}} dx$ mit stetigem und für positive y wirklich ab-

nehmendem $G(y)$ bei $G(1) = 0$. Sie definierten die Funktionenfolge $y_0(t), y_1(t), \dots$

durch (2) $y_0(t) = 0$, $y_{n+1}(t) = \int_0^1 \frac{G[\min(y_n(x), 1)]}{[\pi(t-x)]^{1/2}} dx$. Genügt zusätzlich $G(y)$

in $[0, 1]$ einer Lipschitzbedingung, so wurde gezeigt, daß die Folge (2) gegen eine beschränkte Lösung von (1) konvergiert. — Verf. zeigt an dem Gegenbeispiel $G(y) = 1 - y$ für $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, $G(y) = \frac{1}{2} [1 - (2y - 1)^{1/3}]$ für $\frac{1}{2} < y$, daß eine Lipschitzbedingung oder eine andere Zusatzbedingung für die Konvergenz der Folge (2) unerläßlich ist. Als eine andere hinreichende Zusatzbedingung gibt er mit Beweis an, daß $G(y)$ konvex ist. R. Iglisch.

Kim, E. I.: Über eine Klasse von Integralgleichungen erster Art mit singulärem Kern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 205–208 (1953) [Russisch].

Es handelt sich um die Integralgleichungen:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} u(\eta, \tau) \sum_{i=1}^n A_i(\eta, \tau) \exp \left[-\frac{(y-\eta)^2}{4a_i^2(t-\tau)} \right] d\eta d\tau = f(y, t)$$

mit den Bedeutungen: a_i Konstanten, $A_i(\eta, \tau)$ stetige, beschränkte, integrierbare Funktionen, $f(y, t)$ eine gegebene Funktion mit einer stetigen, beschränkten Ableitung 2. Ordnung nach y und einer beschränkten, stetigen Ableitung 1. Ordnung nach t ; $u(\eta, \tau)$ gesuchte Funktion. Verf. zeigt, daß diese Integralgleichung unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^n a_i A_i(y, t) \neq 0$ auf eine Integralgleichung 2. Art zurückgeführt und mit der Methode der schrittweisen Näherungen gelöst werden kann. W. Thimm.

Fenyő, L.: Über eine Klasse von Integralgleichungen. Publ. math., Debrecen **2**, 248–251 (1953).

Let $K(P, P') = K(r)$ be an arbitrary square integrable function of the two variables P and P' on the surface of the unit sphere, r being the arcual distance between the two points P, P' . Then it is shown that if λ_n are the eigenvalues of the symmetric kernel $K(P, P')$, $\lambda_n = (2n+1)/4\pi c_n$, where c_n are the Fourier coefficients of $f(q) = f(\cos r) = K(r)$ in the expansion of $f(q)$ with respect to the Legendre polynomials. It is also shown that λ_n has multiplicity $(2n+1)$, the eigenfunctions being the spherical harmonics of order n . — The proof depends on the closure and completeness of Legendre Polynomials and the truth of the theorem in the special case where $K(r) = P_n(\cos r)$. S. Minakshisundaram.

Conti, Roberto: Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni integrali lineari. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 72–73 (1953).

Söhngen, H.: Algebraisierung der endlichen Hilbert-Transformation. Z. angew. Math. Mech. **33**, 280–281 (1953).

Die endliche Hilbert-Transformation $\mathfrak{H}\{F\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(\xi)}{x-\xi} d\xi$ läßt sich durch

die Transformation $\mathfrak{T}\{F\} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^s F(x) dx = f(s)$ algebraisieren, d. h. durch

die auf die Funktion f ausgeübte algebraische Operation $\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F\}\} = \operatorname{ctg} \pi s \cdot f(s) - f(0)/\sin \pi s$ abbilden, wenigstens für $F \in L^p$ ($p > 1$). Damit kann man die Integralgleichung der Gestalt $F(x) + \lambda \mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x)$ mit $G \in L^p$ ($p > 0$) lösen, nämlich auf eine lineare algebraische Gleichung für f reduzieren. Die Anwendung einer Umkehrformel für \mathfrak{T} (die sich aus der für die zweiseitige Laplace-Transformation ergibt) liefert F . Die Methode wird speziell auf die Integralgleichung für die Bodenpressung einer Staumauer angewendet. G. Doetsch.

●Funk, Paul, Hans Sagan und Franz Selig: Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Wien: Franz Deuticke 1953. VIII, 106 S.

Das Buch gibt eine für den Ingenieur bestimmte, aber auch mathematischen Ansprüchen genügende, leicht faßliche Einleitung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Für jede Gruppe von theoretischen Eigenschaften sind Anwendungsbeispiele aus der Vorstellungswelt des Technikers durchgeführt. Der Umfang des behandelten Stoffes wird durch folgende Stichworte gekennzeichnet: Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Systeme von solchen (Gleichstrommotor, Transformator), Integralgleichungen (Abelsche Gleichung), partielle Differentialgleichungen (Wärmeleitung), komplexe Umkehrformel, Regelungstechnik und mit besonderer Ausführlichkeit asymptotische Entwicklungen, die in den Büchern über Operatorenrechnung fast immer mit unzulänglichen Mitteln behandelt, hier aber auf eine solide Grundlage gestellt werden. *G. Doetsch.*

Isaacs, G. L.: On a limitation theorem for Laplace integrals. J. London math. Soc. 28, 329—335 (1953).

Wenn $A(u)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist, so wird gesetzt: $A_0(u) = A(u)$, $A_k(u) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^u (u-t)^{k-1} A(t) dt$ ($k > 0$), $B(u) = \int_0^u e^{-ts_0} dA(t)$, $B_k(u)$ entsprechend. Es wird gezeigt: Wenn $k \geq 0$, $\Re s_0 = \sigma_0 > 0$ und $\omega^{-k} B_k(\omega)$ in $[1, \infty]$ von beschränkter Variation ist, so ist $e^{-\omega s} \omega^{-k} A_k(\omega)$ für jedes s mit $\Re s = \sigma_0$ von beschränkter Variation in $[1, \infty]$ und strebt gegen 0 für $\omega \rightarrow \infty$. *G. Doetsch.*

Rodriguez-Salinas, Baltasar: Über einige asymptotische Entwicklungen von Laplaceschen Kurvenintegralen. Revista mat. Hisp.-Amer. 13, 120—127 (1953) [Spanisch].

Es wird zunächst ein allgemeiner Satz über die asymptotische Entwicklung eines Laplace-Integrals mit komplexem Weg aufgestellt, der in dem Satz von Doetsch, dies. Zbl. 43, 107, enthalten ist. Dann wird hieraus die asymptotische Entwicklung des Integrals $\varphi(z) = \int_0^\alpha \exp(z i x^p) g(x) dx$ ($\alpha > 0$, $p > 0$) abgeleitet, das viele wichtige Funktionen als Spezialfälle enthält. Vgl. hierzu die asymptotische Entwicklung desselben Integrals vermittels eines schon länger bekannten Satzes über Laplace-Integrale mit geradlinigem (auf einen reellen reduzierbaren) Weg in Doetsch, Revista mat. Hisp.-Amer. 13, 5—60 (1953), insbes. S. 44. *G. Doetsch.*

Chakrabarty, N. K.: Sur le calcul symbolique à deux variables. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 67, 23—27 (1953).

Es werden zwei Korrespondenzen von allgemeinen Operationen für die zweidimensionale Laplace-Transformation angegeben. Die erste ist bekannt (siehe Voelker-Doetsch, Die zweidimensionale Laplace-Transformation, A 1, Nr. 38, Basel 1950, dies. Zbl. 40, 59). Die zweite schließt von $\varphi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qv} h(x, y) dx dy$,

$$\psi(p) = p \int_0^\infty e^{-px} g(x) dx \text{ auf } \int_0^\infty \frac{\varphi(u, v) g(u)}{uv} du = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h(x, y) \psi(x)}{x} e^{-vx} dx dy.$$

G. Doetsch.

Pistoia, Angelo: Alcune questioni relative alla trasformata N -pla ($N \geq 2$) di Laplace. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 185—192 (1953).

I. Zitierung zweier Sätze, die sich auf die N -fache Laplace-Transformation einer „Faltung zweier Funktionen hinsichtlich einer linearen Mannigfaltigkeit“

beziehen und vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 45, 55) bewiesen wurden. II. Vorankündigung einiger Sätze über die Umkehrung der zweifachen Laplace-Transformation und von Sätzen Tauberscher Art für diese, welche die von L. Amerio (dies. Zbl. 25, 184) für die einfache Laplace-Transformation bewiesenen Sätze verallgemeinern.

G. Doetsch.

Delerue, P.: Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 67, 83—104 (1953).

Für die n -dimensionale Laplace-Transformation in der Gestalt

$$\varphi(p_1, \dots, p_n) = p_1 \cdots p_n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^n p_i x_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

werden einige Abbildungsgesetze und spezielle Korrespondenzen abgeleitet. Damit werden Integralgleichungen, die Mehrfachintegrale enthalten, gelöst und Bedingungen dafür aufgestellt, daß zwei Funktionen in der auf n Variable verallgemeinerten Hankel-Transformation reziprok sind.

G. Doetsch.

Singh, Udit Narayana: Sur quelques théorèmes de Hille et Tamarkin. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 885—887 (1953).

Les énoncés donnés sans démonstration étendent des théorèmes de Hille et Tamarkin (ce Zbl. 7, 157; 8, 306) sur la correspondance entre $f(x)$ et son couple de transformées de Fourier-Carleman $f_1(z)$, $f_2(z)$.

G. Bourion.

Singh, Udit Narayana: Fonctions entières et transformée de Fourier généralisée. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 14—16 (1953).

Suite de la note analysée ci-dessus. $f(z)$ étant une fonction entière de type exponentiel, soit pour $r \rightarrow \infty$: $\lim r^{-1} \log |f(-ir)| = h$, $\lim r^{-1} \log |f(ir)| = h'$;

supposant que $f(z)$ vérifie sur l'axe réel une condition $\int_0^x |f(\xi)| d\xi = O(|x|^k)$ pour $|x| \rightarrow \infty$, avec $0 \leq k < +\infty$, on considère son couple de transformées de Fourier-

Carleman: $g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$ pour $I(z) > 0$, $g_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$

pour $I(z) < 0$. Alors, pour $y \rightarrow 0+$, $g_1(x + iy) - g_2(x + iy) \rightarrow 0$ en dehors du segment $[-h', h]$. L'A. énonce ensuite une réciproque, puis un théorème où la fonction $f(z)$ est remplacée par un couple de fonctions définies respectivement dans les demi-plans $I(z) > 0$ et $I(z) < 0$.

G. Bourion.

Beurling, Arne and Henry Helson: Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers. Math. Scand. 1, 120—126 (1953).

Les AA. prouvent que les seules fonctions $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\sigma(x)$ vérifiant $\sup_n \|f^n\| < \infty$ (n entier > 0 ou < 0) avec $\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |d\sigma(x)|$ sont les exponentielles $e^{i(at+b)}$. Généralisation au cas de transformées de Fourier-Stieltjes sur un groupe abélien localement compact connexe.

A. Revuz.

Agmon, Shmuel: Complex variable Tauberians. Trans. Amer. math. Soc. 74, 444—481 (1953).

Eine mögliche Fassung des bekannten Satzes von S. Ikehara ist die folgende: Sei (1) $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\lambda(u)$ (mit reellem und nicht abnehmendem $\lambda(u)$) konvergent für $\Re s > 0$, und existiere gleichmäßig in jedem Intervall $|t| \leq T$ der Grenzwert

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} [f(\sigma + it) - A(\sigma + it)^{-1}] = \varphi(t);$$

dann gilt $\lambda(u+h) - \lambda(u) \sim Ah$ bei $u \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $h_1 \leq h \leq h_2$ (h_1, h_2 beliebige positive Konstante). Ein Hauptziel der Arbeit ist eine Verallgemeinerung, bei der von der Vor-

aussetzung, daß $s = 0$ im wesentlichen ein einfacher Pol ist, abgegangen und statt dessen eine ziemlich allgemeine Klasse von Singularitäten zugelassen wird. Zur Charakterisierung folgender Spezialfall: (1) sei konvergent für $\Re s > 0$ und beschränkt in jedem Bereich $\sigma > 0$, $0 < \varepsilon \leq |t| \leq T$; es existiere eine für $\Re s > 0$ konvergente Entwicklung $\Phi(s) = \sum a_n e^{-ns}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| > 0$, $\log |a_n|$ eine konkave Funktion von n), so daß die einzigen Singularitäten von $\Phi(s)$ auf der imaginären Achse die Punkte $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) sind und $f(s) - \Phi(s)$ für ein geeignetes $T_0 > 0$ beschränkt in dem Bereich $\sigma > 0$, $|t| \leq T_0$ ist; dann ist $\alpha(u+h) - \alpha(u) \sim h a_{[u]}$ bei $u \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $0 < h_1 \leq h \leq h_2$. Auch die Monotonievoraussetzung bei $\alpha(u)$ wird gemildert. — Die Beweismethode („method of principal indices“, mehr funktionentheoretischer Natur als bisher bei solchen Problemen, wurde vom Verf. früher (dies. Zbl. 34, 346) eingeführt und wird jetzt weiter ausgebaut. Ein Bild davon gibt folgender Satz:

(1) besitze die absolute Konvergenzabszisse $\sigma = 0$; $q_n \geq \int_n^{n+1} |dx(u)|$ sei eine gewissen Regularitätsvoraussetzungen genügende Folge positiver Zahlen; man setze

$$f_x(s) = (q_{[x]})^{-1} e^{sx} \left[f(s) - \int_0^x e^{-su} dx(u) \right];$$

dann ist die Familie $\{f_x(s)\}$ gleichmäßig beschränkt in jedem kompakten Bereich, in dem $f(s)$ analytisch ist. Wichtig ist alsdann die Untersuchung von Eigenschaften der Grenzfunktionen von $\{f_x(s)\}$. — Verf. verwendet die Methode zur Gewinnung weiterer Tauber-Sätze komplexer Art, bei denen unter gleichzeitiger Abschwächung der Voraussetzungen das \sim von oben durch

eine O -Beziehung ersetzt ist, die z. B. $\int_u^{u+1} |dx(u)|$ abschätzt.

W. Meyer-König.

Bloom, Melvin: On the total variation of solutions of the bounded variation moment problem. Proc. Amer. math. Soc. 4, 118—126 (1953).

Boas (this Zbl. 21, 307) has proved that whatever the real sequence $\{\mu_n\}$, the moment problem (1) $\int_a^\infty t^n d\Phi(t) = \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) has infinitely many solutions $\Phi(t)$ of bounded

variation and his proof shows that for any $\varepsilon > 0$ there is a solution with $\int_a^\infty |d\Phi(t)| < |\mu_0| + \varepsilon$.

Pólya has proved that for $a = -\infty$ there are infinitely many solutions which are entire transcendental functions (this Zbl. 20, 42) and also infinitely many step-function solutions with jumps at preassigned points (this Zbl. 20, 310). Using Pólya's methods the author proves the following results: 1. For $a = 0$ and $\varepsilon > 0$ (1) has an entire transcendental solution $\Phi(t)$ such

that $\int_{-\infty}^\infty |d\Phi(t)| < |\mu_0| + \varepsilon$. 2. If $0 < b_1 < b_2 < \dots$ tends to ∞ , $\varepsilon > 0$, $a = 0$, then (1) has a

step function solution $\Phi(t)$, with jumps at the points b_i , such that $\int_0^\infty t^n |d\Phi(t)| < \infty$, $\int_0^\infty |d\Phi(t)|$

$< |\mu_0| + \varepsilon$. This last result is a corollary of 3. Let $A = (a_{jk})$ be an infinite matrix with complex elements such that (i) every segment $(a_{\nu, q+\mu})$ ($\nu = 1, \dots, n$; $\mu = 1, 2, \dots, n, \dots$) is of rank n ($n = 2, 3, 4, \dots$), (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{j-1, k}/a_{j, k} = 0$, ($j = 2, 3, 4, \dots$), (iii) $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{1k}| = \infty$. Then

for $\varepsilon > 0$ and $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ there exists a $u = (u_1, u_2, \dots)$ so that (a) $Au = \mu$,

(b) $\sum_{k=1}^\infty |a_{jk} u_k| < \infty$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), (c) $\sum_{k=1}^\infty |u_k| < \varepsilon$. (iii) is necessary for (c). Pólya proves

this theorem without (iii) and (c). Finally for $\mu_0 = 0$, $a = 0$, $\varepsilon > 0$, the author constructs a step-

function solution $\Phi(t)$ of (1) whose jumps are at the points b, b^2, b^3, \dots ($b \geq 2$) and $\int_0^\infty |d\Phi(t)| < \varepsilon$.

J. Horváth.

Pollard, Harry: Distribution functions containing a Gaussian factor. Proc. Amer. math. Soc. 4, 578—582 (1953).

Satz: Dafür, daß eine in $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion $f(x)$ die Form $f(x) =$

$\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-y)^2} d\alpha(y)$ hat, wo $\alpha(y)$ eine Verteilungsfunktion ist, sind folgende Be-

dingungen notwendig und hinreichend: 1. $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$, 2. $f(x) \in C^\infty(-\infty, \infty)$,

3. die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k f^{(2k)}(x) \frac{t^k}{4^k k!}$ konvergiert gleichmäßig in $-\infty < x < \infty$ für jedes t mit $0 \leq t < 1$ gegen eine nichtnegative Funktion. — Zu der angegebenen Literatur über frühere Lösungen desselben Problems ist zu ergänzen die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 14, 213, wo das allgemeinere Problem der Darstellung in der Form

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4t}\right\} d\lambda(y) \text{ mit beliebigem } t > 0 \text{ behandelt wird.}$$

G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● Fréchet, Maurice: Pages choisies d'analyse générale. (Collection de Logique Mathématique. Sér. A. III.) Paris. Gauthier-Villars 1953. 213 p.

L'A., un des pionniers de l'Analyse fonctionnelle et de l'Analyse générale, a réuni dans ce volume ses articles les plus intéressants dans ce domaine. Pour alléger le texte, il a omis certaines démonstrations figurant dans les mémoires originaux, mais celles-ci sont toujours signalées par des références. La plupart des idées et des résultats qui étaient publiés dans ces mémoires, ont suggéré de nombreux et importants travaux ultérieurs et devenaient ainsi le point de départ de théories élaborées. L'A. ajoute des „remarques complémentaires“ où il signale quelquesuns des travaux qui prolongeaient directement les siens. — Chapitres: I. Vue d'ensemble. — II. Espaces fonctionnels. — III. Analyse fonctionnelle. — IV. Les espaces abstraits. — V. L'Analyse générale.

B. Sz. Nagy.

Klee jr., Victor L.: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. Trans. Amer. math. Soc. 74, 10—43 (1953).

W, Z seien topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\eta(w, t)$ von $W \times [0, 1]$ in Z heißt eine Isotopie bzw. Fastisotopie, wenn $\eta_t[\eta_t w = \eta(w, t)]$ für jedes $t \in [0, 1]$ bzw. $t \in (0, 1)$ eine Homöomorphie ist. Ist die Abbildung $\eta^*(w, t) = (\eta(w, t), t)$ eine Homöomorphie auf $W \times [0, 1]$ bzw. $W \times (0, 1)$, so heißt η eine h -Isotopie bzw. h -Fastisotopie. Zwei Abbildungen f_0, f_1 von W in Z heißen isotop bzw. fastisotop bzw. h -isotop bzw. h -fastisotop, wenn es eine Isotopie η usw. von W in Z gibt mit $\eta_0 = f_0, \eta_1 = f_1$. Ist $\eta_t W = Z$ für jedes $t \in [0, 1]$ bzw. $(0, 1)$, so spricht man von einer Isotopie usw. von W auf bzw. fast auf Z . Es gilt der folgende Isotopiesatz: Es sei Y eine schwach kompakte Teilmenge eines nichtreflexiven normierten linearen Raumes E , B ein beschränkter konvexer Körper in E , so daß eine δ -Umgebung $N_\delta(Y)$ in B liegt. Dann gibt es eine h -Isotopie von E fast auf E , so daß 1. $\eta_t x = x$ für $t = 1$ und $x \in E - \text{Int } B$ gilt ($\text{Int } B$ das Innere von B); 2. $\eta_0 E = E - Y$; 3. $\lim_{t \rightarrow 0} \eta_t^{-1} = \eta_1$ auf E und $\lim_{t \rightarrow 0} \eta_t \eta_0^{-1} = \eta_1$

auf $E - Y$ gilt im Sinne der uniformen Konvergenz auf jeder kompakten Menge. Speziell gibt es also eine Homöomorphie von E auf $E - Y$, die auf $E - \text{Int } B$ die Identität ist. Dieses Resultat läßt sich auch direkt mit Hilfe des Satzes von Eberlein beweisen. Dieses Ergebnis läßt sich ferner mit Hilfe der Mazurschen Homöomorphie von $L^1(M)$ auf $L^p(M)$ auch noch auf kompakte Y in den (reflexiven) L^p -Räumen unendlicher Dimension übertragen. Bedeutet E einen nichtreflexiven (B)-Raum oder einen L^1 -Raum unendlicher Dimension, so gilt in Beantwortung von Fragen von Kakutani: Ist U die Einheitskugel in E , so gibt es eine Homöomorphie von $E - \text{Int } U$ auf U , die auf der Einheitskugel U selbst die Identität ist. Es gibt eine Homöomorphie der Periode 2 von E auf sich ohne Fixpunkt, die U in sich abbildet. Jede Hyperebene eines nichtreflexiven E ist homöomorph mit S . Jeder ∞ -dimensionale L^p -Raum ist mit seiner Einheitskugel homöomorph. — Ist E nichtreflexiv und vollständig, Y schwach kompakt in E , so gibt es eine h -Isotopie η von E auf E , so daß η_0 die identische Abbildung auf E ist und $\eta_1 Y$ linear in eine Hyperebene projiziert. Der Hilbertsche Raum \mathfrak{H} ist auch seiner Einheitskugel homöomorph, ja sogar jedem konvexen Körper K in \mathfrak{H} . Der Rand von K ist homöomorph \mathfrak{H} oder $\mathfrak{H} \times S^{n-1}$, letzteres tritt ein, wenn der charakteristische Kegel von K eine lineare Mannigfaltigkeit der Codimension n ist. Es gibt zu jedem endlichen Polytop X in \mathfrak{H} eine Homöomorphie von \mathfrak{H} der Periode $n+2$ mit X als Fixpunktmenge. Es gibt auch eine Homöomorphie von \mathfrak{H} der Periode n , deren Fixpunktmenge homöomorph einer vorgegeben beliebigen relativ offenen Teilmenge von \mathfrak{H} ist oder gleich der Menge aller x mit $\|x\| \geq \varepsilon$. Im Anschluß an Resultate von O. H. Keller gilt: K sei eine konvexe kompakte, nicht in einer Hyperebene enthaltene Teilmenge eines separablen (B)-Raumes mit Basis; alle diese K sind topologisch äquivalent. Ist M ein metrischer Raum, so sind alle Homöomorphismen von M in \mathfrak{H} paarweise h -isotop. Am Schluß einige Anmerkungen über streng konvexe Körper und konvexe Teilmengen, in denen es stets eindeutig bestimmte Punkte kleinsten Abstandes von gegebenen Punkten gibt.

G. Köthe.

Schwartz, Laurent: Homomorphismes et applications complètement continues.

C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2472—2473 (1953).

Soient E et F des espaces localement convexes quelconques; l'A. généralise des théorèmes classiques de F. Riesz sur les opérateurs complètement continus dans les espaces de Banach, touchant le comportement d'une application linéaire $u + v$ de E dans F , lorsque v est supposée complètement continue (au sens de J. Leray, i. e. transforme un voisinage de 0 dans E en une partie relativement compacte de F), et qu'on suppose, soit que u est un isomorphisme de E sur un sous-espace fermé de F , soit que u est un homomorphisme faible de E sur F . Dans le premier cas, $w = u + v$ est un homomorphisme (fort) de E sur un sous-espace fermé de F , et le noyau de w est de dimension finie. Dans le second, w est un homomorphisme faible de E sur un sous-espace fermé de F , de codimension finie, pourvu que u satisfasse à la condition suivante (automatiquement vérifiée lorsque E et F sont des espaces de Fréchet): tout compact convexe de F est contenu dans l'image par u d'un compact convexe de E .

J. Dieudonné.

Cooper, J. L. B.: Coordinated linear spaces. Proc. London math. Soc., III.

Ser. 3, 305—327 (1953).

Die vorliegende Verallgemeinerung der Theorie der vollkommenen Räume von Köthe und Toeplitz ist noch weitergehend als die kürzlich von J. Dieudonné (dies. Zbl. **44**, 117) gegebene. Auf einer vollständigen Booleschen Algebra \mathfrak{R} werden vollständig additive Mengenfunktionen $L(a)$, $a \in \mathfrak{R}$, betrachtet, d. h. komplexwertige beschränkte Funktionen mit $L(\bigcup a_n) = \sum L(a_n)$, wenn die a_n disjunkt sind. Ist L positiv, so heißt es eine Maßfunktion. Ist eine Menge $\{L\}$ von Maßfunktionen auf \mathfrak{R} gegeben, so erzeugen die Mengen aller $a \in \mathfrak{R}$, auf denen endlich viele vorgegebene $L_i(a) < \varepsilon$ sind, einen Filter \mathfrak{M} auf \mathfrak{R} , der eine reguläre Masche auf \mathfrak{R} heißt. \mathfrak{R} sei der Durchschnitt aller Filtermengen, dann wird $\mathfrak{R}/\mathfrak{M}$ mit \mathfrak{M} als Nullumgebungsfilter ein Hausdorffscher Raum. Die in dieser Topologie stetigen L heißen absolut \mathfrak{M} -stetig. Es werden nun Räume folgenden Typs untersucht: Ein linearer Raum E wird als Koordinatenraum auf \mathfrak{R} , \mathfrak{M} bezeichnet, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt: Die Algebra \mathfrak{R} bildet eine Algebra von Projektionen von E auf Teilräume aE ; auf E ist eine Halbordnung $x < y$ erklärt, so daß aus $0 < y < x$ stets $\lambda y < \lambda x$ ($\lambda > 0$) folgt und $a y < a x < x$, $a \in \mathfrak{R}$; E besitzt einen dualen Raum E' , der auf E total ist; für $x' \in E'$, $x \in E$ ist $(x', a x)$ stets eine absolut \mathfrak{M} -stetige Mengenfunktion von $a \in \mathfrak{R}$; (x', y) ist für $0 < y < x$ stets beschränkt; E' enthält alle Mengenfunktionen dieser Eigenschaften; \mathfrak{M} ist umgekehrt die zu den $(x', a x)$ gehörige Masche; ist $0 < y_i < x$, $c_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \leq 1$, so gibt es ein $y < x$, das der schwache Limes von $\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i$ ist. — Unter diesen Voraussetzungen gilt, daß auch E' ein Koordinatenraum ist mit den adjungierten Projektionen als Algebra \mathfrak{R} . Der zu E' duale Koordinatenraum umfaßt E ; ist $E = E''$, so heißt E reflexiv. Ist in E keine Halbordnung erklärt, so ist E' stets reflexiv. Auf E werden in der üblichen Weise durch Klassen beschränkter Mengen verschiedene lokalkonvexe Topologien eingeführt, so die schwache und die starke. E' ist stets schwach folgenvollständig. Die Mackaysche k -Topologie, die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den schwach kompakten Teilmengen von E' , ist wieder die feinste lokalkonvexe Topologie auf E , die E' als konjugierten Raum ergibt. Entsprechend der Theorie der vollkommenen Räume läßt sich der Begriff der normalen Hülle einer Menge $S \subset E$ einführen: Es bezeichne $\text{var } L(a) = \sup \sum |L(a_n)|$, wobei über die disjunkten abzählbaren Zerlegungen von a das Supremum zu bilden ist; es bedeute $y < x$, daß $\text{var } (x', a x) \leq \text{var } (x', a y)$ für alle $x' \in E'$ gilt; dann ist die normale Hülle von S die Menge aller y mit $y > x$, $x \in S$. Die normale Hülle einer beschränkten bzw. schwach kompakten Menge ist wieder beschränkt bzw. schwach kompakt. — Durch Heranziehung maßtheoretischer Überlegungen ergibt sich folgende Darstellung der Koordinatenräume durch Funktionenräume: Es läßt sich eine Klasse von Mengen T_α mit Borelmaßen μ_α bestimmen, so daß jedes $x \in E$, $x' \in E'$ dargestellt wird durch Systeme $\{x_\alpha(t)\}$ bzw. $\{x'_\alpha(t)\}$ von μ_α -meßbaren Vektorfunktionen auf den T_α mit Werten in zueinander konjugierten Räumen $E_\alpha(t)$ bzw. $E_\alpha^*(t)$, so daß gilt $(x', a x) = \sum_{\alpha} \int_{A_\alpha} (x'_\alpha(t), x_\alpha(t)) d\mu_\alpha$ und $\sum_{\alpha} \int_{A_\alpha} |(x'_\alpha(t), x_\alpha(t))| d\mu_\alpha < \infty$; dabei ist A_α die a darstellende Menge aus T'_α . — Zum Schluß werden Anwendungen auf L - und M -Räume gemacht, insbesondere in Verallgemeinerung eines Satzes von Eidelheit ein Kriterium für die Auflösbarkeit einer Gleichung $h(x) = g$ gegeben, u eine stetige lineare Abbildung eines L -Raumes in einen beliebigen lokalkonvexen Raum.

G. Köthe.

Allen, H. S.: On groups of infinite matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A

56, 223—230 (1953).

Es sei α ein vollkommener Raum im Sinn von Köthe und Toeplitz, α^* sein dualer Raum, $\Sigma(\alpha)$ der Ring aller α in sich abbildenden unendlichen Matrizen. Es sei $G(\alpha) \subset \Sigma(\alpha)$ die Gruppe der Automorphismen von α , die transponierten Matrizen bilden dann die Automorphismengruppe $G(\alpha^*) \subset \Sigma(\alpha^*)$. Es sei β ein orthogonal abgeschlossener Teilraum von α . Dann bilden die Automorphismen von α , die β in sich bzw. elementweise in sich abbilden, Untergruppen $h(\beta)$ bzw. $g(\beta)$ von $G(\alpha)$. Zu verschiedenen β gehören stets verschiedene $h(\beta)$ bzw. $g(\beta)$. Bezeichnet $g'(\beta)$ die Transponierte zur Gruppe $g(\beta)$ des Orthogonalraumes β zu β und S die multiplikative Gruppe der skalaren Matrizen, so bildet das direkte Produkt $S \times (g(\beta) \cap g'(\beta))$ eine maximale abelsche Untergruppe von $G(\alpha)$. Für beliebige echte lineare Teilräume β gilt $\bigcap_i h(\lambda_i) = S$, wenn λ_i alle algebraischen Komplementärräume von β in α durchläuft. Für zwei abgeschlossene komplementäre Teilräume β, λ eines separablen vollkommenen Banachraumes gilt $h(\beta)h(\lambda) = g(\beta)g(\lambda)$. *G. Köthe.*

Amemiya, Ichiro: Quelques généralisations des théorèmes concernant aux produits directs des espaces linéaires localement convexes. Math. J. Okayama Univ. 2, 185—189 (1953).

L'A. démontre d'abord que tout produit d'espaces tonnelés est tonnelé; le résultat était connu, mais la démonstration se faisait jusqu'ici par dualité, alors que celle de l'A. est directe et fort simple. Il démontre ensuite que tout produit d'une famille d'espaces bornologiques est bornologique lorsque la puissance de la famille est strictement inférieure au premier cardinal fortement inaccessible, résultat déjà obtenu indépendamment par Donoghue et Smith (ce Zbl. 47, 106) et qui remonte essentiellement à Mackey. La démonstration de l'A. s'appuie sur un lemme intéressant de H. Nakano, d'après lequel sur un ensemble de puissance strictement inférieure au plus petit cardinal inaccessible, un ultrafiltre est formé des ensembles contenant un point si toute famille dénombrable d'ensembles de l'ultrafiltre a une intersection non vide. *J. Dieudonné.*

Nakano, Hidegoro: Concave modulars. J. math. Soc. Japan 5, 29—49 (1953).

R sei ein σ -Vektorverband (continuous semi-ordered linear space). Ein reellwertiges Funktional $m(x)$ auf R heißt dann ein konkaver Modular, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (1) $0 \leq m(x) < +\infty$ für alle $x \in R$, (2) aus $m(x) = 0$ folgt $x = 0$, (3) aus $x \leq |y|$ folgt $m(x) \leq m(y)$, (4) aus $x \leq y$ folgt $m(x + y) = m(x) + m(y)$, (5) $m(|\lambda + \mu| x/2) \leq (m(\lambda x) + m(\mu x))/2$ für $\lambda, \mu \geq 0$, (6) $\lim_{\xi \rightarrow 0} m(\xi x) = 0$, (7) ist $\{x_n\}$ eine aufsteigende Folge

nicht-negativer Elemente mit $\sup m(x_n) < +\infty$, so gibt es ein x mit $x_n \uparrow x$ und $m(x) = \lim m(x_n)$. Verf. zeigt: Jeder konkave Modular von R erfüllt die Dreiecksungleichung und ist eine Quasinorm von R , hinsichtlich derer R ein Frechet'scher Raum ist. Weiter existiert für jeden konkaven Modular $m(x)$ das Funktional $m_1(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} m(\xi x) \xi$, der Grenzmodular von $m(x)$.

Der Modular $m(x)$ heißt von erster Art, wenn aus $m_1(x) = 0$ stets $x = 0$ folgt; von zweiter Art, wenn $m_1(x) = 0$ für alle $x \in R$ gilt. Hinsichtlich jedes konkaven Modulars kann R dann eindeutig in zwei orthogonale normale Mannigfaltigkeiten F und S zerlegt werden, so daß m auf F von erster Art und auf S von zweiter Art ist. Ist $m(x)$ von erster Art, so ist der Grenzmodular eine Norm mit $m_1(x + y) = m_1(x) + m_1(y)$. Für Modulare zweiter Art werden die beiden Fälle, daß R keine diskreten Elemente besitzt bzw. ein diskreter Raum ist, gesondert behandelt. Den Abschluß bilden Anwendungen auf den Raum der meßbaren Funktionen und den Raum der Zahlenfolgen. *H.-J. Kowalsky.*

Halperin, I. and H. Nakano: Generalized l^p spaces and the Schur property. J. math. Soc. Japan 5, 50—58 (1953).

H. Nakano a défini (ce Zbl. 44, 113) des espaces de Banach généralisant les espaces l^p , de la façon suivante: on considère un ensemble A , deux fonctions $p(\alpha)$, $w(\alpha)$ définies dans A et telles que $p(\alpha) \geq 1$, $w(\alpha) > 0$; l'espace $l(p, w)$ est l'ensemble des familles $\alpha \rightarrow x(\alpha)$ telles que l'expression $\|x\| = \inf \eta$ pour tous les $\eta > 0$ tels que $\sum_{\alpha} w(\alpha) \left| \frac{x(\alpha)}{\eta} \right|^{p(\alpha)} \leq 1$ soit finie. Il a démontré (loc. cit.) que $l(p, w)$ est un espace de Banach pour la norme $\|x\|$, donné des conditions nécessaires et suffisantes pour

que $l(p, w_1)$ et $l(q, w_2)$ soient isomorphes, et une condition suffisante pour que toute suite faiblement convergente dans $l(p, w)$ soit fortement convergente. Les AA. montrent que cette dernière condition est aussi nécessaire, et donnent des démonstrations plus simples que les premières démonstrations de Nakano pour les autres propriétés. Ils indiquent enfin sommairement diverses possibilités de généralisations.

J. Dieudonné.

Ono, Takashi: On the extension property of normed spaces over fields with non-Archimedean valuations. *J. math. Soc. Japan* 5, 1—5 (1953).

Let k be a complete field with a non-trivial discrete valuation. A normed space S over k is said to have the extension property if, for any subspace S_0 of S , every bounded linear functional f_0 on S_0 has an extension to a bounded linear functional f on S , with $\|f\| = \|f_0\|$. The author presents a proof that this holds good if and only if S is non-archimedean, i. e. $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$. As the author himself acknowledges, this article overlaps with recent work of Monna, Cohen and Ingleton (Ingleton, this Zbl. 46, 120).

L. Nachbin.

Köthe, Gottfried: Dualität in der Funktionentheorie. *J. reine angew. Math.* 191, 30—49 (1953).

La théorie des fonctionnelles analytiques de Fantappiè a été rattachée par J. Sebastião e Silva (ce Zbl. 41, 438) à la théorie générale des espaces vectoriels topologiques, mais sans qu'il parvienne à munir de topologies satisfaisantes les espaces qu'il considérait. Cette lacune a été comblée par C. L. de Silva Dias, G. Köthe et A. Grothendieck, qui ont (indépendamment) eu l'idée d'appliquer au problème de Silva la théorie des espaces (F) et (LF) et fait rentrer ainsi la théorie de Fantappiè dans la théorie générale de la dualité entre espaces vectoriels topologiques. Le travail de l'A. donne essentiellement la description de cette dualité entre les deux espaces $P(O)$ et $R(\Omega - O)$ définis comme suit: Ω étant la sphère de Riemann, O un ensemble ouvert dans Ω , $P(O)$ est l'espace des fonctions analytiques dans O et nulles au point ∞ si ce point est dans O , avec la topologie de la convergence compacte qui en fait un espace de Montel (et aussi un espace de Fréchet); $R(\Omega - O)$ est l'espace des germes de fonctions analytiques sur $\Omega - O$, limite inductive des espaces de Banach formés des fonctions analytiques dans les voisinages fermés de $\Omega - O$, ayant pour intersection cet ensemble. La dualité est réalisée par l'intégrale $\langle u, x \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint u(t) x(t) dt$ étendue à un système convenable de courbes. Ces résultats sont identiques à ceux déjà publiés par C. L. de Silva Dias [Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 5, 1—58 (1952)]. En outre, l'A. détermine la forme générale d'une application linéaire continue de $P(O_1)$ dans $P(O_2)$, et examine certains types particuliers de telles applications.

J. Dieudonné.

Sebastião e Silva, J.: Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici. *Portugaliae Math.* 12, 1—46 (1953).

L'A. prosegue le proprie precedenti considerazioni (questo Zbl. 41, 438) per inquadrare la teoria dei funzionali analitici nell'analisi generale.

S. Cinquini.

Pellegrino, Franco e Franco Rugini: Sulla uniforme e semi-uniforme continuità dei funzionali analitici lineari. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 169—172 (1953).

Gli AA. enunciano alcune proprietà relative alla continuità uniforme e semi-uniforme (H. Haefeli, F. Pellegrino, questo Zbl. 30, 34) dei funzionali analitici, tra le quali riportiamo la seguente: Condizione necessaria e sufficiente, affinché un funzionale analitico lineare $F[y(t)]$, definito in una regione lineare (A) , sia uniformemente continuo in (A) , è che un intorno di continuità (relativo a un arbitrario $\varepsilon > 0$) di una sola (qualsiasi) funzione di (A) sia formato con l'insieme caratteristico A della regione di definizione.

S. Cinquini.

Pellegrino, Franco e Francesco Succi: Su alcune proprietà dei funzionali analitici misti e degli operatori da essi determinati. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 173—175 (1953).

Gli AA. enunciano alcune proprietà, tra le quali riportiamo la seguente: Sia $P(y)$ il campo di definizione della funzione $f(z)$ che l'operatore (1) $Fy(t) = f(z)$ fa corrispondere alla funzione $y(t)$ di R . Se l'operatore analitico (1) è definito in una riunione di regioni lineari di R , considerata una qualunque funzione (y_0, M_0) di R ,

per ogni altra funzione (y, M) di R con M appartenente a M_0 , risulta che $P(y)$ appartiene a $P(y_0)$. S. Cinquini.

Evans, Elisabetta e Franco Pellegrino: Sulla geometria delle regioni funzionali lineari. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 96—98 (1953).

Frehner, Hedi e Franco Pellegrino: Sulla topologia delle regioni funzionali lineari. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 105—107 (1953).

Pellegrino, Franco e Sami Varsano: Sulle regioni di definizione dei funzionali analitici non lineari. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 176—180 (1953).

Queste comunicazioni hanno origine dal seguente teorema di L. Fantappiè, che permette di studiare la struttura delle regioni lineari dello spazio S delle funzioni analitiche localmente e biregolari: Data una regione lineare R di S esiste sulla sfera complessa un insieme parziale chiuso e non vuoto A dove sono definite tutte e sole le funzioni di R ; viceversa l'insieme delle funzioni di S , definite in un insieme A chiuso, parziale e non vuoto della sfera complessa, è una regione lineare R di S . — Tra le proprietà enunciate dagli AA. citiamo quelle (contenute nella terza comunicazione) relative al prolungamento dei funzionali analitici localmente polinomiali o trascendenti interi. S. Cinquini.

Fantappiè, Luigi: Gli operatori funzionali vettoriali e tensoriali, covarianti rispetto a un gruppo qualunque. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 99—104 (1953).

La presente comunicazione è nell'ordine di idee di due altre Note dell'A. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 285—290 (1952) e questo Zbl. 46, 437], dedicate a operatori funzionali lineari K (che rappresentano grandezze osservabili e obbiettive), i quali sono esprimibili mediante prodotti funzionali proiettivi

$$K \varphi(x) = F_t[T_t \varphi(x)] = p(t) V_t T_t \varphi(x).$$

L'A. esamina il caso in cui l'indicatrice proiettiva $p(t) = p(t^1, \dots, t^r)$ di F_t non è invariante del gruppo duale del gruppo aggiunto, e definisce grandezze vettoriali e tensoriali, covarianti e controvarianti. S. Cinquini.

Fantappiè, Luigi: Su un'espressione generale dei funzionali lineari mediante le funzioni „para-analitiche“ di più variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 22, 1—10 (1953).

Come è noto la formula che l'A. ha stabilito per i funzionali analitici dipendenti da una funzione di una sola variabile $F[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z) f(z) dz$ non si estende senz'altro ai funzionali dipendenti da una funzione di più variabili, nel senso che non si conoscono formule integrali, le quali diano il valore del funzionale $F[v]$ per tutte le funzioni $f(z_1, \dots, z_n)$ del campo di definizione di $F[v]$. Nella presente Nota l'A. studia la classe dei funzionali $F[v]$ per i quali è valida, qualunque sia la funzione $f(z_1, \dots, z_n)$ ($n \geq 2$) appartenente al campo di definizione di $F[v]$, la formula

$$(1) \quad F[f(z_1, \dots, z_n)] = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \dots, z_n) \omega_{2n-1},$$

ove, posto $z_s = x_s + i x_{n+s}$ ($s = 1, \dots, n$), la varietà separatrice Γ_{2n-1} è una ipersuperficie chiusa dello spazio cartesiano (x_1, \dots, x_{2n}) , e ω_{2n-1} è una forma differenziale esterna del tipo

$$\omega_{2n-1} = \sum_{r=1}^{2n} (-1)^{r-1} u_r dx_1 \cdots dx_{r-1} dx_{r+1} \cdots dx_{2n}. \text{ Per la validità della (1) l'A. stabilisce la}$$

relazione fondamentale (2) $\sum_{r=1}^n \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + i \sum_{r=1}^n \frac{\partial u_r}{\partial x_{n+r}} = 0$, la quale, nel caso particolare $n = 1$,

si riduce alla ben nota condizione di monogeneità della funzione $u(z)$. Pertanto ogni n -pla di funzioni (u_1, \dots, u_n) (o vettore complesso), la quale soddisfa alla (2) viene chiamata funzione para-analitica di $z = (z_1, \dots, z_n)$. S. Cinquini.

Edwards, R. E.: On convex spans of translates of functions on a group. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 222—242 (1953).

Soient G un groupe localement compact, E un espace localement convexe, $a \rightarrow T_a$ une représentation de G dans E , l'application $a \rightarrow T_a f$ étant continue. Problème: étant donné $f \in E$, caractériser les éléments de $C(f, A)$, enveloppe convexe fermée de l'ensemble des $f_{a^{-1}}$, $a \in A$

(A : partie fermée de G). Par exemple: dans quel cas $C(f, A)$ est-il l'ensemble des éléments $\int_G T_a^{-1} f d\mu(a)$, où μ parcourt l'ensemble des mesures de Radon positives sur G à support contenu dans A et de masse totale 1? L'A. donne des conditions pour qu'il en soit ainsi. Lorsque G est abélien, ces conditions peuvent s'exprimer à l'aide de la transformée de Fourier de f , lorsque cette transformée existe en un sens convenable. Exemples spécialement étudiés: les espaces $L^p(G)$ ($1 \leq p < +\infty$), l'espace $C(R^m)$ des fonctions continues sur R^m muni de la topologie de la convergence compacte, le sous-espace des éléments tempérés de $C(R^m)$. L'A. étudie en plus grand détail la condition $0 \in C(f, A)$ [par exemple, il démontre de façon nouvelle le fait suivant: si $E = L^1(G)$, et si G est abélien, une condition nécessaire et suffisante pour que $0 \in C(f, G)$ est que $\int_G f(x) dx = 0$]. Autres problèmes étudiés: 1. pour $A \cap A' = \emptyset$, a-t-on $C(f, A) \cap C(f, A') = \emptyset$? 2. caractériser les fonctions continues de type positif sur \hat{G} , dual de G supposé abélien, dont le spectre est contenu dans A . *J. Dixmier.*

Beurling, Arne: A theorem on functions defined on a semigroup. *Math. Scandinav.* **1**, 127—130 (1953).

Auf der multiplikativen Halbgruppe S der positiven reellen Zahlen ≥ 1 werde $L^p[0, 1]$ gebildet. Für $f \in L^p$, $p > 1$, sei C_f^r , $1 \leq r \leq p$, der durch die $T_\xi f = f(x\xi)$, $\xi \in S$, in L^r aufgespannte abgeschlossene lineare Teilraum. Als schwache Hülle Γ_f^p der $T_\xi f$ wird der Durchschnitt $\bigcap_{1 \leq r < p} C_f^r \cap L^p$ bezeichnet. Es wird bewiesen, daß für ein $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, das in keinem $0 < x \leq a$ fast überall verschwindet, in Γ_f^p wenigstens eine Funktion der Form $x^{-\lambda}$ mit $\operatorname{Re} \lambda < 1/p$ liegt, also ein stetiger, in L^p liegender Charakter von S . Der Beweis benützt tiefliegende funktionentheoretische Hilfsmittel. Ein analoger Satz gilt für die additive Halbgruppe der positiven reellen Zahlen. *G. Köthe.*

Porcelli, Pasquale: Uniform completeness of sets of reciprocals of linear functions. *Duke math. J.* **20**, 185—193 (1953).

Soit $k_p (\neq 0)$ une suite de nombres complexes distincts, telle que $1 + k_p$ ne soit jamais réel négatif. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $K = \{(1 + k_p x)^{-1}\}$ soit total dans $C(0, 1)$. 1. La série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[1 - \frac{|(1 + k_p)^{1/2} - 1|}{|(1 + k_p)^{1/2} + 1|} \right]$$

diverge. 2. Pour un entier $s \geq 0$, x^s appartient au sous-espace vectoriel fermé $M(K)$ engendré par K . — Si $|\arg(1 + k_p)| \leq \theta < \pi$ et $|1 + k_p| \geq \delta > 0$, alors K est total dans $C(0, 1)$ si et seulement si $\sum |k_p|^{-1/2}$ diverge. — Si K n'est pas total dans $C(0, 1)$, alors $M(K)$ y est rare. — Si $0 < a < b$ et $K \subset C(0, b)$, alors K est total dans $C(a, b)$. *J. Horváth.*

Burgess, D. C. J.: Tauberian theorems for abstract Dirichlet's series with applications to the L^p spaces. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **3**, 378—384 (1953).

$\{x_n\}$ est une suite d'éléments d'un espace de Banach; $\{\lambda_n\}$ une suite réelle positive strictement croissante et tendant vers $+\infty$, s une variable réelle positive. Les séries $\omega_s = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s} x_n$ sont supposées convergentes. — Théorème: Si (i) $\lim_{s \rightarrow +0} \omega_s = \gamma$ et (ii) $\sum_{v=1}^{\infty} \|x_v\|^p (\lambda_v - \lambda_{v-1})^{p-1} = O(\lambda_n)$ quand $n \rightarrow \infty$ pour une valeur de $p > 1$, alors $\sum_{v=1}^{\infty} x_v = \gamma$. Un second théorème plus fin [condition (ii) élargie] est également établi. Applications à $L^p(0, \infty)$. *A. Revuz.*

Riguet, Jacques: Matrices de Stirling. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1839—1841 (1953).

Die Folgen $u = (u(n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$, über einem Integritätsbereich A mit Einselement bilden einen kommutativen Ring $\mathfrak{F}(A)$ mit Einselement bei der üblichen komponentenweisen Addition und der Cauchy-Multiplikation uv mit $uv(n) =$

$\sum_{i+j=n} u(i) v(j)$. $\mathfrak{P}(A)$ sei der Teiltring der Folgen mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Koordinaten. $\mathfrak{U}(A)$ sei der Matrizenring aus den unendlichen Matrizen $\alpha = (\alpha(i, j))$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) über A , die unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden. Für jedes $u \in \mathfrak{P}(A)$ wird $h_u(i)$ gleich der Wronskischen Funktion vom Grad i von $u(0), u(1), \dots$ gesetzt. Ist $u \in \mathfrak{P}(A)$, so liegt der n -te Abschnitt u_n von u in $\mathfrak{P}(A)$, damit kann h_{u_n} gebildet werden. Dann wird als Stirlingsche Matrix σ_u die Matrix $\sigma_u(i, j) = h_{u_j}(i - j)$ bezeichnet. Es wird gezeigt, daß σ_u in \mathfrak{U} die eindeutig bestimmte Inverse $\sigma_u^{-1}(i, j) = h_{u_i}^{-1}(i - j)$ besitzt. Weitere Eigenschaften von σ_u .

G. Köthe.

Cameron, R. H. and C. Hatfield: On the summability of certain series for unbounded nonlinear functionals. Proc. Amer. math. Soc. 4, 375–387 (1953).

Si estende un risultato precedentemente raggiunto dagli stessi AA. (questo Zbl. 32, 214) eliminando l'ipotesi che il funzionale considerato sia limitato; il teorema stabilito è il seguente: Sia C lo spazio di tutte le funzioni continue $x(t)$, ($0 \leq t \leq 1$) con $x(0) = 0$, e sia $L_2(C)$ lo spazio di tutti i funzionali misurabili secondo Wiener a quadrato sommabile. Sia $F(x)$ un funzionale di $L_2(C)$ tale che $|F(x)| \leq B \exp \left\{ A \int_0^1 x^2(t) dt \right\}$ e che in x_0 è continuo secondo la topologia di Hilbert. Posto

$$\Psi_{m_1, \dots, m_N}(x) = \prod_{k=1}^N H_{m_k} \left(\int_0^1 \sqrt{2} \cos \frac{2k-1}{2} \pi t dt \right),$$

ove $H_n(u) = (-1)^n 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} e^{u^2} d^n e^{-u^2} / du^n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), e anche $A_{m_1, \dots, m_N} = \int_C F(x) \Psi_{m_1, \dots, m_N}(x) d_W x$, risulta

$$F(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 1-0} \sum_{m_1, \dots, m_N=0}^{\infty} A_{m_1, \dots, m_N} \lambda^{m_1 + \dots + m_N} \Psi_{m_1, \dots, m_N}(x_0).$$

S. Cingini.

König, Heinz: Neue Begründung der Theorie der „Distributionen“ von L. Schwartz. Math. Nachr. 9, 129–148 (1953).

Die Schwartzsche Erweiterung der Funktion zur Distribution hat in erster Linie den Zweck, daß die Ableitung unbeschränkt ausführbar und mit dem Grenzübergang vertauschbar wird. Verf. konstruiert zu demselben Zweck statt des Raumes der Distributionen in genauer Analogie zur Algebra einen Erweiterungsbereich, dessen Struktur von vornherein festgelegt ist und nicht erst wie bei Schwartz aufgedeckt werden muß, und der sogar den allgemeinsten Funktionsbegriff enthält, nicht bloß den der integrierbaren Funktion. Die Schwartzsche Erweiterung des Funktionsbegriffs verhält sich zu der vorliegenden wie die Auflösung algebraischer Gleichungen im Körper der komplexen Zahlen zu der symbolischen Adjunktion algebraischer Größen. Es sei Ω eine offene Menge des R_n . Alle in Ω definierten und fast überall gleichen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n) = f(X)$ werden zu einer Klasse $f(X)$ zusammengefaßt. Eine Folge von Klassen f_k heißt konvergent gegen f , wenn dies für eine Folge ausgewählter Funktionen im klassischen Sinn gilt. Die Gesamtheit der Klassen wird als Koeffizientenbereich der formalen Potenzreihen $\tau = \sum f_{s_1, \dots, s_n} z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}$ in den Unbestimmten z_1, \dots, z_n zugrunde gelegt. \mathfrak{B} sei der Bereich der Potenzreihen τ , bei denen in einer Umgebung jedes Punktes von Ω nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind. In \mathfrak{B} wird definiert: 1. die Ableitung nach x_i durch Multiplikation mit z_i : $\partial \tau / \partial x_i = \sum f_{s_1, \dots, s_n} z_1^{s_1} \dots z_i^{s_i+1} \dots z_n^{s_n}$, 2. die Konvergenz einer Folge τ_k gegen ein τ , und zwar soll diese vorliegen, wenn a) in einer Umgebung jedes Punktes von Ω gleichzeitig alle Koeffizienten $f_k^{(k)}$ aller τ_k verschwinden, deren Indizes oberhalb gewisser, von dem Punkt abhängiger Zahlen liegen, b) für jedes (s_1, \dots, s_n) die Folge $f_{s_1, \dots, s_n}^{(k)}$ im obigen Sinn gegen den entsprechenden Koeffizienten von τ konvergiert, c) die Folge $f^{(k)} = f$ normal ist, d. h. durch eine lokal integrierbare Klasse majorisiert wird. Es wird nun eine Untergruppe \mathfrak{U} von \mathfrak{B} betrachtet, die hinsichtlich Differentiation und Konvergenz abgeschlossen ist, d. h. mit jedem Element liegen auch dessen partielle Ableitungen in \mathfrak{U} , und wenn die Folge $\tau_k \in \mathfrak{U}$ gegen τ konvergiert, so liegt auch τ in \mathfrak{U} . Für die in \mathfrak{B} nach \mathfrak{U} gebildete Restklasse $T = [\tau] \in \mathfrak{B}/\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$ können vom Repräsentanten unabhängige Definitionen von „Ableitung“ und „Konvergenz“ aufgestellt werden. In der Faktorgruppe \mathfrak{F} der Restklassen $T = [\tau]$, die den gewünschten Erweiterungsbereich darstellt, sind nunmehr Differentiation und Grenzübergang vertauschbare Prozesse.

Wenn ein Element τ_0 ausschließlich lokal integrable Koeffizienten hat, so gilt dasselbe für alle $\tau \in T = [\tau_0]$. Eine solche Restklasse $T = [\tau_0]$ heißt integral. Es wird nun gezeigt, daß der Modul \mathfrak{L} der integriblen T dem Bereich (D') der Distributionen von Schwartz isomorph ist. Die Begriffe „Ableitung“ und „Konvergenz“ sind in beiden gleichwertig. Schließlich wird das Schwartzsche „produit multiplicatif“ einer Distribution mit einer unbeschränkt oft differenzierbaren Funktion auf alle $T \in \mathfrak{L}$ verallgemeinert und dann mit seiner Hilfe ähnlich wie bei Schwartz (partition de l'unité) von den „lokalen“ Eigenschaften der Elemente von \mathfrak{L} zu „globalen“ Aussagen übergegangen.

G. Doetsch.

Albertoni, S. e M. Cugiani: Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni. I, II. Nuovo Cimento, Ser. IX 8, 874—888 (1951), 10, 157—173 (1953).

Es handelt sich um die Aufgabe, den Variablenwechsel in einer Schwartzschen Distribution zu definieren: Wenn $T\{\varphi(x)\}$ oder deutlicher $T_x\{\varphi(x)\}$ die ursprüngliche Distribution und $u = h(x)$ eine stetige Funktion mit eindeutiger und unbeschränkt oft differenzierbarer Umkehrfunktion $x = g(u)$ ist, welche Bedeutung hat dann $T_u\{\varphi(x)\}$? Da für eine Distribution, die mit einer gewöhnlichen Funktion äquivalent ist, folgendes gilt:

$$T_u\{\varphi(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(g(u)) \cdot |g'(u)| du, \text{ also } T_u\{\varphi(x)\} = T_u\{\varphi(g(u)) \cdot |g'(u)|\},$$

so wird diese Gleichung allgemein als Definition aufgestellt, entsprechend bei zwei Variablen:

$$T_{u_1, u_2}\{\varphi(x_1, x_2)\} = T_{u_1, u_2}\{\varphi(g_1, g_2) \cdot |dg_1, g_2/d(u_1, u_2)|\}.$$

Als ein Beispiel, bei dem die obigen Voraussetzungen über $u = h(x)$ nicht erfüllt sind, bei dem sich aber trotzdem T_u sinnvoll definieren läßt, wird ausführlich der Fall $u = x^2 - a^2$ behandelt. Die aufgestellte Definition führt für $T = \delta$ = Diracsche Funktion auf die in der Quantenmechanik schon früher benutzte Formel $\delta_{x^2-a^2} = [\delta_{x-a} + \delta_{x+a}]/2a$, die damit in der Distributions-theorie als legitim nachgewiesen ist. In ähnlicher Weise läßt sich T_p und speziell δ_p definieren, wo P ein Polynom mit lauter einfachen Nullstellen ist. — Die Ableitung einer durch $x = g(u)$ transformierten Distribution wird — wiederum in Verallgemeinerung der sich für T = gewöhnliche Funktion ergebenden Formel — definiert durch

$$dT_u\{\varphi(x)\}/du = T_u\{-\varepsilon[\varphi'_x(g(u))g'^2(u) + \varphi(g(u))g''(u)]\}$$

mit $\varepsilon = g'(u)/|g'(u)|$. Es gilt dann $dT_u/dx = (dT_u/du) \cdot (du/dx)$. Die Definitionen werden durch zahlreiche Beispiele illustriert, insbesondere solche, die für die Quantenmechanik wichtig sind.

G. Doetsch.

Fourès-Bruhat, Yvonne: Les distributions sur les multiplicités. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2201—2202 (1953).

Für die Anwendung auf hyperbolische Differentialgleichungen braucht man eine Definition der Distribution auf einer unbeschränkt differenzierbaren Mannigfaltigkeit X , die folgende Eigenschaften hat: Eine Funktion auf X ist eine spezielle Distribution; ein Maß ist das Produkt aus einer Distribution und einem Raumelement; für die Distributionen gilt derselbe Ausdruck für die Ableitung bei Änderung der Variablen wie für Funktionen: $\partial T_{[y]}/\partial y^j = (\partial T_{[x]}/\partial x^i)(\partial x^i/\partial y^j)$. Die von L. Schwartz auf S. 31 seines Buches „Théorie des distributions“ I (dies. Zbl. 37, 73) gegebene Definition erfüllt diese Bedingungen nicht. Daher wird hier eine andere gegeben und eine Anwendung auf die Wellengleichung gemacht.

G. Doetsch.

Dowker, Yael Naim: The mean and transitive points of homeomorphisms. Ann. of Math., II. Ser. 58, 123—133 (1953).

This paper brings some complements to the theory of invariant measures by N. Kryloff and N. Bogoliouboff (this Zbl. 16, 86). Ω : compact metric space. T : homeomorphism of Ω onto itself. Orbit Ω_p of a point p of Ω : set of the points $T^n(p)$, where $n = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$. A point p of Ω is called a mean point of T if the sequence of arithmetic means

$$F_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i p)$$

converges for every real valued continuous function $f(x)$ on Ω ; for such a point $\int_{\Omega} f(x) d\mu_p(p)$ is then a linear functional on the space $C(\Omega)$ whose corresponding (invariant) measure is denoted by μ_p , i. e. $L_p(f) = \int_{\Omega} f(x) d\mu_p(x)$. A mean point p is called

transitive if μ_p is an invariant ergodic measure. Theorem 1: If Ω consists of infinitely many points, then Ω contains infinitely many points. Theorem 2: If Ω is a locally connected, compact metric space, then Ω contains c mean points. Theorem 3: Let Ω be the orbit closure of a non

mean point p (i. e. $\Omega = \Omega_p$). Then the mean points form a set of first category in Ω . An example is given of a non locally connected compact metric space Ω with a homeomorphism of it onto itself, for which there are only countably many mean points although Ω has c points. The proofs of Theorems 1 and 2 rest partly on the theory of Kryloff-Bogoliouboff, partly in modifications of theorems due to B. Kerékjártó (this Zbl. 9, 39) and D. Montgomery [Bull. Amer. math. Soc. 51, 949—953 (1945)] on the behaviour of points near closed invariant sets and in particular near orbits of periodic points.

Chr. Pauc.

Blum, Edward K.: The fundamental group of the principal component of a commutative Banach algebra. Proc. Amer. math. Soc. 4, 397—400 (1953).

Soient B une algèbre de Banach complexe commutative avec une unité e , G le sous-groupe multiplicatif ouvert des éléments inversibles, G_1 la composante connexe de e dans G , P le sous-groupe additif de B formé des x tels que $\exp x = e$. Théorème: le groupe fondamental de G_1 est isomorphe à P . Comme $x \rightarrow \exp x$ est un homomorphisme ouvert du groupe additif B sur le groupe multiplicatif G_1 , le résultat est immédiat quand on sait que P est discret, ce que l'A. démontre à l'aide d'un théorème de Lorch. L'A. donne une autre démonstration, plus longue, et qui utilise un résultat non publié de sa thèse sur l'intégrale de Cauchy dans B .

J. Dixmier.

Dixmier, J.: Sur une inégalité de E. Heinz. Math. Ann. 126, 75—78 (1953).

The author proves the following theorem. Let H_i ($i = 1, 2, \dots, n$) be complex Hilbert spaces and let A_i be a Hermitean non negative operator in H_i . If the functional F , n -linear on $H_1 \times \dots \times H_n$ satisfies the inequalities $|F(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\| \|A_i x_i\| \|x_i\|^{-1}$ for $i = 1, 2, \dots, n$, $x_i \neq 0$, then $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ implies $|F(x_1, \dots, x_n)| \leq \|A_1^{\lambda_1} x_1\| \dots \|A_n^{\lambda_n} x_n\|$. In the case $n = 1$ this theorem gives the following sharpening of an inequality of E. Heinz (this Zbl. 43, 326): if A and B are two non negative Hermitean operators in a Hilbert space H and if C is a linear operation on H such that $\|Cx\| \leq \|Bx\|$, $\|C^*x\| \leq \|Ax\|$ then $\|(Cx, y)\| \leq \|B^v x\| \|A^{1-v} y\|$ if $0 < v \leq 1$. In the theorem of Heinz the right-hand side in the inequality was multiplied by $1 - 2v - 1$.

A. Alexiewicz.

Schäffer, Juan J.: On some problems concerning operators in Hilbert space. Anais Acad. Brasil. Ci. 25, 87—90 (1953).

Die hier unter Andeutung der Beweise mitgeteilten Ergebnisse betreffen (1) Kommutatoren $C = AB - BA$ in Banach-Algebren; Beispiel: Ist $C = A^n$, so ist A im verallgemeinerten Sinn nilpotent. (2) Konstruktion beschränkter Operatoren T im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} , die beschränkte Inverse, aber für kein n eine n -te Wurzel besitzen; Beispiel: \mathfrak{H} der Raum der in $1 \leq |z| \leq 2$ regulären Funktionen $f(z)$, $(Tf)(z) = zf(z)$.

H. Wielandt.

Halmos, Paul R., Günter Lumer and Juan J. Schäffer: Square roots of operators. Proc. Amer. math. Soc. 4, 142—149 (1953).

Ist D ein Gebiet der komplexen Zahlenebene, so bilden alle in D analytischen Funktionen mit $\|x\|^2 = \int_D |x(t)|^2 dt < \infty$ einen Hilbertschen Raum. Die Abbildung $Ax = tx(t)$ ist ein beschränkter Operator. Es wird durch Untersuchung des Spektrums von A bewiesen, daß A dann und nur dann eine Quadratwurzel besitzt, wenn die Menge aller λ mit $\lambda^2 \in D$ unzusammenhängend ist. Ist D ein Kreisring um den Nullpunkt, so ist A invertierbar und besitzt keine Quadratwurzel. Dies ist ein Gegenbeispiel gegen die Vermutung von Kaplansky, daß jeder beschränkte invertierbare Operator eine Quadratwurzel besitzt.

G. Köthe.

Korovkin, P. P.: Über die Konvergenz linearer positiver Operatoren im Raum der stetigen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 961—964 (1953) [Russisch].

In the operator-sequence $L_n(f) = \int_a^b f(y) d\varphi_n(x, y)$ let the $\varphi_n(x, y)$ be non-

decreasing functions of y for every fixed x in (a, b) . Then if $L_n(f) \rightarrow f$ holds, as $n \rightarrow \infty$ and uniformly in $a \leq x \leq b$, in the three cases $f \equiv 1$, $f \equiv x$, $f \equiv x^2$, it also holds for any continuous $f(x)$ defined in (a, b) . The hypotheses cannot be weakened to less than three cases for f . There are extensions to Čebyšev systems and to periodic functions. In particular, if $\varrho_0^{(n)} \rightarrow 1$, $\varrho_1^{(n)} \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$, and if, for every n , $\sum_{k=0}^n \varrho_k^{(n)} \cos kx \geq 0$, then $\varrho_0^{(n)} a_0 + \sum_{k=1}^n \varrho_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \rightarrow f(x)$, if $f(x)$ is continuous with period 2π and a_k, b_k are its Fourier coefficients. That $\varrho_k^{(n)} \rightarrow 1$ for $k \geq 2$ is now a consequence instead of a hypothesis. *F. V. Atkinson.*

Kaplansky, Irving: Products of normal operators. *Duke math. J.* **20**, 257–260 (1953).

Soient A, B des opérateurs continus dans un espace hilbertien H . Wiegmann a montré (ce *Zbl.* **31**, 243; **35**, 197) que si A, B et AB sont normaux, BA est normal moyennant certaines conditions de complète continuité. L'A. prouve ce qui suit: 1. le résultat est faux en général; 2. si A et AB sont normaux, BA normal $\Leftrightarrow B(A^*A) = (A^*A)B$; 3. si A, B, AB sont normaux, et si $C = B(A^*A) - (A^*A)B$, C^*C est une somme de commutateurs; 4. le résultat de Wiegmann est valable sous des conditions plus générales. Conjecture: si A et AB sont normaux, B hermitien, et si les vecteurs propres de A engendrent H , BA est normal. La rapidité et l'ingéniosité des démonstrations sont un plaisir pour le lecteur. *J. Dixmier.*

Kilpi, Yrjö: Über lineare normale Transformationen im Hilbertschen Raum. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* **154**, 38 S. (1953).

Verf. studiert diejenige Klasse von linearen Transformationen im Hilbert-Raum \mathfrak{H} , die nach Nakano normal heißen. Nach einführenden Definitionen (Maximalität bzw. Hypermaximalität normaler Transformationen) und Bezeichnungen untersucht Verf. die von den „Erweiterungselementen“ einer normalen Transformation N aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit. Gibt es ein $\alpha > 0$ derart, daß $(1.1) \|Nf\| \geq \alpha \|f\|$ ($f \in D_N$) gilt, so sind W_N und $W_{\hat{N}}$ abgeschlossen. (Dabei bezeichne \hat{N} die Einschränkung von N^* auf D_N und W_N bzw. $W_{\hat{N}}$ die entsprechenden Wertevorräte.) Die zugehörigen orthogonalen Komplemente $\mathfrak{H} \ominus W_N$ und $\mathfrak{H} \ominus W_{\hat{N}}$ heißen die Defekträume, deren Dimensionen m bzw. n die Defektindizes von N . Verf. zeigt, daß die Mannigfaltigkeit der Erweiterungselemente (mod. D_N) $(m+n)$ -dimensional ist. In einem weiteren Abschnitt behandelt Verf. die Frage der Fortsetzbarkeit normaler Transformationen zu hypermaximalen bzw. maximalen (normalen) Transformationen. Es wird eine gewisse Klasse L normaler Transformationen ausgezeichnet, bei denen sich Kriterien für die Fortsetzbarkeit angeben lassen. Verf. betrachtet dann abgeschlossene lineare Transformationen T in \mathfrak{H} ; sei $\alpha(l)$ das Supremum des α — bei festem (komplexen) l — mit $\|(T - lI)f\| \geq \alpha \|f\|$ ($f \in D_N$). Es wird u. a. gezeigt, daß die Dimension des Defektraums $\mathfrak{H} \ominus W_{T-lI}$ in jedem zusammenhängenden Teil der Menge derjenigen l -Werte, für die $\alpha(l) > 0$ gilt, konstant ist. Anschließend untersucht Verf. die Möglichkeit, analog dem v. Neumannschen Vorgehen bei symmetrischen Transformationen, eine Einteilung der Erweiterungselemente normaler Transformationen vorzunehmen. Dies gelingt nur unter gewissen speziellen Voraussetzungen. Zum Abschluß wird gezeigt, daß der Differentialoperator $(p(x)/i) d/dx + p'(x)/2i + q(x)$ [$p(x), q(x)$ sind hierbei komplexwertige Funktionen, die gewissen Regularitätsbedingungen genügen] genau dann normal ist, wenn $p(x)$ und $q(x)$ bzw. von der Form $A r(x)$ und $A s(x) + B$ sind, wobei A, B komplexe Konstanten und $r(x), s(x)$ reelle Funktionen bezeichnen. *H. Pachale.*

Williamson, J. H.: Linear transformations in arbitrary linear spaces. *J. London math. Soc.* **28**, 203–209 (1953).

L sei ein komplexer linearer Raum, L^* sein algebraisch dualer Raum, $\mathfrak{E}(L)$ der Endomorphismenring von L . Eine für alle komplexen $\lambda = \mu + i\nu$ erklärte Klasse $\{E(\lambda)\}$, $E(\lambda) \in \mathfrak{E}(L)$, heißt eine Spektralschar, wenn 1. $x^*(E(\lambda)x) \rightarrow 0$ für $\mu, \nu \rightarrow -\infty$ oder eines von beiden für alle $x \in L$, $x^* \in L^*$, 2. $x^*(E(\lambda)x) \rightarrow x^*(x)$ für $\mu, \nu \rightarrow \infty$ für alle x, x^* , 3. $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_1 \wedge \lambda_2)$ mit $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \inf(\mu_1, \mu_2) + i \inf(\nu_1, \nu_2)$. Für jedes Rechteck $R = (\mu_1, \mu_2] \times (\nu_1, \nu_2]$ sei $m(R) = E(\mu_1 + i\nu_1) + E(\mu_2 + i\nu_2) - E(\mu_1 + i\nu_2) - E(\mu_2 + i\nu_1)$. $\{E(\lambda)\}$ erzeugt ein Maß, wenn für jedes x, x^* die Mengenfunktion $x^*(m(R)x)$ zu einem Borelschen Maß auf der ganzen komplexen Ebene K erweitert werden kann. Ein $T \in \mathfrak{E}(L)$ besitzt eine klassische Spektralzerlegung, wenn es eine Spektralschar $\{E(\lambda)\}$ gibt, die ein Maß erzeugt und

einen mit T vertauschbaren quasnilpotenten Operator $Q \in \mathfrak{E}(L)$ (d. h. es gilt $|x^*(Q^n x)|^{1/n} \rightarrow 0$ für alle x, x^*), so daß für alle x, x^* gilt $x^*(Tx) = \int_K \lambda d(x^*(E(\lambda)x) + x^*(Qx))$. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer klassischen Spektralzerlegung für C ist, daß reelle Zahlen $k(x, x^*)$ existieren mit $|x^*(T^n x)| < k(x, x^*)^n$ für alle n, x, x^* . G. Köthe.

Feller, William: On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. Ann. of Math., II. Ser. 58, 166—174 (1953).

The differentiability and the (exp-) representability of the semi-group $\{T_t\}$ of bounded linear operators (E. Hille and the reviewer) presupposes that T_t is strongly continuous not only for $t > 0$ but also at $t = 0$. The author overcomes the continuity at $t = 0$. The result is important in view of the application to the Cauchy's problem for partial differential equations. Let $\{T_t\}$, $t > 0$, be a semi-group of bounded linear operators from a Banach space X to X such that i) the range of $\{T_t\}$ is dense in H , ii) $\lim_{t \rightarrow s} T_t x = T_s x$ for $x \in X$, iii) $\|T_t\|$ is bounded at $t = \infty$. The author defines the continuity set Σ of $\{T_t\}$ as the set of those x for which $\lim_{t \rightarrow 0} T_t x = x$. The infinitesimal generator Ω of T_t is defined by $y = \Omega x = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(T_h x - x)$, $x \in \Sigma$, if the latter limit exists. It is proved that Σ is dense in X and that, for $\lambda > 0$ and $x \in \Sigma$, the resolvent equation $\lambda z - \Omega z = x$ has a unique solution $z = J_\lambda x$ satisfying $\sup_{n \geq 0} \|J_\lambda^n x\| = N(x) < \infty$ and $\|J_\lambda^n J_\lambda x\| \leq (v(\delta) + \varepsilon) \|x\|$, $x \in \Sigma$, for $n \geq \lambda \delta (\delta + \delta')^{-1}$, $0 < \lambda < \lambda_0 = \lambda_0(x, \varepsilon)$ with $v(t) = \sup_{s > 0} \|T_{t+s}\| \leq v(t)$. Moreover, the set Σ metrized by $N(x)$ is a Banach space such that $N(J_\lambda x) \leq 1$ and $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(J_\lambda x - x) = 0$. Let, conversely, there be given an operator Ω defined from a set Σ dense in X to Ω such that its resolvent J_λ satisfies the above conditions with a finite non-decreasing function $v(t)$. Then it is proved that there exists a semi-group $\{T_t\}$ of bounded linear operators from X to X which is strongly continuous for $t > 0$ with the infinitesimal generator Ω and such that $\sup_{s > 0} \|T_{t+s}\| \leq v(t)$. It is defined by $T_t x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \exp(\lambda t (J_\lambda - I)) x$. K. Yosida.

Audin, Maurice: Sur les transformations linéaires dans les espaces de Banach et l'alternative de Fredholm. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 511—512 (1953).

F. Riesz und B. Sz. - Nagy definieren (Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest 1952, S. 203, 214, dies. Zbl. 46, 331) den „Fredholmschen Radius“ r_A der linearen Transformation A eines Banachschen Raumes als obere Grenze aller $r > 0$, für die eine Transformation L endlichen Ranges mit (1) $A = L + r^{-1}$ existiert. Verf. erklärt einen „Schmidtschen Radius“ ϱ_A , indem er (1) durch die schwächere Bedingung (2) „für $|\lambda| < r$ sei $\sum_n \lambda^n (A - L)^n$ konvergent“ ersetzt. Mit dem von Nikol'skij [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 7, 147—166 (1943)] definierten „Fredholmschen Radius“ R_A , für den (2) mit vollstetigem L verlangt wird, ist also $1/\|A\| \leq r_A \leq \varrho_A \leq R_A$, $r_A < \varrho_A$ ist möglich. — Ist A vollstetig, so ist $\varrho_A = \infty$, was von r_A nicht bekannt ist. — Für $|\lambda| < R_A$ gilt nach Nikol'skij die Fredholmsche Alternative für die Gleichung $(E - \lambda A)q = f$. Die E. Schmidtsche Methode löst die Gleichung für $|\lambda| < \varrho_A$, und für $|\lambda| < R_A$ durch zweimalige Anwendung. H. König.

Ruston, A. F.: Formulae of Fredholm type for compact linear operators on a general Banach space. Proc. London math. Soc., III. Ser. 3, 368—377 (1953).

Diese Arbeit schließt in ihren Bezeichnungen und Ergebnissen an eine frühere (*) des Verf. an (dies. Zbl. 43, 110). Es wird der Formalismus der Fredholmschen Theorie übertragen auf die Gleichungen $x = y + \lambda K x$, K ein kompakter (vollstetiger) Operator eines (B) -Raumes \mathfrak{B} in sich. Die Rieszsche Theorie liefert für jedes komplexe λ die Multiplizität $m(\lambda)$ als Dimension des Teilraumes aller $x \in \mathfrak{B}$ mit $(I - \lambda K)^m x = 0$ für genügend große n . Das Analogon der Fredholmschen Determinante ist eine ganze Funktion $A_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \lambda^n$, die für jedes komplexe λ genau eine $m(\lambda)$ -fache Nullstelle hat. Setzt man $A_n^v = \sum_{i=0}^v A_0^{v-i} K_n^{i+1}$ [die K_n^{i+1} sind in (*)

erklärt], so ist auch der Fredholmsche Minor $\Delta_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta_n^{\nu} \lambda^{\nu}$ für alle komplexen λ konvergent und ein n -Operator. Die Lösungen von $x = y + \lambda K x$ lassen sich nun in (*) entsprechender Weise durch Formeln darstellen. Diese Formeln gelten sowohl für komplexe wie für reelle (B)-Räume, auch gilt die Theorie für quasi-kompakte K , d. h. solche K , für die eine geeignete Potenz K^n kompakt ist.

G. Köthe.

Cronin, Jane: Analytic functional mappings. Ann. of Math., II. Ser. 58, 175—181 (1953).

Verf. verallgemeinert und vervollständigt ein Ergebnis der Schmidtschen Integralgleichungstheorie. Sei X ein komplexer Banach-Raum; man betrachte die Gleichung (1) $(I + C)x + T(x, y) + S(y) = 0$ (0 Nullelement aus X), wobei $x, y \in X$, I die identische Abbildung und C eine lineare vollstetige Transformation darstellt. Die Abbildungen T und S genügen den Bedingungen: (H_1) $T(0, 0) = 0$. (H_2) Es gibt eine Umgebung \mathfrak{U} von 0 und eine positive Konstante M derart, daß aus $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{U}$ folgt: $\|T(x_1, y_1) - T(x_2, y_2)\| \leq M \{\|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\|\} \cdot \{\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\}$. (H_3) Für jedes y ist $T(x, y)$ eine analytische Funktion von x . (H_4) $S(0) = 0$. (H_5) Es gibt eine Umgebung \mathfrak{V} von 0 und eine positive Konstante K derart, daß aus $y_1, y_2 \in \mathfrak{V}$ folgt: $\|S(y_1) - S(y_2)\| < K \|y_1 - y_2\|$. — Ferner gelte bez. Gleichung (1) noch die Voraussetzung A : Es gibt eine Umgebung \mathfrak{R} von 0 derart, daß aus $x \in \mathfrak{R}$ und $(T + C)x + T(x, 0) = 0$ die Aussage $x = 0$ folgt. Dann gilt Satz A: Für jedes „genügend kleine“ y hat Gleichung (1) mindestens eine Lösung „im kleinen“; d. h.: es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$ und ein $\varepsilon_2 > 0$ derart, daß Gleichung (1) für jedes y mit $\|y\| < \varepsilon_1$ mindestens eine Lösung x mit $\|x\| < \varepsilon_2$ besitzt. Zum Beweis (der nur noch für den Fall, daß $I + C$ singulär ist, geführt werden muß — siehe J. Cronin, dies. Zbl. 41, 237) reduziert Verf. Gleichung (1) auf ein Gleichungssystem in dem n -dimensionalen komplexen euklidischen Nullraum X_1 der Abbildung $I + C$. Die Invarianz des topologischen Abbildungsgrades einer diesem System zugeordneten Abbildung von X_1 in sich für „kleines“ y (Lemma A) und der Nachweis, daß dieser bei $y = 0$ positiv ist (Satz B), ergeben zusammen mit der Fundamentealeigenschaft des Abbildungsgrades (siehe Alexandroff-Hopf, Topologie I, Berlin 1935, Satz I, p. 467; dies. Zbl. 13, 79) die Richtigkeit der Behauptung des Satzes A.

H. Pachale.

Krasnosel'skij, M. A.: Die Anwendung von Variationsmethoden beim Problem der Bifurkationspunkte. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 199—214 (1953) [Russisch].

Definitionen. Die Zahl λ_0 wird Bifurkationspunkt des nichtlinearen Operators A ($A\theta = \theta$) (θ -Nullvektor des linearen Raumes \mathfrak{H}) genannt, wenn für jede $\varepsilon, \delta > 0$ solche λ und φ ($A\varphi = \lambda\varphi$) existieren, daß $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \|\varphi\| < \delta$. A heißt Gradient des Funktional $\Phi(\varphi)$ (im Hilbertschen Raume \mathfrak{H}) wenn: $\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) = (A\varphi, h) + \omega(\varphi, h), \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \omega(\varphi, h)/\|h\| = 0$. Wenn dabei

$\omega(\varphi, h)/\|h\| \rightarrow 0$ für $\|h\| \rightarrow 0$ gleichmäßig in $\varphi \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$, so sagt man: $\Phi(\varphi)$ ist differenzierbar auf \mathfrak{M} mit beschränktem Rest $\omega(\varphi, h)$. Verf. beweist mit Anwendung der topologischen Methoden für nichtzusammenziehbare Mengen den folgenden Hauptsatz: Der nichtlineare, vollstetige Operator A ($A\theta = \theta$) sei Gradient eines schwachstetigen, mit beschränktem Rest in gewisser Umgebung von θ differenzierbaren Funktional $\Phi(\varphi)$ ($\Phi(\theta) = \theta$), B sei das vollstetige, selbstadjungierte Fréchetdifferential von A im Punkte θ . Dann ist jeder Eigenwert von B Bifurkationspunkt von A . Anwendung. Es sei $K(x, y)$ der positivdefinite Kern des Integraloperators A : $A\varphi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)] dy$, wobei $f(x, u)$ stetig ist bei jedem $x \in G, |u| \leq \alpha; f(x, 0) \equiv 0$,

$|f(x, u)| \leq b(x)$ ($x \in G, |u| < \alpha$); $b(x) \in L^p$ ($p > 1$); $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} [f(x, \Delta u) - \Delta u \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0)] = 0$

gleichmäßig für $x \in G$. $B\varphi(x) = \int_G K(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(y, 0) \varphi(y) dy$. Dann fallen die Bifurkationspunkte von A mit den Eigenwerten von B zusammen.

K. Maurin.

Bade, William G.: An operational calculus for operators with spectrum in a strip. Pacific J. Math. 3, 257—290 (1953).

In this paper an operational calculus for closed distributive operators is developed. Let T be a distributive operator in a Banach space X , with the domain $D(T)$. The spectrum, $\sigma(T)$, of T is supposed to be situated in the strip S_0 : $-\gamma \leq \text{irr } \lambda \leq \gamma, \lambda = \sigma + i\tau$, moreover the author supposes that the resolvent $R_\lambda(T)$ of T satisfies for every $t > \gamma$ the inequality $\sup_{|\sigma| \leq t} \|R_\lambda(T)\| < \infty$.

Then the operational calculus for the operator T is constructed as follows. The author considers at first the class $L(0, \gamma)$ of the functions $f(\lambda)$ which are analytic in an open strip $S_1 \supset S_0$ and are such that (i) $f(\lambda) \rightarrow 0$ as $\tau \rightarrow \pm \infty$ in every closed strip S such that $S_1 \supset S \supset S_0$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma + i\tau)| d\tau < \infty$ in S . For these functions the operator $f(T)$ is defined as

$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_{\lambda}(T) d\lambda$, Γ being an appropriate contour composed of two straight lines enclosing $\sigma(T)$; $f(T)$ is then a bounded operator defined on X , and has the usual properties $(f+g)T = f(T)+g(T)$, $(fg)(T) = f(T)g(T)$. Then the author enlarges the class of admissible functions $f(\lambda)$ introducing the family $L(n, \gamma)$ of those functions for which $(\lambda - \lambda_0)^{-n} f(\lambda) \in L(0, \gamma)$ for $|\operatorname{re} \lambda| > \gamma$; the operator is then defined as $f(T) = (2\pi i)^{-1} (\lambda - \lambda_0)^{-n} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_{\lambda}(T) (\alpha I - T)^n d\lambda$ (the right-

hand side does depend on α). This operator is defined in the domain $D_n(T) = \{x | Tx, \dots, T^{n-1}x \in D(T)\} \cap D(T)$. If $f \in L(n, \gamma)$, $g \in L(m, \gamma)$ then $(fg)(T)$ is defined for $x \in D_{m+n}(T)$ and $(fg)(T) = f(T)g(T)$. The consistency with Taylor's calculus of operators (this Zbl. 42, 121) is proved. The operator $f(T)$ is not necessarily closed in $D_n(T)$, it may be, however, extended to a larger domain as to be closed. Assuming further conditions on the growth of $\|R_{\lambda}(T)\|$ the author studies operators $f(T)$ for these functions $f(\lambda)$ which are the bilateral Laplace-Stieltjes trans-

forms: $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda \xi) d\beta(\xi)$. The operator defined now by a new formula, is bounded and

coincides with the operator defined formerly in its domain, moreover $f(T) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\xi \gamma) d\beta(\xi)$.

For those operators a process of inversion is obtained by means of pointwise limits of polynomials in T . The formulae the author obtains, applied to achieve inversion formulae when T is the differential operator in the spaces C and L^p , lead to a general theorem which contains as particular cases a great deal of known inversion formulae. A. Alexiewicz.

Redheffer, R. M.: Operators and initial-value problems. Proc. Amer. math. Soc. 4, 617—629 (1953).

Durch Betrachtung klassischer Anfangswertprobleme der mathematischen Physik kommt der Verf. zur Aufstellung folgender Definitionen und Theoreme: Die linearen, zweiparametrischen Operatoren q_{ab} , deren Feld eine Teilmenge der komplexwertigen Funktionen $f(x)$ in $-\infty < x < \infty$ ist, heißen punktweise beschränkt durch M_{ab} , wenn $q_{ab}f$ für jedes $f \in L^2$ existiert

und der Bedingung $\|q_{ab}f\|_1 \leq M_{ab} \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx$ genügt; im Mittel beschränkt durch N_{ab} ,

wenn q_{ab} meßbar ist und $\int_{-\infty}^{\infty} |q_{ab}f|^2 dy \leq N_{ab} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^2$, sobald $f \in L$ und $f \in L^2$. Die

Klasse der q ist abgeschlossen, wenn $q_{ab}q_{bc}f = q_{ac}f$ für $a < b < c$, $f \in L$, $f \in L^2$. — Darstellungssatz: Wenn eine Klasse von Operatoren $\{q_{ab}\}$ gegeben ist, die linear, punktweise beschränkt durch M_{ab} , im Mittel beschränkt durch N_{ab} , und abgeschlossen sind, so gilt:

$q_{ab}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{ab}(x, y) f(x) dx$, wo $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{ab}(x, y)|^2 dx \leq M_{ab}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{ab}(x, y) \lambda_{ac}(x, y) dy = N_{ab}$ für fast

alle x , $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{ab}(x, y) \lambda_{bc}(y, z) dy = \lambda_{ac}(x, z)$ für fast alle x . — Durch Spezialisierung der Operatoren ergeben sich drei weitere Darstellungssätze. — Die Untersuchungen stehen in Zusammenhang mit dem „Huygensschen Prinzip“ bzw. mit einem allgemeineren Prinzip der Fortpflanzung von Störungen. G. Doetsch.

Hille, Einar: Sur le problème abstrait de Cauchy. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1466—1467 (1953).

Let X be a complex Banach space, U a distributive (in general unbounded) operator with the domain $D(U) \subset X$. The abstract problem of Cauchy (abbreviated PAC) is the investigation of the differential equation (i) $y^{(n)}(t) = U^n(y(t))$ ($t > 0$) with the initial conditions (ii) $y^{(i)}(t+0) = y_i$ for $i = 0, 1, \dots, n-1$, the y_i being prescribed and all limits involved by (i) and (ii) being strong. The solution $y(t)$ is called of normal type ω if $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|y^{(n-1)}(t)\| = \omega < \infty$. In two recent papers [the first Ann. Soc. Polon. Math. 25, 56—68 (1952), the second to appear in Ann. Inst. Fourier] the author has given conditions under which the PAC has an unique solution of normal type ω . In this note the problem is considered under which conditions there exists a non-0 solution of (i) with $y_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Such a solution of normal type ω exists if and only if the proper values of U^n are dense in the domain $\{\lambda | |\cos(1/n \arg \lambda)|^n > \omega\}$ and if the equation $U^n(x(\lambda)) = \lambda^n x(\lambda)$ has a holomorphic solution bounded in every halfplane $R(\lambda) \geq \omega + \epsilon$. Supposing the space provided with a structure of order the author examines also (in the case $n=1$) the influence of some properties of the solution of the equation $U(x(\lambda)) = \lambda x(\lambda)$ on the behaviour of the integrals of (i). A. Alexiewicz.

Schäffke, Friedrich Wilhelm: Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. Z. angew. Math. Mech. 33, 255—259 (1953).

In einem komplexen linearen Raum R mit einem Skalarprodukt (f, g) zweier Elemente f, g liege die Eigenwertaufgabe (1) $Fy + \lambda y + \mu Gy = 0$ vor. Dabei sei λ Eigenwert, μ Störparameter, y Eigenlösung, F und G lineare Operatoren, F^* zu F adjungiert, $\|Gu\| \leq \gamma(\|u\|)$, $\|Fu\|$ mit einer für $0 \leq \xi, \eta$ stetigen, für $0 < \xi, \eta$ positiven, doppelt monotonen, vom 1. Grade homogenen Funktionen $\gamma(\xi, \eta)$. Es wird eine Theorie entwickelt, die bezüglich kontinuierlicher Spektren nicht so allgemein wie die bereits vorliegende Theorie bei selbstadjungierten Operatoren des Hilbertschen Raumes ist, die aber bei wenigen, praktisch leicht nachprüfbaren Voraussetzungen (nicht einmal das ungestörte Problem braucht selbstadjungiert zu sein) mit geringem Aufwand vielfach schärfere Abschätzungen liefert. Bei (1) wird vorausgesetzt: Es gebe eine ganze Funktion $J(\lambda, \mu)$ derart, daß $J(\lambda, \mu) = 0$ für ein Eigenwertpaar λ, μ charakteristisch ist; für $\mu = 0$ gebe es höchstens abzählbare viele Eigenwerte λ_n mit zugehörigen y_n ; es sei dann $F^* y_n^* + \lambda_n y_n^*$ nichttrivial lösbar, y_n, y_n^* ein normiertes Biorthogonalsystem, und es gelte eine verallgemeinerte Vollständigkeitsrelation $\beta^2 \sum_n |(f, y_n^*)|^2 \leq (f, f) \leq \alpha^2 \sum_n |(f, y_n^*)|^2$ für jedes

$f \in R$, mit $0 < \beta \leq \alpha < \infty$; dann ist $J(\lambda, \mu) = 0$ um $\lambda = \lambda_m, \mu = 0$ durch eine Potenzreihe $\lambda_m(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{mk} \mu^k$ darstellbar, die mindestens für $|\mu| < \varrho_m$ konvergiert, und es ist dort $|\lambda_m(\mu) - \lambda_{m0}| < d_m/2$. Zu μ mit $|\mu| < \varrho_m$ gibt es außer $\lambda_m(\mu)$ keinen weiteren Eigenwert mit $|\lambda - \lambda_m| < \frac{d_m}{2}$. Für die Koeffizienten gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{mk}| \varrho_m^{2k} \leq \left(\frac{d_m}{2}\right)^2$; es wird eine Fehler-

abschätzung für $\left| \lambda_m(\mu) - \sum_{k=1}^p \lambda_{mk} \mu^k \right|$ aufgestellt und mit denen von Rellich, von Sz.-Nagy, J. Schröder am Beispiel der Mathieschen Differentialgleichung verglichen. L. Collatz.

Kato, Tosio: Perturbation theory of semi-bounded operators. Math. Ann. 125, 435—447 (1953).

In the perturbation theory of operators one has considered mostly (Rellich, Sz.-Nagy, Heinz, etc.) the so-called regular case, in which the eigenvalues and eigenvectors are, under some general conditions, proved to be regular functions of the perturbation parameter ε , thus being developable into a power series of ε with positive convergence radii of which at least a rough estimate can be given. In the non-regular case only asymptotic expansions may be given [see: T. Kato: Progress theor. Phys. 5, 95—101, 207—212 (1950) and this Zbl. 45, 216; E. C. Titchmarsh, this Zbl. 35, 180; 41, 221]. The present paper deals with the non-regular perturbation problem of a semi-bounded operator H , formally defined by $H + \varepsilon V$, no assumption being made as to the „smallness“ of the perturbing term V with respect to the unperturbed operator H , instead it is supposed that H and V are (not necessarily closed) symmetric operators with the common domain \mathfrak{D} dense in the (separable) Hilbert space \mathfrak{H} , and that $H \geq I$ and $V \geq O$ in \mathfrak{D} . H_ε (for $\varepsilon \geq 0$) and V_0 are then defined as the (uniquely determined) self-adjoint extensions in the sense of Friedrichs, of the semi-bounded operators $H + \varepsilon V$ and V , respectively (see K. Friedrichs, this Zbl. 8, 392). It is shown that the domain of the positive self-adjoint square-root of H_ε is, for $\varepsilon > 0$, independent of ε : $\mathfrak{D}(H_\varepsilon^{1/2}) = \mathfrak{D}^{1/2}(\varepsilon > 0)$. Denoting by $E_\varepsilon(\lambda)$ the resolution of the identity of H_ε , it is shown that $E_\varepsilon(\lambda) \rightarrow E_0(\lambda)$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) for all λ except at most the eigenvalues of H_0 . Suppose in the following, that at least the lower part of the spectrum of H_0 is a pure point spectrum consisting of isolated eigenvalues of finite multiplicity; let λ_0 be one of these eigenvalues, with multiplicity m . It is proved that in each neighborhood Δ of λ_0 , containing no other point of the spectrum of H_0 , the spectrum of H_ε consists of eigenvalues with total multiplicity m , provided ε is sufficiently small, and the corresponding spectral projector $E_\varepsilon(\Delta)$ converges uniformly to $E_0(\Delta)$ for $\varepsilon \rightarrow +0$. — In particular, if λ_0 is simple ($m = 1$), then there is a simple eigenvalue λ_ε of H_ε in Δ (and there are no other points of the spectrum of H_ε in Δ). Suppose that the eigenvector φ_0 , corresponding to the eigenvalue λ_0 of H_0 , is contained in $\mathfrak{D}^{1/2}$. Then φ_0 is contained also in the domain of $V_0^{1/2}$ and we have $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda' + o(\varepsilon)$ with $\lambda' = \|V_0^{1/2} \varphi_0\|^2$;

moreover, there is a corresponding normalized eigenvector $\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + o(\varepsilon^{1/2})$. — If, in addition, φ_0 is contained also in the domain of $C = (V_0^{1/2} H_0^{-1/2})^* V_0^{1/2}$, then $\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda' + \varepsilon^2 \lambda'' + o(\varepsilon^2)$ and $q_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon q' + o(\varepsilon)$ with $\lambda'' = -(H_0 S_0 C \varphi_0, C \varphi_0)$, $q' = -H_0^{1/2} S_0 C \varphi_0$, where

$$S_0 = \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0 - 0} + \int_{\lambda_0 + 0}^{\infty} \right) (\lambda - \lambda_0)^{-1} dE_0(\lambda).$$

Higher approximations could be treated in the same way. The study of multiple eigenvalues λ_0 is reserved to a subsequent paper. The case where $H \geq cI$, $V \geq -aI - bH$ on \mathfrak{D} ($a, b \geq 0$), can be reduced to the above by a change of the origin and unit on the λ -axis. — Several applications are given, one of them generalizing Titchmarsh's results (l. c.), and showing that the hypotheses of the above theorems are not superfluous and are almost necessary from the practical point of view.

B. Sz.-Nagy.

Praktische Analysis:

● Zurmühl, R.: **Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker**. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. XI, 481 S. mit 114 Abb. DM 28,50.

Wie der Verf. im Vorwort und in der Einführung erwähnt, hat er sich bei der Stoffauswahl in erster Linie beschränkt auf die Methoden der praktischen Analysis, des numerischen Rechnens, während die Behandlung der instrumentellen und der graphischen Methoden zurücktritt bzw. nur durch Literaturhinweise beachtet wird. Diese Einschränkung ist von solcher Bedeutung, daß sie zweckmäßig im Titel des Buches hätte angedeutet werden sollen. Die Aussage, daß für jeden Aufgabenkreis die wichtigsten und charakteristischen Methoden so ausführlich behandelt werden, daß der Leser unter mehreren Möglichkeiten die für den betreffenden Fall geeignetste auswählen kann, gilt daher nur mit ausdrücklichem Hinweis auf die genannte Begrenzung. Leser, die etwa vorwiegend mit graphisch gegebenen Funktionen zu operieren haben, werden wahrscheinlich enttäuscht sein. Die instrumentellen und graphischen Verfahren sind ja nicht bloß bei rohen ersten Approximationen verwendbar, sondern sie sind oft die allein in Frage kommenden. — Das Buch beginnt mit nützlichen Betrachtungen über das Rechnen, wobei auf die Anwendung des Rechenschiebers und der Rechenmaschine eingegangen wird. Dann kommen zwei bedeutend umfangreichere Abschnitte über Gleichungen und Matrizen. Den linearen Problemen ist hierbei gemäß ihrer Wichtigkeit und dem besonderen Interesse des Verf. ein ziemlich breiter Raum reserviert. Es werden die linearen Gleichungssysteme, die verschiedenen Eigenwertaufgaben der Matrizen sowie die linearen Rand- und Eigenwertaufgaben der Differentialgleichungen behandelt, alle eingehend und gut. Das vierte Kapitel „Interpolation und Integration“ hätte nach der Meinung des Ref. umfassender sein können, etwa auf Kosten der Gleichungslehre. Es folgen Ausgleichsrechnung, Darstellung willkürlicher Funktionen und in zwei Kapiteln Anfangswertaufgaben sowie Rand- und Eigenwertaufgaben für Differentialgleichungen. Beim Leser werden mathematische Kenntnisse etwa im Umfang der zweisemestrigen Grundvorlesung über Höhere Mathematik vorausgesetzt. Der Verf. hat sich in lobenswerter Weise bemüht, den behandelten Stoff ausführlich und auch für Nichtmathematiker lesbar darzustellen. Zu diesem Zweck sind einzelne Teile weitgehend für sich verständlich gestaltet. Behandelte Methoden und Formeln werden anschaulich begründet und gelegentlich von verschiedenen Seiten beleuchtet. Instruktive Beispiele werden gegeben, und zwar vielfach solche, in denen die Ausgangsdaten nicht allzu bequem gewählt sind, so daß sie der wirklichen Praxis entsprechen. Bei der graphischen Integration sind zwei gute Beispiele behandelt und Maßstabsfragen eingehend erörtert. Bei der numerischen Integration hätte man gern ein anderes Beispiel gesehen als die allbekannte Integration von $1/x$. — Der Verf. hat im allgemeinen die Bedürfnisse der Benutzer des Buches im Auge behalten und in viele Paragraphen praktische Winke für Anwendungen eingearbeitet. Die Beispiele sind meistens mit derjenigen Stellenzahl gerechnet, die dem normalen Bedarf der Ingenieure und Physiker entspricht. In einigen Beispielen scheint diese Genauigkeit überschritten zu sein.

E. J. Nyström.

Emersleben, O.: **Anwendungen zahlentheoretischer Abschätzungen bei numerischen Rechnungen**. Z. angew. Math. Mech. 33, 265–268 (1953).

Forsythe, George E.: **Solving linear algebraic equations can be interesting**. Bull. Amer. math. Soc. 59, 299–329 (1953).

Verf. gibt an Hand einer ziemlich umfangreichen Bibliographie (131 Nummern) einen kritischen Überblick über die Verfahren zur Lösung linearer Gleichungen einschließlich der Berechnung der Kehrmatrix. Neben den Eliminationsverfahren

wird auf die verschiedenen Iterationsverfahren mit den Methoden zur Konvergenzbeschleunigung, wie das Verfahren der konjugierten Gradienten, hingewiesen. Auch den Arbeiten über die Fehlereinflüsse und über die Besonderheiten der Methoden, die durch die verwendeten Rechenhilfsmittel entstehen, wird Beachtung geschenkt.

R. Ludwig.

Garza, A. de la: Error bounds on approximate solutions to systems of linear algebraic equations. *Math. Tables Aids Comput.* 7, 81—84 (1953).

A simple notion of the „abmatrix“ (in which each element is equal to the absolute value of the corresponding element of the system) is readily applicable to examining the convergence of a class of iterative methods for solving systems of linear algebraic equations and to determining error bounds for approximate solutions of these linear systems. In this note only the latter is examined. For application, the use of an approximate inverse is required.

J. Nyström.

Dwyer, Paul S. and Frederick V. Waugh: On errors in matrix inversion. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 289—319 (1953).

An der reellen nichtsingulären Matrix A mit bekannter Kehrmatrix $C = A^{-1}$ sei eine Fehlermatrix $E = (e_{ij})$ mit bekannten Schranken $\eta_{ij} \geq |e_{ij}|$ der Fehlerbeträge angebracht. Gesucht werden Aussagen über die Elemente d_{rs} der Abweichungsmatrix $D = T^{-1} - C$ mit $T = A + E$, und zwar insbesondere Schranken für diese Elemente. Außer Formeln 1. Ordnung (Berücksichtigung nur linearer Reihenglieder) werden solche allgemeiner Gültigkeit gegeben. Behandelt werden im wesentlichen folgende Einzelfälle: 1. Abweichungsschranken für den Fall $\eta_{ij} = \eta$; 2. erreichbare Abweichungsextrema für den Fall sog. Leontief-Matrizen A , deren Kehrmatrix C nur nichtnegative Elemente besitzt, und für $\eta_{ij} = \eta$; 3. erreichbare Abweichungsschranken für die allgemeine Matrix A , und zwar a) für $\eta_{ij} = \eta$ und b) für ungleiche Werte η_{ij} . — Zum Schluß wird kurz die Frage der durch Abrundungsfehler bei der Berechnung von C entstehenden Abweichungen vom wahren Wert C , ihrer Schranken und ihrer Behebung berührt.

R. Zurmühl.

Stone, W. M.: A form of Newton's method with cubic convergence. *Quart. appl. Math.* 11, 118—119 (1953).

Frame, J. S.: The solution of equations by continued fractions. *Amer. math. Monthly* 60, 293—305 (1953).

This is a study of a set of continued fraction approximants P_k/Q_k for the correction ε of a first estimate x to a required root ξ of any given equation $\Phi(x) = 0$, provided that $\Phi(x)$ has as many continuous derivatives as may be required in a neighborhood U of the root ξ . Let $y = \Phi(x)$, $y' = \Phi'(x)$, \dots , $\Phi(\xi) = 0$, $v = -y/y'$, $\beta = y''/2y'$, $\gamma = y'''/3y''$, $\delta = y^{(4)}/4y'''$, \dots , and

$$(A) \quad \varepsilon = \xi - x = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \dots + \frac{a_k}{1 + r_{k+1}} = \frac{P_k + r_{k+1}P_{k-1}}{Q_k + r_{k+1}Q_{k-1}}, \text{ where } r_k = \frac{a_k}{1 + r_{k+1}}.$$

The a_k are determined from the power series expansion in v of $\varepsilon = r_1 = \sum c_k v^k$ in which the c_k are certain rational functions of the first $k-1$ of the quantities $\beta, \gamma, \delta, \dots$ evaluated at x . Let $a_1 = v$. By division, power series are obtained for $r_2 = (a_1 - r_1)/r_1 = \beta v + \dots$, $r_{k+1} = (a_k/r_k) - 1, \dots$. Let a_k be the first term in the series expansion for r_k . If the first estimate x is not taken at a double root of any of the first k remainders, a_k/v will be a rational function of the first $k-1$ quantities $\beta, \gamma, \delta, \dots$, independent of v . Thus $a_1 = v$, $a_2 = v\beta$, $a_3 = v\beta - v\gamma$, $a_4 = v\beta - v\gamma(\gamma - \delta)/(\beta - \gamma)$. In general $(k+1)(a_{k+1}/v) = 2a_2/v + (k-2)a_{k-1}/v - a_k/v - d[\ln(a_k/v)]/dx$, $k \geq 2$. The a_k and r_k are also obtained as ratios of certain determinants. The k th approximant to the error $\varepsilon = \xi - x$ is defined as that rational function P_k/Q_k of a_1, \dots, a_k , obtained from (A) by the replacement of r_{k+1} by 0. A comparison of the approximants $P_1/Q_1, P_2/Q_2, \dots$ is discussed in numerical examples. A proof is given of the formula due to Tauber of the derivative of the k th iteration function $f_k(x) = x + P_k/Q_k$, $f'_k(x) = (x + P_k/Q_k)' = (k+1)(-1)^k a_2 a_3 \dots a_{k+1}/Q_k^2$. By this formula the error in the use of $f_k(x) = x + P_k/Q_k$ as an approximation to the root ξ of $\Phi(x) = 0$ can be estimated. It is shown that if the numerators a_2, \dots, a_{k+1} are positive, the function $f_k(x)$ gives a better approximation to ε than is obtained from the k th partial sum of the corresponding power series.

E. Frank.

Ceschno, F.: Sur la résolution des équations par la méthode de Lin. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér.* 67, 77—82 (1953).

Die Methode von Lin (dies. Zbl. 26. 235), eine reelle Wurzel eines Polynoms $P_n(x)$ mit reellen Koeffizienten zu finden, besteht in der Division des Polynoms durch einen Linearfaktor $(x - \beta_1)$ bis zu einem linearen Rest $(x - \beta_2)$. Erneute Division durch $(x - \beta_2)$ führt zum Rest $(x - \beta_3)$ usw. Die Folge der β_i konvergiert im allgemeinen, jedoch nicht immer gegen die reelle Wurzel von kleinstem Betrag. Verf. übersetzt das Verfahren ins Geometrische. Es bedeutet, daß man, ausgehend von einem Versuchswert β_1 , die Verbindungsgerade von $P_n(\beta_1)$ nach $P_n(0)$ zu ziehen hat; sie schneidet die x -Achse in β_2 usw. Die Konvergenz der β_i gegen die Wurzel braucht durchaus nicht monoton zu sein, wie ein Beispiel zeigt. Das Verfahren soll weiter auch zur Lösung transzendenter Gleichungen $f(x) = 0$ verwendet werden, indem einfach die Wurzeln der abgebrochenen Taylor-Entwicklung der als analytisch vorausgesetzten Funktion $f(x)$ gesucht werden. Dabei kümmert sich Verf. nicht um das Konvergenzverhalten der Reihendarstellung. Ref. möchte bemerken, daß das Linsche Verfahren, außer in ad hoc konstruierten Fällen, in bezug auf Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration nach Newton-Raphson unterlegen ist, wie die geometrische Interpretation unmittelbar zeigt.

H. Wundt.

Creely, Joseph W.: Some applications of finite differences. Math. Mag. 26, 189—197 (1953).

Mikeladze, Š. E.: Zur Theorie der Konstruktion von Interpolationsformeln. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 503—506 (1953) [Russisch].

Aus der Formel

$$y(a + ht_\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_\beta - t_a)^k \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(a + ht_a) + \frac{h^n}{(n-1)!} \int_{t_a}^{t_\beta} (t_\beta - t)^{n-1} y^{(n)}(a + ht) dt$$

werden Interpolationsformeln abgeleitet, in denen Differenzen verschiedener Art auftreten. Die Formeln können auch zur numerischen Differentiation benutzt werden. Unter anderem wird eine Formel aufgestellt, die als Spezialfall eine von A. A. Markoff in seiner Differenzenrechnung angegebene Formel der numerischen Differentiation enthält.

W. Schulz.

Amble, Ole: A set of formulas for numerical integration. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 38—41 (1953).

Um bestimmte Integrale auszuwerten, kann man die einfache Trapezregel mit einem Ausdruck kombinieren, den man durch Integration über das mittlere Intervall erhält, wenn man durch je vier aufeinanderfolgende Punkte eine Parabel 3. Ordnung legt. Man hat dann bequeme Koeffizienten und Vorteile bei eventueller Integration über Teilintervalle. Ein Beispiel wird gegeben. Für diese Methode und entsprechende höherer Ordnung werden Restglieder aufgestellt.

J. Nyström.

Tordion, Georges: Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration. Elemente Math. 8, 86—88 (1953).

Ein allgemeines Verfahren zur Gewinnung von Formeln für die numerische λ -fache Integration unter Anwendung der Laplace-Transformation wird angegeben und im Fall $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ gezeigt, wie man daraus die Simpsonischen Formeln herleiten kann.

G. Koehler.

Smith, R. C. T.: Conduction of heat on the semi-infinite solid, with a short table of an important integral. Austral. J. Phys. 6, 127—130 (1953).

● Shaw, F. S.: An introduction to relaxation methods. New York: Dover Publications, Inc. 1953. 396 p. \$ 5,50.

Das Buch gibt eine mit zahlreichen, durchgerechneten Zahlenbeispielen versehene ausführliche Beschreibung der gebräuchlichsten Relaxationsmethoden, aus der man die Handhabung der Methoden gut lernen kann und bei der auf Besonderheiten und auf verschiedene Schwierigkeiten beim praktischen Rechnen sorgfältig eingegangen wird. — Die Methoden werden zunächst an beliebigen linearen Gleichungssystemen, dann an linearen Randwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung erläutert, wobei durchweg das Differenzenverfahren verwendet wird. Hier werden Blockrelaxation, krummlinige Ränder, 2. und 3. Randwertaufgaben, mehrfach zusammenhängende Bereiche, rotationsymmetrische Aufgaben,

Systeme von 2 Gleichungen 2. Ordnung und Netzverfeinerung ausführlich besprochen. Auch bei der Plattengleichung werden „Residual-Operatoren“ und „Relaxations-Operatoren“ eingeführt und krummlinige Ränder berücksichtigt. Es folgen Eigenwertaufgaben bei Matrizen und bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, bei denen wieder mit dem Differenzenverfahren gearbeitet wird. Das letzte Kapitel bringt ein Beispiel aus der Klasse der „Freien Oberfläche-Probleme“, lineare Integralgleichungen (Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme) und eine bei finiten Gleichungen anbringbare Korrektur (nach Fox, dies. Zbl. 34, 221). 43 Seiten Zahlentafeln geben Koeffizienten bei unregelmäßigen Differenzensternen an.

L. Collatz.

Woods, L. C.: The relaxation treatment of singular points in Poisson's equation. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 163—185 (1953).

Bei näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben der Laplaceschen oder Poissonschen Gleichung mit dem Differenzenverfahren untersucht Verf. drei Arten von Singularitäten S im Felde oder auf dem Rande: I. die Lösung Φ hat in S einen endlichen Wert, aber die Ableitungen bleiben nicht endlich. II. Φ hat in S eine logarithmische Singularität oder III. eine einfache Unstetigkeit. Im Falle I. zieht er von Φ eine Funktion $\psi = (r e^{i\vartheta})^m$ oder $\psi = (\alpha \sin m \vartheta + \beta \cos m \vartheta) (r/a)^m$ ab (r, ϑ Polarkoordinaten um den Punkt S , a Maschenweite des Gitters, π/m Winkel in der Randkontur, α und β Konstanten, für die Verfasser einfache Bestimmungsgleichungen aufstellt), im Falle II. wird $m \log(r/a)$ von Φ abgezogen, in II. und III. wird mit fiktiven Werten von Φ im Punkte S gerechnet. Verf. stellt Formeln auf, die eine Anwendung der gewöhnlichen Relaxationstechnik gestatten, und gibt auch Formeln für die Berechnung von Integralen und Ableitungen von Φ . Vier ausführliche Zahlenbeispiele.

L. Collatz.

Rjaben'kij, V. S.: Algebraische Kriterien für die gleichmäßige C-Stabilität von Differenzenschemata. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 164—165 (1953) [Russisch].

Mitchell, A. R. and J. W. Craggs: Stability of difference relations in the solution of ordinary differential equations. Math. Tables Aids Comput. 7, 127—129 (1953).

Nach der Methode von Rutishauser (dies. Zbl. 46, 133) wird die Stabilität mehrerer gebräuchlicher numerischer Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen untersucht. Bei der Gleichung $y' = -y$ ist die Formel $h y'_0 = \nabla y_0 + \nabla^2 y_0/2 + \dots + \nabla^n y_0/n$ für $n \leq 7$ stabil. Die Adamsche Extrapolationsformel ist bei genügend kleinem h stabil, wird aber bei wachsendem h viel eher instabil als die Adamsche Interpolationsformel.

L. Collatz.

Collatz, Lothar: Über die Instabilität beim Verfahren der zentralen Differenzen für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Z. angew. Math. Phys. 4, 153—154 (1953).

Bei der numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen kann es eintreten, daß ein an sich gutes Verfahren in seiner Brauchbarkeit durch ein instabiles Verhalten beeinträchtigt wird. In Ergänzung der von Rutishauser (dies. Zbl. 46, 133) gegebenen Erklärung werden die Verhältnisse am Beispiel des Verfahrens der zentralen Differenzen für Differentialgleichungen 2. Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ näher beleuchtet unter Verwendung einer (A, B) -Ebene mit $A = h^2 f_y$, $B = h f_{y'}$, Schrittweite h . Diese Ebene zerfällt dabei in einen stabilen und einen instabilen Bereich.

R. Zurmühl.

Görtler, Henry: Über nichtlineare partielle Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 116—120 (1953).

Die Theorie der laminaren inkompressiblen Grenzschichten hat in der praktischen Rechendurchführung einen gewissen Abschluß erreicht, aber in ihrer mathematischen Fundierung noch manche Fragen offen gelassen. Während die in der Praxis benutzten Näherungsverfahren keine genaue Fehlerabschätzung zulassen, ist diese bei den von K. Schröder und dem Verf. schon früher angegebenen numerischen Verfahren grundsätzlich möglich, wenn auch mit erheblichem numerischen

Aufwand. Schließlich weist der Verf. noch auf ein neues von ihm angegebenes Verfahren zur Abschätzung von Näherungslösungen hin. *H. Schlichting.*

Huber, A.: Zur graphischen Berechnung von Polynomen. Z. angew. Math. Mech. 33, 248—249 (1953).

Belgrano Brémar, J. C.: Sur un problème de calcul fonctionnel posé par la nomographie. Revista mat. Hisp.-Amer. 13, 81—86 [Französisch], 87—91 [Spanisch] (1953).

Für die Schlüsselgleichung $z = H[f_{12}(z_1, z_2) : \lambda(u), g_{12}(z_1, z_2)]$ läßt sich ein Nomogramm aufstellen, bestehend aus einer nach u bezifferten Leiter, einem nach z_1 und z_2 bezifferten Netz und einer nach z bezifferten Kurvenschar. Die Ablesevorschrift besteht darin, daß man die dem Funktionswert $\lambda(u)$ entsprechende Strecke der Leiter parallel von dem (z_1, z_2) -Punkt des Netzes abträgt und am anderen Endpunkt der Strecke auf der Kurvenschar z abliest. — Verf. löst für diesen Nomogrammtyp das Problem der sog. „analytischen Identifikation“ (wie sie Verf. nennt) durch Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen in Form von Differentialgleichungen dafür, daß eine vorliegende Funktion auf die Form der Schlüsselgleichung gebracht werden kann. Das entsprechende Problem der „Identifikation von Tafeln“ (wie sie Verf. nennt) für tabellarische gegebene Funktionen soll in einem vom Verf. noch zu veröffentlichenden „Traité de Nomographie“ behandelt werden.

R. Ludwig.

Milatz, J. M. W., A. H. Wapstra and J. S. van Wieringen: A simple method for a Fourier analysis. Physica 19, 175—180 (1953).

Uhler, Horace S.: A mathematical copying camera. Scripta math. 19, 40—44 (1953).

Lehmer, D. H.: The sieve problem for all-purpose computers. Math. Tables Aids Comput. 7, 6—14 (1953).

Es gibt eine Reihe von Problemen, für die sich die sog. Allzweckmaschinen, d. h. Rechenmaschinen, welche die rationalen Grundrechenoperationen ausführen können, nicht besonders gut eignen. Hierzu gehören Siebprobleme wie das folgende: Es sind von den ganzen Zahlen eines Intervalles $A \leq N \leq B$ diejenigen zu ermitteln, die zu k der arithmetischen Progressionen $P_i: m_i x + a_i$, mit $i = 1, 2, \dots, k$ gehören. Dabei sind die Moduln m_i paarweise relativ prime positive ganze Zahlen, und zu jedem Modul m_i gehören die n_i arithmetischen Progressionen P_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n_i$, deren Reste a_{ij} für festes i verschiedene nichtnegative ganze Zahlen $< m_i$ sind. Dieses Problem enthält als Spezialfälle z. B. das bekannte Siebproblem des Eratosthenes, das chinesische Siebproblem und ein bei quadratischen Resten und Kongruenzen, binären quadratischen Formen und diophantischen Gleichungen zweiten Grades häufig auftretendes Siebproblem. Die theoretische Möglichkeit, von k arithmetischen Progressionen nach den Moduln m_i , $i = 1, 2, \dots, k$ zu einer Progression nach dem Modul $m_1 m_2 \dots m_k$ überzugehen, scheidet für die Praxis wegen der großen Anzahl von zulässigen Resten aus. Es empfiehlt sich vielmehr, alle ganzen Zahlen zwischen A und B zu durchmustern und die auszuscheiden, die nicht zu k Progressionen P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) gehören. Dieses Vorgehen bezeichnet Verf. als Siebprozeß. Die Brauchbarkeit eines Siebprozesses hängt von der Geschwindigkeit ab, mit der bei der Musterung von einer Zahl N zur nächsten Zahl $N + 1$ übergegangen werden kann. Bei den üblichen Siebverfahren für den Handrechner ist es bei einer längeren Rechnung schon schwer, etwa 3 Prüfungen pro Sekunde durchzuhalten. Es gibt elektromechanische Siebe, die 50 Prüfungen pro Sekunde leisten, und elektronische Siebe, die 300 000 Zahlen pro Sekunde prüfen. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, darzulegen, wie mit einer Allzweckmaschine solche Siebprozesse durchgeführt werden können. Verf. gibt hierfür unter Zugrundelegung einer im Binärsystem arbeitenden Maschine drei verschiedene Methoden an und vergleicht diese hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit. Man erreicht damit zwar nicht die Schnelligkeit der speziellen elektronischen Siebe, doch kommt man mit einer Allzweckmaschine wie dem SWAC jedenfalls an die Schnelligkeit der elektromechanischen Siebe heran.

J. Heinhold.

Samelson, Klaus und Friedrich L. Bauer: Optimale Rechengenauigkeit bei Rechenanlagen mit gleitendem Komma. Z. angew. Math. Phys. 4, 312—316 (1953).

Es ist eine Eigenart der programmgesteuerten Rechenmaschinen, die mit „beweglichem Komma“ arbeiten, daß die Fortpflanzung der Rundungsfehler komplizierter ist als bei einer Maschine mit „festem Komma“ und überdies wegen der in der Maschine automatisch erfolgenden Kommaverschiebungen von außen her gar

nicht kontrolliert werden kann. — Die Verff. führen eine Untersuchung über Rundungsfehler beim Rechnen mit beweglichem Komma durch und stellen eine Rechenvorschrift auf, welche ungefähr die folgenden Eigenschaften hat: Nach jeder Rechenoperation (einschließlich der Dual-Dezimal-Übersetzung) wird der Exponent des Resultats so gewählt (und die Mantisse dementsprechend verschoben), daß alle unsicheren Mantissenstellen wegfallen. Insbesondere soll auf diese Weise verhindert werden, daß eine als Differenz fast gleicher Größen entstandene kleine Zahl in einer Form erscheint, die eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuscht.

H. Rutishauser.

Estrin, Gerald: The electronic computer at the institute for advanced study. Math. Tables Aids Comput. 7, 108—114 (1953).

Die Daten einer nach den Richtlinien von Burks, Goldstine und von Neumann unter der Leitung von Bigelow gebauten digitalen Rechenmaschine werden in Stichworten angegeben. Abweichend von dem ursprünglichen Entwurf sind jedoch elektrostatische Speicher des Williams-Typs verwendet worden. Nach einer kurzen Beschreibung des Aufbaues und der Arbeitsweise der Maschine werden die 20 Grundbefehle erörtert und die genauen Zeiten für ihre Ausführung angegeben. Mit der seit Juni 1952 in Princeton in Betrieb befindlichen Maschine wurden nach Beseitigung einiger schwacher Punkte Systeme partieller Differentialgleichungen, zahlentheoretische Probleme und Integralgleichungen gelöst. Hierfür waren etwa 3×10^8 Multiplikationen erforderlich.

W. Breitling.

Brown, J. A. C., H. S. Houthakker and S. J. Prais: Electronic computation in economic statistics. J. Amer. statist. Assoc. 48, 414—428 (1952).

Cherry, T. M.: Tables and approximate formulae for hypergeometric functions, of high order, occurring in gas-flow theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 217, 222—234 (1953).

Bei der Hodographen-Methode zur Berechnung einer stetigen isentropischen zweidimensionalen Gasbewegung mit dem adiabatischen Exponenten $\gamma = 1,4$ und der Druck-Dichte Beziehung $p \varrho^{-\gamma} = \text{const.}$ treten die hypergeometrischen Funktionen $F(\nu - a_\nu, \nu - b_\nu, \nu + 1, \tau) = \tau^{-\nu/2} \chi_\nu(\tau)$ und $F(a_\nu, b_\nu, \nu + 1, \tau) = \tau^{-\nu/2} \psi_\nu(\tau)$ mit $a_\nu + b_\nu = \nu - 1/(\gamma - 1)$, $a_\nu, b_\nu = -\nu(\nu + 1)/2(\gamma - 1)$ auf. Mit diesen können die Ortskoordinaten x, y und die Stromfunktion ψ in Abhängigkeit von τ und θ wie folgt bestimmt werden.

$$x = \sum_{\nu} \nu \frac{A_\nu}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{2\tau}{\nu} \chi'_\nu(\tau) \cos \theta \mp i \chi_\nu(\tau) \sin \theta \right) e^{\pm i\nu\theta}$$

$$y = \sum_{\nu} \nu \frac{A_\nu}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{2\tau}{\nu} \chi'_\nu(\tau) \sin \theta \pm i \chi_\nu(\tau) \cos \theta \right) e^{\pm i\nu\theta} \quad \psi = \sum_{\nu} \pm i(\nu - 1) A_\nu \psi_\nu(\tau) e^{\pm i\nu\theta}.$$

Zur praktischen Auswertung standen bisher χ_ν und ψ_ν nur für ganzzahlige und halbzahlige Werte von ν für $|\nu| \leq 15$ zur Verfügung. Vorliegende Arbeit erweitert den Anwendungsbereich, indem mit den χ_ν und ψ_ν eng zusammenhängende Funktionen für $\tau = 0,08, 0,02, 0,30$ und $\pm \nu = 10,5, 1,0, 30,5$ mit 6 bzw. 4 gültigen Dezimalen mittels asymptotischer Reihen tabelliert worden sind. Darüber hinaus sind Näherungsformeln angegeben, die eine Berechnung für $|\nu| > 30$ ermöglichen.

H. Unger.

Iverson, K. E.: The zeros of the partial sums of e^z . Math. Tables Aids Comput. 7, 165—168 (1953).

Chandrasekhar, S. and Donna Elbert: The roots of $J_{-(l+1/2)}(\lambda\eta) J_{l+1/2}(\lambda) - J_{l+1/2}(\lambda\eta) J_{-(l+1/2)}(\lambda) = 0$. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 446—448 (1953).

Tabellarische Darstellung der ersten Nullstelle λ_1 der im Titel genannten Gleichung für $l = 1, 2, 3, \dots, \eta = 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,8$ mit den entsprechenden Werten der Besselfunktionen und des Normierungsfaktors

$$N_{1,l+1/2} = 2 \lambda_1^2 \tau^{-2} (J_{l+1/2}^2(\lambda_1 \eta) J_{l+1/2}^2(\lambda_1) - 1).$$

O. Volk.

Corrington, M. S.: Two non-elementary definite integrals. Math. Tables Aids Comput. 7, 129—130 (1953).

Die Werte der bestimmten Integrale

$$F(x) = \int_0^x t^t dt \quad \text{und} \quad G(x) = \int_0^x t^{-t} dt$$

werden für $x = 0(0.1)1$ mit 8 Dezimalen angegeben. Die Berechnung erfolgte durch Auswerten leicht herleitbarer und gut konvergierender Doppelreihen. *H. Unger.*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Eyraud, Henri: Une définition purement analytique de la probabilité. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 597—598 (1953).

Cantelli, Francesco Paolo: Calcolo delle probabilità e analisi matematica. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 17—26 (1952).

In dieser Rede bei der Eröffnungssitzung des UMI-Kongresses hat Verf. an viele moderne Ergebnisse und Forschungsgebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung erinnert, hauptsächlich mit der Absicht, die Deutung zu erklären, die die wahrscheinlichkeitstheoretischen Sätze im Gebiet der Analysis haben, und die Fortschritte hervorzuheben, die die Analysis der Wahrscheinlichkeitsrechnung verdankt. Als Leitfaden der meisten Betrachtungen gilt die Tatsache, daß eine zufällige Größe als Funktion denkbar ist, deren Definitionsbereich eine abstrakte meßbare Menge, oder — nach der mehr elementaren Cantellischen Auffassung — das Intervall $(0, 1)$ ist.

B. de Finetti.

Wasaw, Wolfgang: Metodi probabilistici per la risoluzione numerica di alcuni problemi di analisi. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 248—250 (1953).

Prochorov, Ju. V.: Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Funktionalräumen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 165—167 (1953) [Russisch].

● Romig, Harry G.: 50—100 binomial tables. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd., 1953. XXVII, 172 p. \$ 4, -.

Die vorliegenden Tabellen geben mit 6 Dezimalstellen die Binomialwahrscheinlichkeiten $b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ und deren Partialsummen $B(x, n, p) =$

$\sum_{m=0}^x b(m, n, p)$ für $n = 50, 55, \dots, 100$; $p = 0, 01; 0, 02; \dots; 0, 99$; $x = 0, 1, \dots, n$.

Die b -Werte sind jeweils aus $b(0, n, p)$ durch sukzessive Anwendung der Rekursionsformel $b(x+1, n, p) = b(x, n, p) (n-x) p / (x+1) q$ berechnet und bis zur 5-ten Dezimalstelle genau. In der Einleitung legt Verf. (ohne Beweis) den durch die Formel von Castelnovo (1919) gegebenen Zusammenhang der binomischen mit der durch die unvollständige Betafunktion erzeugten Beta-Verteilung und mit der hypergeometrischen Verteilung dar. Ferner werden genaue Formeln für die Interpolation bez. n bzw. p allein sowie Hinweise auf approximative Formeln für die gleichzeitige Interpolation bez. n und p gegeben und Ratschläge für inverse Interpolation bei unbekanntem x, n oder p .

M. P. Geppert.

Finetti, Bruno de: Sulla nozione di „dispersione“ per distribuzioni a più dimensioni. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 587—596 (1953).

Verf. zeigt, daß die Ausdehnung des Streuungsbegriffs auf mehrdimensionale Verteilungen zwar keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitet, aber ein hohes Maß Willkür in sich birgt. Insbesondere untersucht er die auf konvexen Mengen fußende Streuungsdefinition und die Eigenschaften der hierbei beteiligten wahrscheinlichkeitsmaximalisierenden Punktmengen im Falle kontinuierlicher Verteilungen sowie diskreter Verteilungen von einfachem Typ.

M. P. Geppert.

Combes, Bernard: Le problème de la généralisation de l'inégalité de Bienaymé. Bull. trimest. Inst. Actuaire Français. 64 (52), 61—69 (1953).

x sei eine stochastische Variable $a \leq x \leq b$ mit der Verteilungsfunktion $F(x)$. Der Verf. will die Bienaymésche Ungleichung in der folgenden Richtung verallgemeinern: Man bestimme obere und untere Grenze des Erwartungswertes einer Funktion $\varphi_n(x)$, wenn die Erwartungswerte von $n-1$ Funktionen $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ gegeben sind. Er macht einige Bemerkungen zur Behandlung dieser Frage und bespricht elementare Fälle.

W. Saxer.

Moriguti, Sigeiti: A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions. Ann. math. Statistics 24, 107—113 (1953).

Die abgeänderte Schwarzsche Ungleichung lautet $\int x \varphi dt \leq \left\{ \int x^2 dt \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int \bar{\varphi}^2 dt \right\}^{1/2}$, wo $\varphi dt = d\Phi$, $\bar{\varphi} dt = d\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}(t)$ = der größte konvexe Minorant von $\Phi(t)$; die Ungleichung gilt für x nichtabnehmend, der Grenzfall (=) entsteht, wenn fast überall $x = A \bar{\varphi}$, A eine nichtnegative Konstante (alle Funktionen sind quadratisch summierbar). — Die Anwendung auf Verteilungen gibt z. B. Ungleichungen für $[x(\alpha) - m]/\sigma$, $[x_i - m]/\sigma$, $[x(1 - \beta) - x(\alpha)]/\sigma$, und $[x_i - x_j]/\sigma$, wo m = Mittelwert, σ^2 = Streuung, $x(\alpha)$ = α -Quantile, x_j = Mittelwert des j -ten Wertes (nach Größenordnung) in n (n gegeben) Versuchen.

B. de Finetti.

Girault, Maurice: Application du produit de composition aux fonctions caractéristiques. Démonstration d'un théorème de M. Khintchine. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 20—22 (1953).

Il prodotto di composizione di due funzioni caratteristiche (f. c.) $\varphi_1(t) \varphi_2(t)$ è una funzione $\varphi_3(t)$ che l'A. denomina pseudo-funzione caratteristica, la quale corrisponde alla distribuzione $f_3(x)$ prodotto delle $f_1(x)$, $f_2(x)$ corrispondenti a quelle. Quando si tratta di legge assolutamente continue, questa proprietà si ottiene subito dalla conosciuta formula che esprime $f_3(x)$ mediante la $\varphi_3(t)$ e dalla propria definizione di questa. La proprietà in questione — valida anche per le legge assolutamente discontinue, come fa vedere l'A. — conduce come conseguenza alla formulazione della condizione necessaria e sufficiente perché una data funzione $\varphi(t)$ sia f. c. di una legge assolutamente continua — o discontinua — e permette ritrovare il teorema di Khintchine che afferma che tutta f. c. è limite uniforme, in qualunque intervallo

finito, di una successione di funzioni del tipo: $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t + \theta) \bar{g}(\theta) d\theta$.

J. M^a. Orts.

Irwin, J. O.: On the „transition probabilities“ corresponding to any accident distribution. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 87—89 (1953).

Ist $p_r(T)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Person im Zeitintervall T r Unfälle erlebe ($r = 0, 1, \dots$), so ist der Erwartungswert der Anzahl weiterer Unfälle im Zeitraum T einer Person mit mindestens x Unfällen in T $P(T, x) = \mu'_{[x+1]}/\mu'_{[x]}$, wo $\mu'_{[x]}$ das x -te faktorielle Moment der Verteilung $p_r(T)$ bedeute. Dieses Resultat wendet Verf. an auf Spezialfälle p_r = Poisson-, Binomial-, hypergeometrische Verteilung und die von M. Greenwood und G. U. Yule [J. Roy. statist. Soc. 83, 255—279 (1920)] betrachtete „verbrannte-Finger“-Verteilung, die der unmittelbar nach jedem Unfall einsetzenden Vorsichtsphase Rechnung trägt. Aus $P(T, x)$ folgt jeweils die Übergangswahrscheinlichkeit $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{P(T, x)}{T}$.

M. P. Geppert.

Chung, K. L. and M. Kac: Corrections to the paper „Remarks on fluctuations of sums of independent random variables“. Proc. Amer. math. Soc. 4, 560—563 (1953).

The correction to the paper cited above (see this Zbl. 42, 375) concerns the formula for $N_n/\log n$ when $\alpha < 1$, and that for $N_n/(\log n)^2$ when $\alpha = 1$.

S. Vajda.

Dantzig, D. van: Another form of the weak law of large numbers. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. 1, 129—145 (1953).

Verf. beschäftigt sich mit der von Freudenthal, dies. Zbl. 48, 111, angegebenen limes-

freien Formulierung des schwachen Gesetzes der großen Zahlen, die er verallgemeinert und beweistechnisch vereinfacht durch Einführung der Funktionen

$$(*) \quad \gamma(a, b) = \int \min(1, y^2) dF(a + by), \quad \gamma(b) = \inf \gamma(a, b).$$

Sind stochastische Variablen x_{vk} gegeben, $s_v = \sum_k x_{vk}$ und γ_{vk} bzw. Γ_v die zugehörigen Funktionen (*), so gilt: I. Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (Wahrscheinlichkeitskonvergenz der S_v/b_v) ist $\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_k \gamma_{vk}(b_v) = 0$. Oder in limesfreier Formulierung: II. $(16\pi)^{-1} \sum_k \gamma_{vk}(b_v) \leq \Gamma_v(b_v) \leq \sum_k \gamma_{vk}(b_v) (1 - \log \sum_k \gamma_{vk}(b_v))$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $6\pi \Gamma_v(b_v) \leq 1$ für die linke und $\sum_k \gamma_{vk}(b_v)$ für die rechte Hälfte.

$\gamma(a, b)$ ist, wie Verf. bemerkt, nichts anderes als ein „Abstand“ zwischen der stochastischen Variablen x und der Konstanten a , der definiert wird mittels der „verstümmelten“ Norm $\|x\|_2^2 = E(|x|^2)$. Analog kann man $\gamma(b)$ metrisch interpretieren und so I von neuem formulieren. H. Freudenthal.

Gasapina, Umberto: Un teorema limite del calcolo delle probabilità. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 599—609 (1953).

Asymptotisches Verhalten ($n \rightarrow \infty$) von $Z_n = n^{-(1-\rho)}(S_1^{2\rho} + S_2^{2\rho} + \dots + S_n^{2\rho})$, wo $S_h = X_1 + X_2 + \dots + X_h$ [X_h unabhängige Zufallsgrößen, $E(X_h) = 0$, $\sigma(X_h) = 1$] und ρ eine positive Konstante ist. Unter gewissen Hypothesen [hauptsächlich: Momente $|m_h^{(i)}|$ uniform beschränkt, für $i \leq 2(2\rho - 1)$] wird das Theorem von Erdős und Kac [Bull. Amer. math. Soc. 52, 292—302 (1946)], betreffend $\rho = 1$, für beliebiges ρ verallgemeinert: es gibt eine bestimmte Grenzverteilung für Z_n ($n \rightarrow \infty$), unabhängig von den Verteilungen der X_h . B. de Finetti.

Hodges jr., J. L. and M. Rosenblatt: Recurrence-time moments in random walks. Pacific J. Math. 3, 127—136 (1953).

Verf. untersucht für irreduzible, zeitlich homogene Markoffsche Ketten mit abzählbar unendlich vielen Zuständen und mit diskreter Zeit die Momente der Wiederkehrzeiten der einzelnen Zustände. Dazu wird der Begriff des Index $I(X)$ einer Zufallsvariablen X eingeführt. Es ist die größte ganze Zahl k derart, daß $E(X^k) < \infty$ ist. Die Ergebnisse werden auf Irrfahrten spezialisiert. Weiter werden Irrfahrtprobleme angegeben, für die die ersten $k-1$ Momente der Wiederkehrzeiten endlich und deren höhere Momente unendlich sind. Es folgen ein nützlicher Vergleichssatz und Beispiele. G. Schulz.

Schmetterer, L.: Bemerkungen zum Verfahren der stochastischen Iterationen. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 111—117 (1953).

The author points out that a certain stochastic approximation method of H. Robbins and S. Munro [Ann. math. Statistics 22, 400—407 (1951)] can be considered as an adaptation of an iteration procedure proposed by v. Mises and H. Pollaczek-Geiringer [Z. angew. Math. Mech. 9, 58—77 (1929)]: Starting with an arbitrary real number, x_1 , the nearest real root (to the right) of the equation $M(x) = \lambda$ is found as $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, where $x_{n+1} = x_n + c_n [M(x_n) - \lambda]$, with appropriately chosen c_n to assure convergence in very general cases. The statistical problem is as follows: Let y be a random variable (r. v.), with unknown distribution $F(y; x)$ dependent on a parameter x . The expected value $M(x)$ of y is likewise unknown, except that one knows that the eq. $M(x) = \lambda$, for a given λ , has just one root θ , which one is interested in. A sequence of r. v. x_n is defined, starting from arbitrary x_1 by the Markoff chain, $x_{n+1} = x_n + c_n (\lambda - y_n)$ where y_n is a r. v. with distribution $F(y; x_n)$. For appropriate assumptions it is shown that x_n converges „in probability“ towards θ , i. e. for given δ and ϵ , the Prob $\{x_n - \theta \geq \delta\} < \epsilon$ if $n > N(\epsilon, \delta)$. The present author is interested in the „error estimate“, i. e. in an actual estimate of the order of magnitude of N . The approximation is measured by the asymptotic behaviour of $b_n = E[(x_n - \theta)^2]$ where $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. He also studies how by the choice of the c_n the convergence may be accelerated. H. Geiringer.

Chinčín, A. Ja.: Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 3—20 (1953) [Russisch].

Verf. studiert in dieser Arbeit, die zum Teil referierenden Charakter trägt, den Entropiebegriff für diskrete (geräuschfreie) Kommunikationssysteme. Das Schwergewicht liegt hierbei auf den (hier wohl erstmalig streng durchgeführten) mathematischen Beweisen einiger fundamen-

taler Eigenschaften der Entropie (E.). Sei (1) $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Als E. der dadurch definierten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung A bezeichnet man (2) $H(p_1, \dots, p_n) = H(A) = - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k$. [Für eine (allerdings nicht allen Anforderungen des Mathematikers genügende)

zusammenfassende Theorie der Kommunikation — auch in allgemeineren Fällen — und die Bedeutung der E. vgl. man etwa Shannon, The Bell System Technical J. 27, 379—423 und 623—656 (1948). Dort sind auch alle Sätze der hier referierten Arbeit zu finden.] Durch A, B seien zwei zunächst voneinander unabhängige (diskrete) Wahrscheinlichkeitsverteilungen symbolisiert. AB ist Symbol für die verbundene Verteilung. Man zeigt leicht $H(AB) = H(A) + H(B)$. Sind A, B nicht voneinander unabhängig, dann definiert man in naheliegender Weise die bedingte E. $H_A(B)$ bzw. $H_B(A)$. Falls A, B unabhängig sind, gilt $H_B(A) = H(A)$, $H_A(B) = H(B)$. Die E. erfüllt folgende Eigenschaften: 1. $H(p_1, \dots, p_n) \leq H(1/n, \dots, 1/n)$, wobei die p_i (1) erfüllen. 2. $H(AB) = H(A) + H_A(B)$. 3. $H(p_1, \dots, p_n, 0) = H(p_1, \dots, p_n)$. Es wird bewiesen, daß jede stetige Funktion, welche 1., 2., 3. erfüllt, bis auf eine Konstante die Form (2) hat. (Eindeutigkeitssatz für die E.) — Für (diskrete) Markoffsche Ketten mit Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) und Anfangswahrscheinlichkeiten P_i

($i = 1, \dots, n$) wird die E. durch $H = - \sum_{i,k=1}^n P_i p_{ik} \log p_{ik}$ definiert. Man betrachte eine Ereigniskette C der Länge s mit der Wahrscheinlichkeit $p(C) = P_{k_1} p_{k_1 k_2} \dots p_{k_{s-1} k_s}$, $1 \leq k_i \leq n$. Für die E. eines ergodischen diskreten Prozesses gilt: Zu jedem ϵ und $\eta > 0$ kann man durch Wahl von s erreichen $|\frac{1}{s} \log \frac{1}{p(C)} - H| < \eta$ für jede Kette C der Länge s , abgesehen von einer Menge von Ketten C , für welche $\sum p(C) < \epsilon$ gilt. — Sei $0 < \lambda < 1$ und $N_s(\lambda)$ die größte Anzahl von Ketten der Länge s nach nicht wachsenden Wahrscheinlichkeiten geordnet, so daß $\sum p(C) \leq \lambda$. Dann gilt $s^{-1} \log N_s(\lambda) \rightarrow H$ für $s \rightarrow \infty$. — Der letzte Satz der Arbeit gibt eine strenge Begründung der Rolle, welche die E. in der Theorie der Verschlüsselung von Nachrichten spielt. S. 13, 16. Z. v. o. Druckfehler.

L. Schmetterer.

McMillan, Brockway: The basic theorems of information theory. Ann. math. Statistics 24, 196—219 (1953).

A neat presentation, in terms of stationary time series, of the main concepts and results of Shannon's communication theory in the time-discrete case. As examples we shall give the definition of the entropy rate, and the formulation — in a somewhat stronger version, due to the present author — of the equipartition property for long sequences of letters. Let $x = \{x_t\}$, where the x_t take only a finite number of values, be a stationary time series with probability measure μ , and consider the stochastic variables $f_n(x) = -n^{-1} \log \mu(\{x_0, \dots, x_{n-1}\})$ where $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ is the cylindric set of all realisations taking for $t = 0, \dots, n-1$ the values indicated, these latter being the corresponding components of the realisation x on the left hand side. Then the entropy rate is $H = \lim E \{f_n(x)\}$, and we have, provided that the time series is ergodic, $E \{f_n(x) - H\} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. G. Elfving.

Ottaviani, Giuseppe: Sull'integrale stocastico. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 610—616 (1953).

Es sei $S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n [Y(u_{i-1}) + Y(u_i)] \cdot [X(u_i) - X(u_{i-1})]$, wo $Y(u)$ und $X(u)$ zwei zufällige Funktionen (in $a \leq u \leq b$), u_1, \dots, u_{n-1} die $n-1$ Werte (der Größe nach geordnet) von U_1, \dots, U_{n-1} [U_h : Folge von unabhängigen Zufallsgrößen, in (a, b) gleichverteilt] und $u_0 = a$, $u_n = b$ sind. Wenn $S_n \rightarrow S$ (in einem der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzbegriffe), ist die Zufallsgröße S das stochastische

Integral $\int_a^b Y(u) dX(u)$ (Slutsky, P. Lévy). Verf. betont, wie diese Definition auch im gewöhnlichen Falle der Analysis [$Y(u)$ und $X(u)$ bekannte, nicht zufällige, Funktionen] eine nützliche Verallgemeinerung darstellt, die besonders bei der Cantellischen Auffassung bemerkenswert erscheint. Grundsätzlich besteht nämlich die Verallgemeinerung darin, daß $S_n \rightarrow S$ nicht über allen Zerlegungen (wenn $u_n - u_{n-1} < \delta \rightarrow 0$), sondern über fast allen (in verschieden wählbarem Sinne) zu gelten braucht.

B. de Finetti.

Fraser, D. A. S.: Generalized hit probabilities with a Gaussian target. II. Ann. math. Statistics 24, 288—294 (1953).

Verf. gibt eine Anwendung von Ergebnissen, die er im Jahre 1951 über eine diskrete Verteilung der Zahl der „Treffer“ auf ein „ k -dimensionales Gaußsches Ziel“ gefunden hat, auf das zuerst von Cunningham und Hynd behandelte Problem der Wahrscheinlichkeit von mindestens einem Treffer auf eine bewegte Scheibe. Den von ihm gefundenen Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit wertet er für den Fall $n = 5$ „Runden“ aus, und zwar für verschiedene Einstellungen der Waffe unter Berücksichtigung verschiedener Streuungen derselben. Eine zeichnerische Darstellung veranschaulicht die Ergebnisse. Da der Ausdruck für große n rechnerisch schwer zu behandeln ist, gibt er für diesen Fall eine Näherungsformel und eine bildliche Darstellung ihrer Auswertung mit Benutzung der Zahlen von C. und H. Die Anwendung der vom Verf. früher gefundenen Ergebnisse auf das Problem von C. und H. zeigt, daß die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ nicht unmittelbar durch die Mittelwerte der Zieleinstellung ausgedrückt werden kann, vielmehr von einem Vektor derselben mit Gaußscher Verteilung abhängt.

P. Lorenz.

Cox, D. R. and W. L. Smith: The superposition of several strictly periodic sequences of events. Biometrika 40, 1—11 (1953).

Auf N Zeitgeraden S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) trete ein bestimmtes Ereignis jeweils periodisch auf, wobei die N Perioden $\theta_i > 0$ gegenseitig irrational seien, d. h. kein Satz von nicht sämtlich verschwindenden n_i die Bedingung $\sum_{i=1}^n n_i \theta_i = 0$ erfülle. Mit Hilfe des verallgemeinerten Weylschen Theorems [H. Weyl: Math. Ann. 77, 313—352 (1916)] über die unabhängige Gleichverteilung der Bruchreste $\{n \alpha_1\}, \dots, \{n \alpha_k\}$ im Intervall $(0, 1)$ von k gegenseitig irrationalen Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ bestimmen Verf. die Verteilung der Zeitintervalle zwischen zwei auf irgendwelchen der N Zeitreihen sukzessive eintretenden Ereignissen und untersuchen ihr asymptotisches Verhalten für $N \rightarrow \infty$. Die Varianz-Zeit-Kurve (Varianz der in einer Zeit t eintreffenden Ereignisanzahl als Funktion von t) wird herangezogen zur Unterscheidung des hier betrachteten Falles von Zufallsreihen einerseits und weiteren Fällen andererseits.

M. P. Geppert.

Isaacs, Rufus: Optimal horse race bets. Amer. math. Monthly 60, 310—315 (1953).

Connaissant la somme totale, S_j , mise sur le j ème cheval, ($j = 1, 2, \dots, n$) par l'ensemble des joueurs, la probabilité, p_j , que ce cheval a de gagner, et le coefficient, Q , (moindre que l'unité) par lequel on multiplie les sommes encaissées au pari mutuel avant de les distribuer aux joueurs, l'A. cherche quelles sont les mises, x_j , dont certaines peuvent être nulles, qu'un nouveau joueur doit engager respectivement sur ces chevaux pour que la valeur probable de son gain soit maxima. Application: pour cinq chevaux, A, B, C, D, E , dont les probabilités de gain sont respectivement $0,4 - 0,2 - 0,2 - 0,1 - 0,1$ et sur lesquelles les totaux des enjeux sont 1000, 350, 300, 250 et 100, on trouve 28, 40 sur B , 50, 33 sur C et 43, 02 sur E , en supposant un impôt de 10%. Bien entendu, il faut supposer le dernier joueur seul à connaître les p_j .

A. Sade.

Berge, Claude: Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 32, 129—184 (1953).

The author generalizes the classical theory of games by considering positions x , which are chosen by one player, after which the other player chooses another position out of $I'x$, etc. The properties of the game depend on the operator I' . The sets from which positions are chosen need not be describable by numbers, and the duration of a play need not be bounded in advance. Winning, losing, and indifferent positions are derived from properties of I' . In particular, the author defines Neumannian games as those with imperfect information and studies the problem of the existence

of a value. In dealing with games where the two sets of strategies are enumerable, use is made of properties of Hilbert space and it is shown that for a game with payoff (a_{ij}) to be strictly determined, it is sufficient that $\sum_i \sum_j a_{ij}^2$ be convergent.

S. Vajda.

Mises, Richard von: Über die J. von Neumannsche Theorie der Spiele. Math. Nachr. 9, 363—378 (1953).

After pointing out that the effectiveness of mixed strategies in zero-sum two-person games presupposes the existence of collectives as defined in the author's theory of probability, he gives an algebraic-geometric approach to a method for finding the complete solution of such games in a finite number of systematic steps. His method is essentially the same as that developed by Shapley and Snow in this Zbl. 41, 254.

S. Vajda.

Kiefer, J.: Sequential minimax search for a maximum. Proc. Amer. math. Soc. 4, 502—506 (1953).

The following game is considered. Player A chooses a real function $f(x)$ in $(0, 1)$ that is strictly increasing in $(0, \theta)$ and strictly decreasing in $(\theta, 1)$. Player B is ignorant of $f(x)$ and θ but he is on request informed of the value of $f(x)$ in N points x_1, \dots, x_N which he is allowed to choose sequentially. He thereafter has to state an interval containing θ , and his payoff is the length of this interval. An ε -minimax strategy for B is indicated.

G. Elfving.

Statistik:

● Graf, Ulrich und Hans-Joachim Henning: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. VI, 102 S. DM 9,—.

Aus ihrem kürzlich erschienenen Leitfaden „Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen“ (vgl. dies. Zbl. 47, 127) haben Verff. in dem vorliegenden Heft das vollständige Skelett der dortigen Tabellen und Nomogramme abgedruckt, ergänzt durch einige Zusätze in den Kurvenblättern A und J, durch das aus ihrem Aufsatz „Zum Ausreißerproblem“ (vgl. dies. Zbl. 47, 129) übernommene Kurvenblatt M und Tabellen von $\log n!$ (vierstellig, $n = 1$ bis 999), n^2 und \sqrt{n} für $n = 1$ bis 2000. Die größtenteils unmittelbar oder mittelbar aus den Tabellen von R. A. Fisher und F. Yates und anderen verbreiteten englischen und amerikanischen Tafelwerken stammenden Tabellen betreffen: Ordinaten und Flächen der Normalverteilung, Student-, F - und χ^2 -Verteilung, sodann die für die Konstruktion von Kontrollkarten auf Grund von Mittelwert, Standardabweichung bzw. Spannweite erforderlichen Faktoren. Die Nomogramme gelten der Student-Verteilung, Beurteilung von Stichproben-Mittelwert und -Varianz, der Approximation von Binomial- durch Normalverteilung, dem χ^2 -Test und der Prüfung von Korrelationskoeffizienten. Der Gebrauch der Tabellen wird vorbereitet durch eine (31 Seiten umfassende) Zusammenstellung des entsprechenden Formalapparates und illustriert an zwanzig z. T. der Fachliteratur entnommenen Zahlenbeispielen. Die nähere Erklärung der ohne jede Begründung gegebenen Formeln findet der Leser bis auf wenige Ausnahmen in dem eingangs genannten Leitfaden. Erfreulicherweise haben Verff. hier nicht wie dort nur Walds Formeln für Sequenzprüfung von Häufigkeiten, sondern auch Walds Sequenztest für Mittelwerte wiedergegeben. Der in den Formeln bewältigte Stoff (vgl. das an erster Stelle zitierte Referat) beschränkt sich, wie es auch in den Überschriften der Tabellen und Nomogramme zum Ausdruck kommt, ausschließlich auf die für die Fabrikationskontrolle wichtigen Gebiete. Dem mit der laufenden Qualitätskontrolle betrauten Ingenieur wird die Formel- und Tabellensammlung eine gute Stütze bieten.

M.-P. Geppert.

Stevens, W. L.: Tables of the angular transformation. Biometrika 40, 70—73 (1953).

Gifet, P. M. and G. S. Watson: Calculation of accuracy of results of graphical square intercomparisons. Austral. J. Phys. 6, 155—170 (1953).

Jowett, G. H. and J. F. Scott: Simple graphical techniques for calculating serial and spatial correlations, and mean semi-squared differences. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 81—86 (1953).

Es werden zwei im Prinzip identische Verfahren beschrieben und an Zahlen-

beispielen illustriert, bei denen mit Hilfe sukzessiver Verschiebung durchsichtigen Zeichenpapiers bzw. einer mit geeigneter Skala versehenen Glasplatte über einer äquidistanten Wertefolge x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der Durchschnitt von $(x_i - x_{i+s})^2$ berechnet wird, aus welchem auf Grund asymptotischer Gleichheit mit

[Durchschnitt $(x_i - \bar{x})^2$ - Durchschnitt $(x_i - x_{i+s})^2$] [Durchschnitt $(x_i - \bar{x})^2$]
die s -te Reihenkorrelation zu ermitteln ist. M. P. Geppert.

Rider, Paul R.: The distribution of the product of ranges in samples from a rectangular population. J. Amer. statist. Assoc. 48, 546—549 (1953).

Moshman, Jack: Critical values of the log-normal distribution. J. Amer. statist. Assoc. 48, 600—609 (1953).

Kamat, A. R.: Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications. Biometrika 40, 20—34 (1953).

Es seien x_1, \dots, x_n Gaußisch verteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x) = C \cdot \exp\{-\frac{1}{2} \cdot \sum \omega_{ik} x_i x_k\}$. Zur Berechnung der absoluten Momente $(m_r) = E(\prod x_i^{m_{r_i}})$

benötigt man die Integrale $[m_r] = \int x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \cdot p(x) dx_1 \dots dx_n$ mit Integration über $\Omega = \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Alle $[m_r]$ entstehen durch partielle Differentiation nach den ω_{ik} aus den „Basisintegralen“ $R_{n,0} = \int_{\Omega} p(x) dx_1 \dots dx_n$ und

$R_{n,v} = \int_{\Omega} x_v p(x) dx_1 \dots dx_n$. Die $R_{n,v}$ mit $v \geq 1$ werden auf $R_{n-1,0}$ zurück-

geführt; die $R_{n,0}$ müssen für alle n berechnet werden. Durchführung der Rechnung und Angabe der (m_v) für $n = 1, 2, 3$. — Die Darstellung von $p(x)$ durch seine Laplacesche Transformierte und Reihenentwicklung der letzteren führt für die (m_v) und $[m_v]$ zu Potenzreihenentwicklungen in den Korrelationskoeffizienten der x_i mit explizit angebbaren Entwicklungskoeffizienten. — Als Anwendung werden die vier ersten Momente für die Statistiken $T_1 = x_1 + c x_2$; $T_2 = |x_1 + c x_2|$; $T_3 = c_1 |x_1| + c_2 |x_2| + c_3 |x_3|$ bei $\text{var}(x_i) = 1$ angegeben und die exakte Wahrscheinlichkeitsverteilung von T_3 mit der einer Pearson-Kurve verglichen.

H. Richter.

Kamat, A. R.: On the mean successive difference and its ratio to the root mean square. Biometrika 40, 116—127 (1953).

Es seien x_1, \dots, x_n Gaußisch verteilt mit $\text{var}(x_v) = \sigma^2$ und $E(x_v) = \mu_v$. Untersucht wird die Statistik $d = (n-1)^{-1} \cdot \sum x_i = x_{i+1}$ als Schätzwert von σ^2 bei kleinen Werten von $|\mu_{v+1} - \mu_v|$. Nach der vorstehend referierten Methode des Verf. werden die ersten vier Momente von d im Falle $\mu_v = \mu$ bestimmt. Die Approximation durch eine Pearson-Kurve führt auf Typ III, praktisch genau auf Typ I. Im Falle $n = 3$ wird die Übereinstimmung zwischen exakter Verteilung von d und genannter Approximation gezeigt. Sehr gut ist auch die Übereinstimmung der Pearsonkurve bei $n = 4$ bis 10 mit einem Stichprobenversuch mit 25000 Hollerith-Karten, die gemäß Gaußischer Verteilung gelocht sind. Schließlich wird noch der Stichprobenversuch im Falle $n = 3$ mit der exakten d -Verteilung verglichen. — Für den Fall $\mu_v = \mu + 0,05v \cdot \sigma$ bei $n = 15$ werden $E(d)$ und $\text{var}(d)$ berechnet und mit Erwartungswert nebst Varianz der Statistiken $\delta^2 = (n-1)^{-1} \cdot \sum (x_i - x_{i+1})^2$ und $s^2 = n^{-1} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2$ verglichen. d und δ sind gleichwertig und 40mal weniger verfälscht als s^2 . — Abschließend wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Statistik $W = d/s$ durch Auswertung der ersten vier wegen $\mu'_r(W) = \mu'_r(d)/\mu'_r(s)$ leicht berechenbaren Momente und Anpassung an eine Pearsonkurve II aufgestellt und für $n \rightarrow \infty$ die Grenzbeziehungen $E(W) \rightarrow E(d/\sigma) = 2/\pi$ nebst $\text{var } W, \text{var}(d/s) \rightarrow 0,395$ abgeleitet.

H. Richter.

Anis, A. A. and E. H. Lloyd: On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates. Biometrika 40, 35—42 (1953).

The authors derive the formula $\left| \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{r}} \right|$ for the expected value of the range of the n -th partial sum of independent and standard normal variates. This is consistent with the asymptotic formula derived by Feller in this Zbl. 43, 342.

S. Vajda.

Goffman, Casper: Note on the variation of means. *Ann. math. Statistics* 24, 307—309 (1953).

In den verschiedenen Serien eines Fabrikationsganges mögen Normalverteilungen vorliegen mit der gemeinsamen Streuung $\sigma = 1$, aber verschiedenen Mittelwerten μ_1, \dots, μ_n . Gesucht ist eine Funktion $f(\mu_1, \dots, \mu_n)$, die als Maß der Variabilität der Mittelwerte angesehen werden kann. Verf. zeigt, daß unter den folgenden vier (naheliegenden) Bedingungen eine stetige Funktion $F(x)$ existiert, so daß $F(V) = f(\mu_1, \dots, \mu_n)$ und V die Quadratsumme der Abweichungen der n Mittelwerte von ihrem arithmetischen Mittel ist: 1. $f(\mu_1, \dots, \mu_n)$ ist stetig, nicht negativ und dann und nur dann Null, wenn $\mu_1 = \dots = \mu_n$. 2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $f(\mu_1, \dots, \mu_n) < \delta$ stets $|\mu_i - \mu_j| < \varepsilon$ für jedes $i, j = 1, 2, \dots, n$. 3. Für jedes μ_1, \dots, μ_n und jedes h ist $f(\mu_1 + h, \dots, \mu_n + h) = f(\mu_1, \dots, \mu_n)$. 4. Wenn die x_1, \dots, x_n ; x'_1, \dots, x'_n mit Streuung $\sigma = 1$ und Mittelwerten μ_1, \dots, μ_n ; μ'_1, \dots, μ'_n normal verteilt sind und $f(\mu_1, \dots, \mu_n) = f(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ ist, dann haben die Zufallsvariablen $u = f(x_1, \dots, x_n)$ und $v = f(x'_1, \dots, x'_n)$ dieselbe Verteilungsfunktion. — Umgekehrt gilt: Ist $F(x)$ stetig monoton wachsend und $F(0) = 0$, dann erfüllt $f(\mu_1, \dots, \mu_n) = F(V)$ die Bedingungen 1.—4. [Druckfehler: S. 308: Gleichung (3) Summenzeichen unter Integral muß in Exponenten (wie bei Gl. 4.)

M. P. Geppert — O. Ludwig.

Lah, Ivo: Contribution to the calculus of the mathematical expectation. *Sankhyā* 12, 247—264 (1953).

In einer Statistik werden N Elemente auf eine bestimmte Eigenschaft beobachtet. Die a priori-Wahrscheinlichkeit, dieselbe zu besitzen, betrage p — die empirische $p' = n/N$. Verf. gibt unter Annahme der Binomialverteilung eine Darstellung der Berechnung der Erwartungswerte von $n^a, p'^a, (p' - p)^a, 1/p'$ sowie einige Erwartungswerte bei 2-dimensionalen Verteilungen wie für das Pearsonsche Kontingenzmaß Φ^2 , die Korrelations- und Regressionskoeffizienten. *W. Saxon.*

Jones, Howard L.: Approximating the mode from weighted sample values. *J. Amer. statist. Assoc.* 48, 113—127 (1953).

Se la legge di distribuzione di una variabile statistica x è data da $y = f(x - \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k)$, essendo $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ i parametri caratteristici della distribuzione, la determinazione approssimata dei pesi ω_r che corrisponde a ciascuno dei valori x_r , può farsi, allorché si ammette la esistenza di y' e l'analicità di $y'/y = -\varphi(x)$, mediante la formula: $\omega_r = \varphi'(x_r)/\sum \varphi'(x_r)$. Ordinati i valori x_r in senso crescente, e supposto che $F(x)$ e la funzione di probabilità totale, la determinazione della norma dei valori x_r si riduce a la risoluzione della equazione:

$$(r-1)/F(x_r) - (n-r)/[1-F(x_r)] + y'_r y_r^2 = 0.$$

Questo metodo è applicato dal A. alla distribuzione t di Student e ad altre di tipo polinomiale, con el consueto calcolo dal scarto medio quadratico, varianza, etc.

J. M^a Orts.

Raj, Des: On Mill's ratio for the type III population. *Ann. math. Statistics* 24, 309—312 (1953).

Das Verhältnis des Flächeninhalts $\int_x^\infty f(t) dt$ zur Ordinate $y = f(x)$ ist für die Normalverteilung mehrfach studiert worden, zuerst von J. P. Mills [Biometrika 18, 395—400 (1926)]. Bei der Schätzung von Parametern von Pearson-Typ-III-Gesamtheiten aus gestutzten Stichproben (truncated samples) tritt dieses Verhältnis für Typ-III-Verteilungen auf. Verf. bezeichnet es für die standardisierten

Typ III-Gesamtheiten mit $\mu(x)^{-1} \left(\mu(x) = f(x) \int_x^\infty f(t) dt \right)$. Da sich, besonders für große x , $\mu(x)$ nicht immer mit Hilfe von Tabellen der Typ-III-Funktion bestimmen läßt, ist es nützlich, Abschätzungen für $\mu(x)$ zu haben. Verf. zeigt, daß $\mu(x)$ monoton wächst, und gibt obere und untere Schranken für $\mu(x)$ an. Die Güte der Annäherung wird an Hand einer Tabelle illustriert. [Druckfehler: In der Gleichung für $d\varphi_2(x)/dx$ (S. 311 unter Tab. I) ist $[G(x)]^{-1}$ durch $G(x)$ zu ersetzen.] *M. P. Geppert — O. Ludwig.*

Kathirgamatamby, N.: Note on the Poisson index of dispersion. *Biometrika* 40, 225—228 (1953).

Lieblein, Julius: On the exact evaluation of the variances and covariances of order statistics in samples from the extreme-value distribution. *Ann. math. Statistics* **24**, 282—287 (1953).

In der Theorie der Rangzahlen (order statistics) lassen sich bisher nur für wenige Ausgangsverteilungen (z. B. Gleichverteilung und Normalverteilung) die zweiten Momente der Stichprobenverteilung der Rangzahlen in geschlossener Form bzw. mit Hilfe tabulierter Funktionen darstellen (im allgemeinen sind langwierige numerische Integrationen erforderlich). Verf. zeigt, daß sich für die „Extremwertverteilung“ mit der kumulativen Verteilungsfunktion $F(x) = \exp(-e^{-(x-u)\beta})$, $-\infty < x < \infty$ (bzw. in reduzierter Form $P(y) = \exp(-e^{-y})$; $-\infty < y < \infty$), die von R. A. Fisher und L. H. C. Tippett durch Grenzübergang aus der Verteilung des größten Wertes in einer Stichprobe hergeleitet wurde [R. A. Fisher und L. H. C. Tippett, *Proc. Cambridge philos. Soc.* **24**, 180—190 (1928)], die zweiten Momente (insbesondere die Kovarianzen) mittels tabulierter Funktionen berechnen lassen. Zu diesem Zweck wird (zum ersten Male) das Doppelintegral

$$\Phi(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y xy \exp\{-x - y - te^{-x} - ue^{-y}\} dx dy, \quad t, u > 0$$

durch Zurückführung auf die von F. W. Newman (*The Higher Trigonometry, Superrationals of Second Order*, Cambridge 1892, S. 64—65) tabulierte Spencesche Funktion

$$L(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{\log w}{w-1} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n$$

(und elementare Funktionen) ausgewertet. Als Beispiel werden für eine Stichprobe vom Umfang $n = 3$ sämtliche zweiten Momente (um Null und um den Mittelwert) auf vier Dezimalstellen genau angegeben. Anwendungen zur Untersuchung der Schätzung von Parametern der Extremwertverteilung unter Benutzung der Rangzahlen werden in einer (ausführlicheren) Arbeit erscheinen, die auch eine Tabelle der ersten beiden Momente für kleine Stichproben enthalten wird. [Druckfehler: In (3.6) S. 284 muß es heißen: $\exp\{t - g_1(t+u)t\}$. M. P. Geppert—O. Ludwig.]

Brownlee, K. A., J. L. Hodges jr., and Murray Rosenblatt: The up-and-down method with small samples. *J. Amer. statist. Assoc.* **48**, 262—277 (1953).

Golub, Abraham: Designing single-sampling inspection plans when the sample size is fixed. *J. Amer. statist. Assoc.* **19**, 278—288 (1953).

Blackwell, David: Equivalent comparisons of experiments. *Ann. math. Statistics* **24**, 265—272 (1953).

Consider a situation where a decision has to be made, the consequences of which depend on which one of a finite number of hypotheses H_1, \dots, H_n is true. For this purpose, different experiments α, β, \dots may be available. Two relations of uniform superiority, $\alpha \succ \beta$ and $\alpha \succsim \beta$ have been discussed; cf. Blackwell, this *Zbl.* **44**, 142. It has been shown earlier that \succ implies \succsim and, in certain situations, conversely. This paper brings the proof that the relations are always identical. — When only a finite number k of different decisions is admitted, \succ reduces to a weaker relation \succ_k . For all k , \succ implies \succ_k and \succ_k implies \succ_{k-1} , but not conversely. However, for $n = 2$, \succ_2 implies \succ . G. Elfving.

Lindley, D. V.: Statistical interference. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **15**, 30—76 (1953).

This interesting paper presents a partly new approach to decision function theory. The proofs are worked out for the case of a finite number of hypothetical distributions and non-sequential decisions, but the results seem largely to carry over to more general situations. — Let p_1, \dots, p_n be non-atomic probability measures on the sample space A and d_1, \dots, d_m possible terminal decisions. Any decision function $d = d(a)$ is essentially described by the matrix $M = \{p_{ij}\}$ where p_{ij} is the probability of making decision d_i when p_j is the true distribution. Instead of introducing a loss matrix, suppose to begin with only that to each p_j there is one „best“ decision d_i , $i = i(j)$. Within the set \mathfrak{M} of all attainable matrices M , a partial ordering is established by the rule: $M \succ M^*$ whenever $p_{ij} \leq p_{ij}^*$ for all i, j with $i \neq i(j)$, strict inequality holding for at least one pair of subscripts. This ordering implies the existence of a set $\mathfrak{M}_a \subset \mathfrak{M}$ of admissible matrices, i. e. matrices admitting no uniformly better ones. The set \mathfrak{M} is a closed convex set in $R_{m,n}$, \mathfrak{M}_a being part of its boundary. The elements of \mathfrak{M}_a are essentially identical with the M 's generated by minimizing, on \mathfrak{M} , all linear forms $\sum \Sigma a_{ij} p_{ij}$ with $a_{ij} = 0$ for $i = i(j)$, $a_{ij} \leq 0$ for $i \neq i(j)$. To any given set $\{a_{ij}\}$ of such coefficients, the corresponding

decision function may be found in the following way: Let $l_j(a)$ ($j = 1, \dots, n$) be the density of the measure p_j with respect to some common measure on A , and form the weighted likelihoods $\lambda_i(a) = \sum a_{ij} l_j(a)$ ($i = 1, \dots, m$); then, to any observed a , take the decision d_i corresponding to the smallest $\lambda_i(a)$. The method is, for this reason, called the minimum unlikelihood method. — The a_{ij} may be interpreted as losses weighted with respect to apriori beliefs, $a_{ij} = \pi_i w_{ij}$. To the author's opinion, these two non-statistical elements are equally vague and should not be separated, as they are in Wald's theory. Apart from this, the main point of the author is the observation that the minimum unlikelihood method produces all decision functions that are admissible in the "error probability sense" indicated above. — Many examples are given; the combined testing and estimation problems are particularly noteworthy. *G. Elfving.*

Waerden, B. L. van der: Testing a distribution function. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 201—207 (1953).

Birnbaum and Tingey (this Zbl. **44**, 146) have derived the distribution function of the maximum of the difference Δ between a continuous distribution function F and the empirical distribution function found from a sample of size n taken from the population with distribution F . Δ can be used as the basis of a test for a normal distribution $N(0, 1)$, against the alternatives $\mu > 0$. The author derives and exhibits graphically the power of this test for $n = 2, 3$ and 5 . For $n = 5$ the efficiency of the test is about 65%, and for larger n it is probably smaller. Remarks are added on Kolmogoroff's two-sided Δ test. *S. Vajda.*

Waerden, B. L. van der: Ein neuer Test für das Problem der zwei Stichproben. *Math. Ann.* **126**, 93—107 (1953).

Let two samples $\{x_i\}$ and $\{y_j\}$ ($i = 1, \dots, g$; $j = 1, \dots, h$) be given. It is required to test the hypothesis that both samples came from the same population. The author proposes the following test: write the x_i and y_j in ascending order and

denote them by z_1, \dots, z_{g+h} . Find Z_1, \dots, Z_{g+h} from $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z_i} e^{-z^2/2} dz = \frac{i}{g+h+1}$.

(The sum of all Z_i is zero.) Add all Z_i such that z_i is a value from the sample $\{x_i\}$. If this total, X say, exceeds an appropriately chosen value, reject the hypothesis. It is shown that if the samples come from normal populations with equal variances and means a and $b > a$ respectively, then the power of the test approaches, for fixed g and large h , the power of the one-sided t -test. Herein lies the advantage of this test as compared with that of Wilcoxon, whose power was investigated in the author's earlier paper, this Zbl. **48**, 118. (A similar test was proposed by M. E. Terry, this Zbl. **48**, 367.) *S. Vajda.*

Krishna Iyer, P. V.: Testing of two samples. *Nature* **172**, 553 (1953).

Gronow, D. G. C.: Non-normality in two-sample t -tests. *Biometrika* **40**, 222—225 (1953).

Moore, P. G.: A sequential test for randomness. *Biometrika* **40**, 111—115 (1953).

A probability ratio test is considered for randomness of variables in a series of two types of events, against the alternative of a random Markov chain. An illustration is given of a case where the null-hypothesis assumes equal probabilities for the two types of events and the alternative hypothesis has a given correlation between successive events. *S. Vajda.*

Rijkoort, P. J. and M. E. Wise: Simple approximations and nomograms for two ranking tests. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **56**, 294—302 (1953).

The incomplete Beta-Function approximation to the distribution of the coefficient of concordance W (see M. G. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. I, London 1945) is taken as a basis to show that a simple approximation can be given for the dependence of critical values of W on the number m of rankings. A nomogram is presented for finding the probability of a value W , given m and k (number of units to be ranked). Rijkoort's generalisation of the Wilcoxon test (this Zbl. **47**, 132) is then similarly treated. The nomograms would appear to be very awkward in use, but publication on a larger scale is proposed. *S. Vajda.*

Wilson, Edwin B.: Significance levels for a skew distribution. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 537—546 (1953).

Die Prüfung einer Nullhypothese erfolgt an Hand der bei ihrer Annahme geltenden Verteilung $f(r)$ eines Stichprobenparameters r auf Grund des kritischen

Bereiches $r \leq r_0$ oder $r \geq r_1$ mit Signifikanzniveau $\int_{-\infty}^{r_0} f(r) dr + \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr = L$.

Verf. skizziert vier verschiedene Möglichkeiten für die eindeutige Festsetzung der kritischen Grenzen $r_0 \leq r_1$: a) $r_0, r_1 = T \mp h$; b) $\int_{-\infty}^{r_0} f(r) dr = \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr = \frac{L}{2}$;

c) $f(r_0) = f(r_1)$; d) $\int_{-\infty}^{r_0} f(r) dr \int_{r_1}^{\infty} f(r) dr = \int_{-\infty}^T f(r) dr \int_T^{\infty} f(r) dr$. Wenn $L \rightarrow 1$, rücken

r_0 und r_1 unter plausiblen Annahmen über $f(r)$ zusammen in den Wert T für a), d), in den Medianwert für b), in den Modalwert für c). Der Gedankengang wird angewandt auf den den Student- und χ^2 -Test enthaltenden F -Test. Zur Prüfung der Nullhypothese gleicher Varianzen in zwei normal verteilten Populationen schlägt Verf. an Stelle des exakten kritischen Wertes des Varianzenverhältnisses und bekannter Approximationen (auf Grund der asymptotischen Normalverteilung von $z = \frac{1}{2} \ln F$ und der Differenz der Standard-Abweichungen) eine neue Approximation vor, die auf der von E. B. Wilson und M. M. Hilferty (dies. Zbl. 4, 360) verbesserten normalen Approximation der χ^2 -Verteilung beruht. M. P. Geppert.

Fog, David: Contingency tables and approximate χ^2 -distributions. Math. Scandinav. 1, 93—103 (1953).

Anknüpfend an Arbeiten von I. O. Irwin (dies. Zbl. 33, 75) und H. O. Lancaster (dies. Zbl. 33, 74; 39, 144), beweist Verf. mit Hilfe geeigneter Orthogonal-substitution, daß für eine q -dimensionale Kontingenztafel mit den empirischen Besetzungszahlen $n_{i_1 \dots i_q}$ ($i_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; i_q = 1, 2, \dots, q_q$) bei fest gedachten eindimensionalen Randzahlen a_{i_1}, \dots, g_{i_q} die mit den dementsprechenden Erwartungswerten $v_{i_1 \dots i_q}$ gebildete Größe

$$\chi^2 = \sum_{i_1, \dots, i_q} \frac{(n_{i_1 \dots i_q} - v_{i_1 \dots i_q})^2}{v_{i_1 \dots i_q}} = \sum_{i_1, \dots, i_q} y_{i_1 \dots i_q}^2$$

darstellbar ist als Quadratsumme von $q_1 \dots q_q - (q_1 + \dots + q_q) + q - 1$ standardisierten, gegenseitig orthogonalen Linearformen der y . M. P. Geppert.

Allen jr., S. G.: A class of minimax tests for one-sided composite hypotheses. Ann. math. Statistics 24, 295—298 (1953).

Let the variable X have probability density $p(x, \theta) = \omega(\theta) \psi(x) e^{\theta x}$. Consider the problem of testing $\theta \geq \theta_0$ against $\theta < \theta_0$, and let the loss be 0 for correct decisions and equal to given non-negative functions of θ for incorrect decisions. Then a minimax critical region is provided by $\{X \leq k\}$ where k is determined by the condition that the maximum risks on both sides of θ_0 have to be equal.

G. Elfving.

Rao, K. S.: A simple method of deriving best critical regions similar to the sample space in tests of an important class of composite hypotheses. Biometrika 40, 231—233 (1953).

Latscha, R.: Tests of significance in a 2×2 contingency table: extension of Finney's table. Biometrika 40, 74—86 (1953).

Horsnell, G.: The effect of unequal group variances on the F -test for the homogeneity of group means. Biometrika 40, 128—136 (1953).

Laha, R. G.: On an extension of Geary's theorem. Biometrika 40, 228—229 (1953).

Anscombe, F. J.: Sequential estimation. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 1—29 (1953).

Verf. gibt zunächst eine Literaturübersicht über die auf dem Gebiete der sequentiellen Intervallschätzung bisher erzielten Ergebnisse: Hauptstufen derselben: Nach J. B. S. Haldane [Biometrika 33, 222—225 (1945)] u. a. inverse binomische Stichproben, d. h. Schätzung des Parameters p einer Pascal-Verteilung $\binom{N-1}{c-1} p^c (1-p)^{N-c}$ ($N = c, c+1, \dots$) mittels des erwartungstreuen (unbiased) Parameters $X = (c-1)/(N-1)$; nach C. Stein [Ann. math. Statistics 16, 243—258 (1945)] doppelte Stichproben (double sampling) zur Schätzung des unbekannten Mittelwertes einer Normalverteilung unbekannter Varianz mittels Confidenzintervall gegebener Breite und gegebener Confidenzniveaux α . Nach M. A. Girshick, F. Mosteller und L. J. Savage [Ann. math. Statistics 17, 13—23 (1946)] u. a. Schätzung von $p^t(1-p)^u$ (p = unbekannte Wahrscheinlichkeit im Bernoulli-Schema) auf Grund von Probenpfaden (sample paths); Blackwells und Wolfowitzs Ausdehnungen der allgemeinen Sätze von Wald und von Fréchet-Darmois-Rao-Cramér über Erwartungswerte und Varianzen von Schätzparametern; eigene Sätze über für große N asymptotisch auch im sequentiellen Fall gültig bleibende Schätzungsformeln der Schätzungstheorie fester N und Verbesserung der Approximation durch Korrekturglieder. Danach entwickelt Verf. approximative Sequenz-Methoden zur Schätzung des Mittelwertes einer Normalverteilung unbekannter Varianz durch ein Confidenzintervall gegebener Breite mit gegebenem α und zur Schätzung der Parameter λ, μ eines einfachen Geburt-Tod-Prozesses bei gegebenem mittlerem Fehler der Schätzung von $(\lambda - \mu)$. Es folgen Erwägungen über die praktische Nützlichkeit sequentieller Schätzverfahren. Diskussionsbeiträge von K. D. Tocher, G. A. Barnard, H. Ruben, P. Armitage, A. Glaskin, M. J. R. Healy, A. M. Walker, M. C. K. Tweedie, W. L. Smith.

M. P. Geppert.

Bartlett, M. S.: Approximate confidence intervals. Biometrika 40, 12—19 (1953).

Let $p = \exp L(x, \theta)$ be the probability or probability density of a sample x from a one-parametric distribution. It is well-known that asymptotically shortest confidence intervals for θ may be constructed in the following way. For each θ , take $k_1(\theta), k_2(\theta)$ such that (1) $k_1(\theta) < L'_\theta(x, \theta) < k_2(\theta)$ holds with a probability equal to the desired confidence level. This inequality is in general equivalent with one of form $\theta_1(x) < \theta < \theta_2(x)$ which thus yields the confidence interval. If the distribution of L'_θ is complicated, one may use a normal approximation, observing that $E(L'_\theta) = 0$, $\text{Var}(L'_\theta) = I = -E(L''_{\theta\theta})$; (1) is then replaced by (1') $-\xi < L'_\theta/\sqrt{I} < \xi$ where ξ is the appropriate normal deviate. The present paper proposes to improve this method by adding, in the middle term of (1'), a correction for skewness. Examples show that this procedure may be very efficient. G. Elfving.

Katz, Leo: Confidence intervals for the number showing a certain characteristic in a population when sampling is without replacement. J. Amer. statist. Assoc. 48, 256—261 (1953).

Elkin, Jack M.: Estimating the ratio between the proportions of two classes when one is a sub-class of the other. J. Amer. statist. Assoc. 48, 128—130 (1953).

Esame di alcuni criteri per la valutazione statistica del rapporto fra il numero degli elementi di una collettività che possiedono un determinato carattere A e il numero di questi che alla sua volta hanno un'altra proprietà B . Questi criteri riguardano in particolare alla determinazione del valore medio e coefficiente di variazione.

J. Ma. Orts.

Cohen jr., A. C.: Estimating parameters in truncated Pearson frequency distributions without resort to higher moments. Biometrika 40, 50—57 (1953).

Aufgabenstellung und Methode stehen in engstem Zusammenhange mit einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 43, 137). Das dort entwickelte Verfahren wird jedoch so modifiziert, daß nur die ersten vier Stichprobenmomente in Betracht gezogen werden müssen.

L. Schmetterer.

Raj, Des: Estimation of the parameters of type III populations from truncated samples. J. Amer. statist. Assoc. 48, 336—349 (1953).

Mit Momentenmethode sowie mit Maximum-likelihood-Prinzip löst Verf. die Aufgabe, Mittelwert und Varianz einer Pearson-Typ-III-Verteilung auf Grund einer

ein- bzw. zweiseitig gestutzten Stichprobe zu schätzen. Die drei Fälle: Anzahlen der nicht gemessenen Werte für beide Schwänze unbekannt, für beide einzeln bekannt, für beide gemeinsam bekannt, werden getrennt behandelt, führen aber zu formal ähnlichen Ergebnissen. Die Rechnungen werden durchgeführt zunächst bei bekanntem 3. Schwerpunkts-Moment der Verteilung, später ohne diese Voraussetzung.

M. P. Geppert.

Graybill, Franklin A.: On quadratic estimates of variance components. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 180—182 (1953).

Sandeliu, Martin: Some unbiased estimates for a type of two-phase sampling. Kungl. Lantbrukshögskolans Ann. 19, 113—126 (1953).

The type of twophase sampling considered is that where the first phase leads to a stratification of the sample, and sub-samples are then taken from each stratum separately. The author studies methods for obtaining unbiased estimates of means and variances of numerical characteristics. The illustrations include an inverse sampling method.

S. Vajda.

Sandeliu, Martin: Inverse sampling applied to bacterial plate counts. II. Cases when technical errors cannot be neglected. Kungl. Lantbrukshögskolans Ann. 19, 197—204 (1953).

This continuation of a paper of the same title (this Zbl. 43, 349) deals with the case when the amount of bacterial suspensions on a plate is subject to random errors. Let a be the mean number of living organisms per unit volume of the suspension. The author derives an unbiased estimate a' of a , an unbiased estimate of the variance of a' and a confidence interval for a .

S. Vajda.

Masuyama, Motosaburo: A rapid method of estimating basal area in timber survey — an application of integral geometry to areal sampling problems. Sankhyā 12, 291—302 (1953).

The method is based on Steiner's formula connecting the area and circumference of an oval with the area of a parallel oval and requires the counting of those trees which are situated within ranges r_i ($i = 1, 2, \dots, N \geq 3$) from points chosen „at random“. The bias introduced by the boundary and the variance of the estimates for total area of cross-sections of the trees is investigated. When the cross-section is circular, some simplifications arise.

S. Vajda.

Stuart, A.: The estimation and comparison of strengths of association in contingency tables. Biometrika 40, 105—110 (1953).

Kimball, Bradford F.: Note on computation of orthogonal predictors. Ann. math. Statistics 24, 299—303 (1953).

Unter Benutzung der Matrizenzerlegung in Dreiecksmatrizen nach Cholesky (Quadratwurzelverfahren) oder Gauß-Doolittle wird ein Algorithmus zur Orthogonalisierung der Fehlergleichungsmatrix (predictor) angegeben, wobei die Matrix der Normalgleichungen in die Einheits- bzw. eine Diagonalmatrix übergeht.

R. Zurmühl.

Kimball, Bradford F.: A multiple group least squares' problem and the significance of the associated orthogonal polynomials. J. Amer. statist. Assoc. 48, 320—335 (1953).

Den Ausgangspunkt der Darstellung bildet die Aufgabe, zu einem in mehreren Gruppen vorliegenden statistischen Material die Koeffizienten eines das Gesamtmaterial erfassenden Ausgleichspolynoms in der Weise zu ermitteln, daß man zunächst je ein Polynom jeder Gruppe mit gruppenweise verschiedenen, jedoch einem gemeinsamen höchsten Koeffizienten bestimmt. Aus ihnen errechnen sich dann die Koeffizienten des Gesamtpolynoms. Dies führt auf die Verwendung orthogonaler Polynome. Zur Orthogonalisierung wird ein auf dem Gauß-Doolittle-Verfahren beruhender Algorithmus benutzt (vgl. das vorstehende Referat). — Die Orthogonalisierung hat allgemein u. a. den Vorteil, daß bei Hinzunahme eines weiteren Koeffi-

zienten im Ausgleichspolynom die Ergebnisse der alten Rechnung verwendet werden können. Insbesondere ist in den Formeln für die Gewichte der Koeffizienten lediglich ein weiteres Glied hinzuzufügen. — Das Vorgehen wird an einem Zahlenbeispiel erläutert.

R. Zurmühl.

Guest, P. G.: Note on the fitting of polynomials to equally-spaced observations. J. Math. Physics 32, 68—71 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 36, 365) wird gezeigt, daß für die Annäherung von Beobachtungen bei gleichen Tafelabständen durch Polynome die Methode der Potenzmomente mindestens so bequem ist, wie die Benutzung orthogonaler Polynome.

J. Heinhold.

Bartlett, M. S. and D. V. Rajalakshman: Goodness of fit tests for simultaneous autoregressive series. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 107—124 (1953).

Bartlett and Diananda (see this Zbl. 38, 296) have given a simplified method for deriving Quenouille's test for goodness of fit of an autoregressive stationary series with discrete parameters. Here the authors extend the method to simultaneous autoregressive series and illustrate it on two artificial series. Incidentally, they notice that Tippett's random sampling numbers are in some respects deficient. S. Vajda.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Geiringer, Hilda: Einige Probleme Mendelscher Genetik. R. v. Mises zum 70. Geburtstag gewidmet. Z. angew. Math. Mech. 33, 130—138 (1953).

Die Verf. beschäftigt sich mit einer Gruppe von Problemen aus dem Gebiet der Populationsgenetik, die sich auf der Basis der Mendelschen Theorie, unter Benutzung eines rationalen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, mathematisch beschreiben lassen. Sie erklärt zuerst die grundlegenden Verteilungen an dem einfachen Fall eines diploiden Charakters und betrachtet dann die Vererbung von gekoppelten Merkmalen, von denen jedes sich auf eine bestimmte Anzahl von Allelen bezieht. Andererseits verallgemeinert sie die Mendelsche Idee auf den Fall der Autopolyploide. Bei jeder Verallgemeinerung werden die Rekursionsformeln für die Verteilungen der Gameten in aufeinander folgenden Generationen hergeleitet. Die Formeln besitzen die Gestalt eines Systems von quadratischen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, in denen der Begriff der Segregationsverteilungen eine entscheidende Rolle spielt. Ferner wird das Grenzverhalten der Verteilungen untersucht, wenn die Generationsnummer unbegrenzt wächst.

Y. Komatu.

Armitage, P.: A note on the time-homogeneous birth process. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 15, 90—91 (1953).

Ist die Wahrscheinlichkeit für eine Geburt im Zeitintervall $(T, T + dT)$ gegeben als $\lambda_r dT + o(dT)$, wo λ_r nur von der Anzahl r der im Zeitraum $(0, T)$ erfolgten Geburten abhängt, so ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit für genau x Geburten in $(0, T)$ $p_x(T) = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{x-1} \cdot (-1)^x \cdot d_x(T)$ mit $d_x(T) = \sum_{i=0}^x \left(e^{-\lambda_i T} / \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) \right)$. Verf. beweist: $p_x(T) = \lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{x-1} T^x / x! + o(T^x)$ für $T \rightarrow 0$, und für den Quotienten $P_x(T)$ des $(x+1)$ -ten und x -ten faktoriellen Momentes der Verteilung $p_x(T)$: $P_x(T) = \lambda_x \cdot T + o(T)$ für $T \rightarrow 0$, und folgert, daß die durchschnittliche Exponierungszeit vom x -ten zum $(x+1)$ -ten Ereignis, wenn in $(0, T)$ sich genau x Ereignisse ereignet haben, $T/(x+1)$ beträgt.

M. P. Geppert.

Evans, D. A.: Experimental evidence concerning contagious distributions in ecology. Biometrika 40, 186—211 (1953).

Craig, C. C.: On a method of estimating biological populations in the field. Biometrika 40, 216—218 (1953).

Mack, C.: The effect of overlapping in bacterial counts of incubated colonies. Biometrika 40, 220—222 (1953).

Bailey, Norman T. J.: The total size of a general stochastic epidemic. *Biometrika* 40, 177—185 (1953).

The author considers a model of a stochastic epidemic involving infection as well as removal. He starts with a partial differential equation, containing the ratio ρ of removal to infection rate as a parameter, for the generating function of the probabilities $p_{rs}(t)$ that at time t there are r susceptibles still uninfected and s infectious individuals in circulation, respectively, under an initial condition that the epidemic begins by introduction of a infectious cases into a homogeneously mixed population of n susceptibles. Applying the Laplace transformation, he derives a recurrence equation satisfied by Laplace transforms of the p 's. The probability of an epidemic of total size w defined by $P_w = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{n-w,0}(t)$ is studied for $0 \leq w \leq n$.

Taking, in particular, $a = 1$, some typical results are graphically shown for some values of n and ρ . The method is applied also to the investigation of household distribution of cases. Taking again $a = 1$, he gives the expressions for P_w and the maximum likelihood scores for families up to a total size 5. *Y. Komatu.*

Komatu, Yûsaku: Probability theoretic investigations on inheritance. XVI₁, XVI₂, XVI₃. Further discussion on interchange of infants. *Proc. Japan Acad.* 28, 538—541, 542—545 (1952), 29, 36—41 (1953).

If we do not know the types, — may be not even the phenotypes of all 3 members of both triples, i. e. if e. g. in one triple the mother has died, or the father has disappeared, the problem is how much can still be concluded under the circumstances. Here again the conclusions may be based on a knowledge of the genotypes or our knowledge may be restricted to phenotypes. The two problems may be investigated, where either one or even both fathers are not available. In both cases it is still possible under certain circumstances to draw conclusions concerning the suspected interchange based on the two pairs of a mother and a child each, or on one such pair and one complete triple.

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. XVI₄. Further discussions on interchange of infants. *Proc. Japan Acad.* 29, 42—46 (1953).

(Part XVI₃, *prec. review*). With respect to the interchange problem certain inequalities between the previously introduced probabilities are investigated.

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. IV₇, IV₈. Mother-child combinations. V₃. Brethren combinations. *Proc. Japan Acad.* 29, 68—71, 72—77, 78—82 (1953).

(Part IV₆, V₂, this *Zbl.* 45, 230). The necessary modifications of the preceding methods in case for recessive genes only phenotypes are known, are discussed (IV₇), and illustrated by means of blood types (IV₈), considering in particular brethren combinations of the same family (V₃).

H. Geiringer.

Penrose, L. S.: The general purpose sib-pair linkage test. *Ann. Eugenics* 18, 120—124 (1952).

Olifiers, E.: The „a“ and „b“ distribution concept. *J. Inst. Actuaries* 79, 221—224 (1953).

Durch Einteilung der durch Tod oder aus sonstigen Gründen aus der Beobachtung ausgeschiedenen Personen sowie der im Laufe der Beobachtungsperiode neu hinzukommenden Personen in die beiden Gruppen mit dem Merkmal: Ab- und Zugang vor oder nach Erleben des Geburtstages in einem bestimmten Kalenderjahr, kann der Verf. formal einfache Formeln für die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit nach den verschiedenen Methoden (Lebensjahr-Methode, Kalenderjahr-Methode usw.) angeben.

E. Zwinggi.

Walsh, John E.: Some probability results for mortality rates based on insurance data. *J. Inst. Actuaries* 79, 213—220 (1953).

Ist bei Sterblichkeitsmessungen in Versicherten-Beständen die Police Zählbarkeit, so wird eine verstorbene Person so oft mal als Todesfall gezählt, als sie versichert war. Bedeutet in einem solchen Bestand E die Zahl der Einheiten unter Risiko, u_i die Zahl der Todesfälle mit der Ordnungsnummer i ($i = 1, 2, \dots, d$; „erster“, „zweiter“ ... Todesfall), q' die „beobachtete“ Sterbewahrscheinlichkeit mit $q' = \frac{1}{E} \sum_1^d u_i$, q die „wahre“ Sterbewahrscheinlichkeit, so zeigt der Verf.,

daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $[E(q' - q)] \sqrt{(1 - q) \sum_1^d u_i^2}$ nahezu normal ist, das Mittel 0 und die Streuung 1 aufweist. *E. Zwinggi.*

Ogborn, M. E.: *On the nature of the function expressive of the law of human mortality.* J. Inst. Actuaries 79, 170—212 (1953).

Nobile, Amedeo: *Rendite certe a rate uguali.* Archimede 5, 112—115 (1953).

Barwert der in k -Raten zahlbaren Zeitrente, mit Zinsperiode $1/h$ (h = Vielfaches von k). *B. de Finetti.*

● **Smail, Lloyd L.:** *Mathematics of finance.* New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953. X, 282 S. 34 s.

Klare, elementare, vollständige Darstellung (Lehrbuch für „Colleges“) der Zinseszinsrechnung, mit Anwendungen und zahlreichen Beispielen und Übungen. *B. de Finetti.*

● **Tintner, Gerhard:** *Mathematics and statistics for economists.* New York and Toronto: Rinehart & Company, Inc. 1953. XIV, 363 p. \$ 6,50.

Aus dem Vorwort: „Es ist evident, daß ein Buch, welches nicht für künftige professionelle Mathematiker, sondern für künftige Ökonometriker geplant ist, nicht restlos streng in den Beweisen der involvierten mathematischen Sätze sein kann. Intuitive Beweise und Demonstrationen ersetzen häufig die mathematische Strenge ...“ — Beispiel (S. 81): „Mit dem Ausdruck $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ meinen wir folgendes: Wenn x eine Zahl nahe bei aber verschieden von a

ist, ist der Wert der Funktion $f(x)$ nahe bei L . Darüber hinaus kann $f(x)$ so nahe bei L wie gewünscht gemacht werden, indem man ein x hinreichend nahe bei a nimmt.“ — Das Buch ist eine klare und übersichtliche Darstellung der elementaren Mathematik, der Infinitesimalrechnung und der mathematischen Statistik für den Gebrauch des Studierenden der Ökonometrie (d. h. der Volkswirtschaftslehre, die sich mathematischer Hilfsmittel bedient). Es stellt außerdem eine Fundgrube für diejenigen dar, der volkswirtschaftliche Beispiele für mathematische Aufgaben sucht. — Der eigentliche Text macht kaum ein Viertel des Buches aus. Zu jedem der 101 Abschnitte sind wenigstens ein, oft mehrere (bis 5) Beispiele gegeben, ferner eine Reihe von Aufgaben, durchschnittlich etwa 10, insgesamt also rund 1000. Zu etwa der Hälfte der Aufgaben (nämlich jeder mit ungerader Nummer) enthält ein Anhang von 30 Seiten die Lösungen. — Inhalt in Stichworten: I. Elementare Mathematik, nämlich Gleichungen 1. und 2. Grades und Systeme linearer Gleichungen, Logarithmen, Reihen, Determinanten, lineare Differenzgleichungen (63 S.). — II. Infinitesimalrechnung (1. und höhere, gewöhnliche und partielle Ableitungen, logarithmische Differentiation, Extrema und Wendepunkte, homogene Funktionen, unbestimmte und bestimmte Integrale; 122 S.). — III. Mathematische Statistik (Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariable, Momente, Normalverteilungen, Stichproben, Tests, Korrelation, Indizes; 115 S.). — Ökonomische Probleme, die behandelt werden: Nachfragefunktionen, Marktgleichungen, Paretosche Einkommensverteilung, Kostenfunktionen, Grenzkosten, Elastizitäten, Monopole u. a. *H. Härten.*

Herstein, I. N. and John Milnor: *An axiomatic approach to measurable utility.* Econometrica 21, 291—297 (1953).

Die Axiome der Nützlichkeits-theorie werden in ähnlicher Weise wie bei von Neumann-Morgenstern (Theory of Games, Princeton 1947) und Marschak (dies. Zbl. 36, 220) angegeben, doch in vereinfachter und schwächerer Form, und mit ganz allgemeinem Anwendungsbereich. *B. de Finetti.*

Allais, M.: *L'extension des théories de l'équilibre économique général et du rendement social au cas du risque.* Econometrica 21, 269—290 (1953).

Verf. betrachtet mehrere verschiedene Benehmen dem Risiko gegenüber (von denjenigen, die es lieben oder es fürchten); es werden zu diesem Zwecke Formeln untersucht, wo Mittelwert und Streuung zusammen vorkommen. *B. de Finetti.*

Allais, M.: Le comportement de l'homme rationnel devant le risque. Critique des postulats et axiomes de l'École américaine. *Econometrica* 21, 503—546 (1953).

● Wold, H. and L. Jürén: Demand analysis. A study in econometrics. New York: John Wiley and Sons 1953. XVI, 358 p. \$ 7,00.

Borch, Karl: Effects on demand of changes in the distribution of income. *Econometrica* 21, 325—331 (1953).

Strotz, R. H., J. C. McAnulty and J. B. Naines jr.: Goodwin's nonlinear theory of the business cycle. An electro-analog solution. *Econometrica* 21, 390—411 (1953).

Solow, Robert M. and Paul A. Samuelson: Balanced growth under constant returns to scale. *Econometrica* 21, 412—424 (1953).

Sowohl die Betrachtung eines vollständig geschlossenen Wirtschaftssystems als auch analoge bevölkerungsstatistische Fragen führen auf ein System nicht-linearer Differenzen-Gleichungen:

$$X_i(t+1) = H^i [X_1(t), \dots, X_n(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

für $X_i(t) > 0$, wo die H^i homogen 1. Grades sind. Gesucht werden Lösungen „balancierten Wachstums“, d. h. der Form $X_i(t) = x \cdot V_i \cdot \lambda^t$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die, eingesetzt, auf das nicht-lineare Eigenvektorproblem $\lambda \cdot V_i = H^i(V_1, \dots, V_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) führen. Verf. beweist die Existenz einer solchen Lösung V_1^*, \dots, V_n^* und unter der Annahme, daß die H^i monoton seien, die Eindeutigkeit der Lösung. Ferner wird diese abgeschätzt und ihre relative Stabilität im Großen nachgewiesen, die diejenige im Kleinen nach sich zieht und dadurch Ergebnisse über die charakteristischen Wurzeln gewisser Matrizen zeitigt. Die Methode wird auf den analogen Fall eines Differentialgleichungs-Systems übertragen. *M. P. Geppert.*

● Charnes, A., W. W. Cooper and A. Henderson: An introduction to linear programming. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1953. IX, 74 p. \$ 2,50.

Bellman, Richard, Irving Glicksberg and Oliver Gross: On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 39, 298—301 (1953).

The problems dealt with are of the following type. Let $x_{j,c}(t)$ be the vector function satisfying $dx/dt = Ax + f(t)$, $x(0) = c$, where A is a given matrix. The vector function $f(t)$ and the vector c are the unknowns of the problem. Further, let $y(t)$, $H(c)$ be given vector functions, and $F(z)$, $G(f)$ given functionals over an interval $(0, T)$. One wishes to minimize $F(x_{j,c} - y) + G(f) + H(c)$ with respect to $f(t)$ and c , subject to constraints of various kinds on these unknown elements. — The interpretation of this problem is as follows: $x(t)$ is the state of a system at time t ; c is the starting state; $f(t)$ represents the control exercised in order to keep $x(t)$ close to a prescribed state $y(t)$; H and G measure costs, F the loss due to deviation from $y(t)$. — Several particular results are presented without proofs. *G. Elfving.*

Flood, Merrill M.: On the Hitchcock distribution problem. *Pacific J. Math.* 3, 369—386 (1953).

A contribution to the theory of linear programming. The paper describes and justifies a computational method for solving the following problem. Let m, n, r_i, c_j, d_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) be given positive integers with $\sum r_i = \sum c_j$. It is required to find numbers x_{ij} such that $\sum \sum d_{ij} x_{ij}$ be a minimum subject to the restrictions $\sum_i x_{ij} = c_j$, $\sum_j x_{ij} = r_i$, $x_{ij} \geq 0$. *G. Elfving.*

Geometrie.

● Blaschke, Wilhelm: Griechische und anschauliche Geometrie. (Mathematische Einzelschriften, Band 1.) München: R. Oldenbourg 1953. 60 S., 51 Abb. DM 6,—.

Diese im Rahmen des „Studium Generale“ an der Universität Hamburg 1952 gehaltenen Vorlesungen verfolgen den Zweck, in einem weiteren Kreis von Hörern und Lesern „den Geist der Geometrie neu zu erwecken, der in den letzten Jahrzehnten ein wenig eingenickt zu sein

scheint“. Verf. knüpft an die Leistungen der alten griechischen Geometer, vor allem Pythagoras, Euklid, Archimedes, Apollonios, Pappos an und entwickelt einige ihrer Lehrsätze in moderner Sprache. Einzelne schon bei den Alten vorhandene Ansätze werden in ihrer Entwicklung bis in die neueste Zeit hinein verfolgt, wie z. B. die Behauptung des Euklid: „Zwei (scil. konvexe) Vielfache sind kongruent, wenn sie durch kongruente Seiten berandet werden“, oder das isoperimetrische Problem und die Grundlagen der projektiven Geometrie. Einige Probleme des Altertums, wie die Winkeldrittung und die Kreisquadratur, sind inzwischen vollständig gelöst, andere stehen noch teilweise offen und haben neue interessante Fragestellungen angeregt. Das anziehend geschriebene und dem Verlangen nach Anschaulichkeit entgegenkommende Büchlein schließt mit einem bedauernden Hinweis auf den fast vollständigen Untergang der griechischen Geometrie im Altertum, aus dem nur spärliche Reste bis zum Wiedererwachen der Wissenschaft im Abendlande herübergerettet wurden. — Der Inhalt: Pythagoras — Zeit des Eukleides — Die Stoicheia — Eikörper — Eine Behauptung des Eukleides über Vielfache — Zeit des Archimedes — Archimedes Schriften — Die Kegelschnitte — Apollonios — Isoperimetrie — Pappos und die projektive Geometrie — Winkeldrittung — Schluß — Schrifttum. *W. Gröbner.*

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Bachmann, Friedrich: Eine Kennzeichnung der Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen. *Math. Ann.* 126, 79—92 (1953).

Verf. kennzeichnet die eindimensionale projektive Gruppe $PGL(2, K)$ für Körper K von Charakteristik $\neq 2$. Sie ist isomorph zu der Gruppe $O(3, K, Q)$ der projektiven Kollineationen der projektiven Ebene über K , welche einen einteiligen Kegelschnitt Q in sich überführen. Die involutorischen Elemente a, b, c, \dots der Gruppe $O(3, K, Q)$ sind die harmonischen Homologien, deren Zentrum und Achse ein nicht mit dem Kegelschnitt inzidierendes Paar Pol-Polare sind. Wird die Gesamtheit der involutorischen Elemente mit J bezeichnet, so bedeutet $ab \in J$, daß die Achsen von a und b in bezug auf den Kegelschnitt konjugiert sind, und $abc \in J$, daß die Achsen von a, b, c im Büschel liegen. a, b werden verbindbar genannt, wenn ein c existiert, so daß $ac, bc \in J$ gilt. Die Unverbindbarkeit von a, b besagt dann, daß die Achsen von a und b sich in einem Punkt des Kegelschnitts schneiden. In der Gruppe $O(3, K, Q)$ gilt: (1) Jedes Element ist als Produkt von zwei involutorischen darstellbar; (2) Aus $a \neq b$ und $abc, abd \in J$ folgt $acd \in J$; (3) Es gibt a, b , welche nicht verbindbar sind; (4) Sind weder a, b noch c, d verbindbar, so gibt es ein s , so daß $abs, cds \in J$; (5) Sind weder a, b noch a, c noch a, d verbindbar, so gilt $abc \in J$ oder $abd \in J$ oder $acd \in J$. — Verf. zeigt, daß umgekehrt eine abstrakte Gruppe G mit den Eigenschaften (1) bis (5) eine Gruppe $PGL(2, K)$ ist. Der Beweis geht davon aus, daß sich die involutorischen Elemente von G auf Grund von (2) in Klassen einteilen lassen mit der Eigenschaft, daß für Elemente a, b, c einer Klasse stets $abc \in J$ gilt. Diese Klassen werden Büschel genannt. Zwei Büschel haben höchstens ein Element gemein. Ein Büschel, dessen Elemente unverbindbar sind, wird singular genannt. Für die singulären Büschel läßt sich eine Addition und eine Multiplikation einführen, und es erweist sich, daß die singulären Büschel einen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ bilden. Die durch Transformation mit Elementen aus G bewirkten Abbildungen der Menge der singulären Büschel auf sich, welche eine zu G isomorphe Gruppe bilden, stimmen dann überein mit den gebrochen-linearen Transformationen über K , d. h. $G \cong PGL(2, K) \cong O(3, K, Q)$. — Aus dem genannten Axiomensystem für die $O(3, K, Q)$ mit einteiligem Q kann man, wie im Anhang bemerkt wird, ein Axiomensystem für die $O(3, K, Q)$ mit nullteiligem Q , also die Bewegungsgruppe einer ebenen elliptischen Geometrie erhalten, indem man (1) modifiziert und (3) durch seine Negation ersetzt; (4) und (5) werden dann hin-fällig. — Die Arbeit gibt ein neues Beispiel für die Kennzeichnung einer geometrischen Gruppe durch Gesetze, denen ihre involutorischen Elemente genügen, und macht Untersuchungen über die eindimensionale projektive Gruppe, wie sie C. Segre, Stephanos u. a. angestellt haben, der Spiegelungstheoretischen Methode zugänglich, die Hjelmlev, Reidemeister, A. Schmidt, Verf. u. a. für die ebene metrische Geometrie entwickelt haben. Überdies hat sich die Note durch Untersuchungen des Ref. als das entscheidende Hilfsmittel für eine neue Begründung der hyperbolischen Geometrie erwiesen. *W. Klingenberg.*

Lombardo-Radice, Lucio: Su alcuni modelli di geometrie proiettive piane finite. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 370—373 (1953).

Sei p eine ungerade Primzahl. Man betrachte in der euklidischen Ebene das reguläre p -Eck mit den Eckpunkten $Q_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, p$). Hierzu bilde man die Geraden $q_i = (Q_i^{(1)}, Q_{i+1}^{(1)})$ und $\bar{q}_i = (Q_i^{(1)}, Q_{i+(p-1)/2}^{(1)})$ und die Punkte $Q_i^{(h)} = (q_i, q_{i+h})$, $\bar{Q}_i^{(h)} = (\bar{q}_i, \bar{q}_{i+h})$ für $h = 1, \dots, (p-1)/2$. Verf. bemerkt: Falls man den

$Q_i^{(1)}$ die Punkte $P_i^{(1)}$ der affinen Ebene über dem Primkörper der Charakteristik p mit den Koordinaten $(1 - (i - 1) i, 2; i)$ zuordnet und hierzu wie oben die Geraden p_i, \bar{p}_i und die Punkte $P_i^{(h)}, \bar{P}_i^{(h)}$ bildet, dann bleibt bei dieser Abbildung die Parallelität in folgendem Sinne erhalten: Ist die Gerade $(Q_r^{(h)}, Q_s^{(h)})$ (oder $(\bar{Q}_r^{(h)}, \bar{Q}_s^{(h)})$) parallel zur Geraden $(Q_l^{(1)}, Q_m^{(1)})$ (oder $(\bar{Q}_l^{(1)}, \bar{Q}_m^{(1)})$), so gilt dies auch für die Bildgeraden. Dabei sind die Punkte $P_i^{(h)}$ alle untereinander verschieden, und ebenso die Punkte $\bar{P}_i^{(h)}$. Verf. spricht die nicht näher begründete Hoffnung aus, daß diese Bemerkung zum Studium „freier“ finiter projektiver Ebenen dienlich sein möge.

W. Klingenberg.

Tresse, A.: *Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes*. Bull. Soc. math. France **81**, 81—143 (1953).

Elementare Einführung in die nichteuklidischen Geometrien der Ebene, an Hand der Deutung in der konformen Ebene. Als Repräsentanten der Geraden („Scheingeraden“ nach Wellstein, der Autor sagt „fa-droites“, wobei fa- eine Abkürzung von faux ist) treten Kreise auf, die in einem festen Punkt O konstante positive oder negative oder verschwindende Potenz haben. O kann auch uneigentlich sein. Analog wird von fa-distance, fa-cercle usw. gesprochen. Hauptarbeitsmittel ist die Theorie der Inversion. Dargestellt wird u. a. die Metrik, die Theorie der Kreise, der Bewegungen und Symmetrien (sehr ausführlich) und die Elemente der Dreiecksgeometrie. Die pädagogische Ziele verfolgende Arbeit wird fortgesetzt.

K. Strubecker.

Fulton, C. M.: *A different approach to the non-Euclidean geometries*. Amer. math. Monthly **60**, 7—11 (1953).

Ersetzt man in einem Axiomensystem der Geometrie des euklidischen Raumes das Parallelenaxiom durch die Forderung, daß die gewöhnliche sphärische Trigonometrie gelte, so gelangt man zu einfachen Funktionalgleichungen. Aus ihnen ergeben sich außer der euklidischen auch die elliptische und die hyperbolische Raumgeometrie.

F. Hohenberg.

Rogačenko, V. F.: *Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben in der Lobačevskischen Ebene mit Hilfe von Zirkel und Hyperzirkel oder von Orizirkel und Hyperzirkel*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **88**, 615—618 (1953) [Russisch].

Im Anschluß an die kurz zuvor erschienenen Bücher von Nestorovič und Smogorževskij (beide: Geometrische Konstruktionen in der Lobačevskischen Ebene, Moskau 1951; dies. Zbl. **45**, 101) zeigt Verf. auf einfachere Weise als dort, daß man zur Lösung der drei Hauptaufgaben: „Schnitt von zwei Geraden, von Gerade und Kreis sowie von zwei Kreisen bestimmen“ mit folgenden Hilfsmitteln auskommt: Kreiszirkel und Abstandslinienzirkel oder Grenzlينienzirkel und Abstandslinienzirkel. Hierbei sind unter den beiden zusätzlichen NE-Zirkeln solche zu verstehen, die es gestatten, Bögen von beliebigen Abstandslinien und Grenzkreisen zu zeichnen. Das Geradenlineal wird also ebenso wie bei den Mascheronischen Konstruktionen der euklidischen Ebene entbeht.

W. Burau.

Roeser, Ernst: *Corresponding polyhedra in the three spaces of constant curvature*. Canadian J. Math. **5**, 40—45 (1953).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (dies. Zbl. **4**, 412 und **19**, 75) vergleicht Verf. die fünf regulären platonischen Körper des sphärischen (elliptischen), euklidischen und hyperbolischen Raumes von drei Dimensionen und ihre Maßverhältnisse von der Annahme aus, daß sie derselben die Kantenmitten berührenden Kugel (Radius ϱ) angeordnet seien. Jedem nichteuklidischen Polyeder wird dabei ein euklidisches zugeordnet und ϱ fungiert als Parameter. Ausführlicher wird auf die rechtwinkligen Polyeder eingegangen.

K. Strubecker.

Algebraische Geometrie:

● **Godeaux, Lucien**: Les transformations birationnelles du plan. 2. éd. entièrement refondue. (Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. CXXII). Paris: Gauthier-Villars 1953.

Cette nouvelle édition diffère essentiellement de l'ancienne dans la présentation des transformations birationnelles; sa bibliographie très étendue, puisqu'elle donne les publications jusqu'en 1950, en fait un outil précieux pour celui qui cherchera à résoudre les questions délicates qui restent en suspens et sont généralement signalées dans l'ouvrage. Le Ch. I reprend la théorie des points singuliers d'une courbe algébrique par l'étude des développements de Puiseux; le Ch. II traite des systèmes linéaires de courbes planes, de leur jacobien et des réseaux homaloïdaux. Le Ch. III entièrement rénové, base l'étude des transformations birationnelles entre deux plans sur la considération de la surface F dont la représentation plane est donnée par le système $|C + s|$, où C est une courbe correspondant par T^{-1} à une droite et s est une droite, surface d'ordre $2n + 2$, normale dans S_{n+1} à sections de genre $n - 1$; par l'étude des courbes et points fondamentaux et de leurs homologues sur F , l'A. établit les relations qui sur F lient les courbes fondamentales de T , T^{-1} , les sections planes et leurs transformées; il en tire les relations de Clebsch entre les coefficients d'où la distribution des points fondamentaux dans les deux plans. Exposition, selon la méthode de B. Segre des résultats de Montesano sur la construction des réseaux homaloïdaux. Etude des transformations de de Jonquières et des transformées d'une courbe algébrique. Le Ch. IV traite de la décomposition d'une transformation birationnelle en transformations quadratiques à partir des lemmes de Chisini. Le Ch. V consacré à la géométrie algébrique plane, se base sur la théorie d'Enriques des adjoints purs successifs et conduit aux derniers résultats de Nollet sur la réduction d'un système à l'ordre minimum. Ce chapitre contient également l'étude des transformations avec courbe unie où les résultats récents, mais non encore exhaustifs du cas où la courbe unie est rationnelle ou elliptique, sont signalés. Sur la théorie des involutions planes, notons que les résultats postérieurs à la rédaction obtenus par T. Turri (ce Zbl. 43, 360) sur les transformations qui conservent un réseau de cubiques, remettent en question des résultats jusqu'alors tenus pour définitifs. L'ouvrage se termine par l'étude des groupes finis de transformations continues selon les méthodes d'Enriques et de Fano. *B. d'Orgeval.*

Godeaux, L.: Transformations birationnelles involutives laissant invariant le système des cubiques planes passant par six points fixes. *Mathesis* 62, 85—89 (1953).

Le système des cubiques planes passant par six points représente une surface cubique S ; toute involution plane qui le conserve correspond donc à une involution sur S , engendrée par une homographie spatiale qui est soit une homologie harmonique dont le centre est point d'Eckhardt sur S , soit une homographie biaxiale harmonique dont un axe est sur S . L'étude de ces homographies montre que dans le premier cas l'involution plane est une involution de Geiser, faisant se correspondre les points d'intersection variables des cubiques passant par sept points dont six sont alignés par couples avec le septième; dans le second cas, la transformation fait se correspondre des couples de points conjugués par rapport à une conique et alignés sur un point fixe, ou en est une transformée birationnelle. *B. d'Orgeval.*

Benedicty, Mario: Sopra i campi neutri che ammettono trasformazioni birazionali in sè. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 265—268 (1953).

L'A. étend le théorème de Schwarz-Klein à un champ neutre déterminé par une courbe algébrique de genre p , sur laquelle on fixe δ_1 couples neutres de points distincts et δ_2 couples neutres de points coïncidents, le genre virtuel de ce champ étant $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ (Severi). Une transformation birationnelle du champ neutre doit conserver les couples neutres de chaque espèce. L'A. démontre que sur un champ neutre de genre $\pi > 1$, pour lequel on n'a pas $p = \delta_1 = 0$, $\pi = \delta_2 = 2$, ne peuvent exister que des transformations birationnelles en nombre fini. Limite du nombre de ces transformations. *L. Godeaux.*

Tibiletti, Cesarina: Un'estensione del teorema dell' $A\varphi + B\psi$. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 446—448 (1953).

Marchionna, Ermanno: Una nuova caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* 2, 386—388 (1953).

Kurze Mitteilung der Ergebnisse, die in einer anderen Abhandlung ausgesprochen und bewiesen worden sind (dies. Zbl. 45, 166). *E. Togliatti.*

Maroni, Arturo: Sui moduli delle curve algebriche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 389—397 (1953).

Verf. verallgemeinert ein Resultat des Ref. bezüglich der Anzahl der Moduln, von denen eine k -gonale algebraische Kurve des Geschlechtes p unter der Voraussetzung abhängt, daß auf ihr außer einer Linearschar g_k^1 auch eine Linearschar g_h^1 existiere, derart, daß niemals mehr als zwei Punkte gleichzeitig einer Gruppe der g_k^1 und einer Gruppe der g_h^1 angehören. Verf. gelangt nämlich zu dem folgenden Satz: Die Kurven vom Geschlecht p , die Vollscharen mit der Dimension 1 und den niedrigsten Ordnungen k und h ($k \leq h$) besitzen, können nur eine endliche Anzahl von solchen Scharen haben, falls $p \geq \frac{1}{2}(h-1)k$ für h ungerade oder $p \geq \frac{1}{2}hk - 1$ für h gerade ist. Daraus folgt, daß die Anzahl N der Moduln, von denen oben genannte Kurven abhängen, durch die Formel $N = 2h + 2k + p - 7 - \sum_i (s_i - 2)$ aus-

gedrückt wird, wobei die Summe auf alle Gruppen von s_i Punkten ($s_i \geq 1$) ausgedehnt ist, die gleichzeitig einer Gruppe der g_k^1 und einer Gruppe der g_h^1 angehören. Ausgenommen ist der Fall, daß eine Gruppe der g_k^1 existiere, die mit einer Gruppe der g_h^1 $k-1$ Punkte gemeinsam habe. In diesem Fall besitzt die Kurve $\infty^1 g_h^1$ (Residuen der Punkte der Kurve bezüglich einer g_{h+1}^1 , die auf ihr existiert) und die Anzahl der Moduln wird durch den Ausdruck $N' = 2h + k + p - 5$ gegeben. R. Permutti.

Caputo, Michele: Sulla topologia delle curve algebriche sghembe situate sopra quadriche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 301—302 (1953).

Chisini, Oscar: Sulla costruzione a priori delle trece algebriche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 304—308 (1953).

Piazolla-Beloch, Margherita: Proprietà diametrali delle superficie algebriche. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 425—430 (1953).

Exposé de la généralisation aux surfaces de la théorie diamétrale des courbes algébriques (M. Piazzolla-Beloch, ce Zbl. 36, 107). Résultats obtenus par la Sig.^{ina} Th. Tonarelli dans la détermination des éléments de symétrie d'une surface de Lamé. B. d'Orgeval.

Knight, A. J.: On a class of surfaces with cyclic intersection groups. J. London math. Soc. 28, 210—214 (1953).

The author, in connection with some papers of D. B. Scott, gives a short proof that the topological canonical curve defined by Scott is independent from the usual canonical curve. To this end he adduces the example of the surface of non-ordered pairs of a curve with general moduli. For this surface the matrix of periods of simple integrals of the first kind has just one principal matrix. Therefore the intersection group is cyclic; the surface having the base-number 2, the module Q of Scott consists of the homology classes of multiples of a single algebraic curve. Considering a point curve correspondence and making use of a formula of Scott, the author deduces the expression of this curve by means of the curves of the base. Comparing this expression with that of the canonical curve, the author shows that these two curves could be algebraically dependent only if the genus of the curve which gives rise to the surface is equal to 3. The paper ends with some further considerations of the complementary module of Q . A. Andreotti.

Knight, A. J.: A note on overlapped surfaces. J. London math. Soc. 28, 383—384 (1953).

In einer Arbeit des Jahres 1950 (dies. Zbl. 37, 225) hat D. B. Scott die Vermutung ausgesprochen, daß alle algebraischen Flächen, für welche der Charakter, dem er den Namen „overlap“ gegeben hat, größer als Null ist, der Klasse der Regelflächen angehören. Es wird hier bewiesen, daß diese Vermutung unrichtig ist; in der Tat enthält die betrachtete Flächenart alle Flächen, die die Irregularität q haben und gleichzeitig ein Kurvenbüschel des Geschlechtes q enthalten. Darunter finden sich z. B. alle Flächen mit der Irregularität $q = 1$. Von den betrachteten Flächen gibt Verf. eine einfache Konstruktion an. E. G. Togliatti.

Godeaux, Lucien: Involutions cycliques de genres un appartenant à une surface algébrique. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 339—349 (1953).

Il existe des surfaces de genres 1, image d'une involution d'ordre premier impair,

sur une surface de genre $p_g > 1$; celle-ci possède alors une courbe canonique décomposée en $p - 2$ courbes appartenant à l'involution, ne se rencontrant qu'en des points unis de 1^o espèce; il leur correspond des courbes exceptionnelles, les points unis sont en nombre k de première espèce et h de seconde espèce symétriques, et l'on a $k + h(p - 1) \leq 19$. En particulier, dans S^6 , l'intersection d'un cône à 3 dimensions dont la base est surface de Véronèse par une forme cubique, conservée par une homographie cyclique d'ordre 5, possède une involution d'ordre 5 dotée de 2 points unis de 1^o espèce et de 3 points unis symétriques de 2^o espèce (surface de Humbert généralisée); ses caractères sont $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 7$. L'image de l'involution est un plan double à sextique de diramation dotée de 3 tacnodes particuliers (point double avec cuspside infiniment voisin), situés en ligne droite.

B. d'Orgeval.

Burniat, Pol: Sur les surfaces canoniques de genres $p_g = 4$, $p^{(1)} \geq 11$. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 271—281 (1953).

Dans le but de déterminer des surfaces canoniques, c'est-à-dire des surfaces de S_3 dont le système canonique est formé par les sections planes, l'A. construit des surfaces doubles répondant à la question et montre que, sous certaines conditions, ces surfaces appartiennent à des systèmes continus de surfaces en général irréductibles, qui sont également canoniques, et dont le genre linéaire a l'une des valeurs 11, 13, 15, 17. On n'était parvenu avant qu'à des surfaces canoniques de genre linéaire inférieur à 11.

L. Godeaux.

Conforto, Fabio e Francesco Gherardelli: Le superficie ellittiche con un fascio ellittico di curve di genere tre. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 309—312 (1953).

Godeaux, Lucien: Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 232—244 (1953).

Etude des surfaces d'équation: $A(x_1 x_2 x_3 x_4)^n + \sum x_i^{4n} - 2 \sum (x_i x_j)^{2n} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) pour $n > 2$ possédant $12n$ tacnodes particuliers $2n$ à $2n$ sur les arêtes du tétraèdre de référence, auxquels sont infiniment voisins $(n - 1)$ droites doubles successives. Détermination de la postulation d'une telle singularité pour les surfaces adjointes, d'où $p_a = \frac{1}{3}(14n^3 - 30n^2 + 22n - 3)$. Formation de l'équation des adjointes d'ordre $4n - 4$ en généralisant le calcul fait pour $n = 4$. Il en résulte que les surfaces considérées ont l'irrégularité: si n pair

$q = \frac{n}{12}(n^3 - 12n^2 + 50n - 48)$, si n impair $q = \frac{1}{12}(n^4 - 12n^3 + 50n^2 - 48n + 9)$.

B. d'Orgeval.

Segre, Beniamino: Geometria algebrica ed aritmetica. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 88—98 (1953).

Der Inhalt dieses Vortrages entspricht nicht genau dem Titel: Verf. behandelt das Problem der Auflöser der Singularitäten, d. h. die Frage, ob jede algebraische Mannigfaltigkeit birational in eine solche ohne Singularitäten transformiert werden kann. Dieses Problem wurde in letzter Zeit wiederholt aufgegriffen, so von L. Derwidué [dies. Zbl. 41, 286; Math. Ann. 183, 302—330 (1951)], an dessen Lösungsversuch Verf. eingehende Kritik übt. Vor allem wird klar gestellt, daß der immer wieder benutzte Satz, wonach eine Polare mindestens die Multiplizität $m - 1$ in jedem m -fachen Punkt der Mannigfaltigkeit habe, nur für gewöhnliche singuläre Punkte und für solche in der Nachbarschaft 1. Ordnung gilt, aber nicht mehr für die Nachbarschaft 2. und höherer Ordnung. — Ferner zeigt Verf., wie man mit Hilfe besonderer birationaler Transformationen, die er im Anschluß an Severi „Dilatationen“ nennt, der Lösung des Problems näher kommen könnte und sie im Falle der Dimensionen $v = 1, 2, 3$ auch wirklich erreicht, während sich bei höheren Dimensionen noch nicht überschaubare Schwierigkeiten entgegenstellen. Eine ausführliche Darstellung dieser Entwicklungen gibt Verf. in einer anderen umfangreichen Arbeit (dies. Zbl. 46, 389).

W. Gröbner.

Vaccaro, Giuseppe: Esame di singolarità superficiali. — II. Massimo numero di punti $(n - 2)$ -pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine n . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 203—209 (1953).

Zweiter Teil einer früher angefangenen Untersuchung mit demselben Titel (dies. Zbl. 48, 145). Hier findet man zunächst, daß eine algebraische Fläche der Ordnung n ,

welche keine $(n - 3)$ -fache Linie besitzt, höchstens vier $(n - 2)$ -fache Schmiegungspunkte aufweisen kann; solche vier Punkte fallen dann in die vier Ecken eines Tetraeders; die Ordnung der Fläche kann nur 4 oder 6 sein. Es werden leicht die Gleichungen dieser beiden Flächen aufgeschrieben. Nimmt man an, daß die betrachteten Flächen auch $(n - 3)$ -fache Linien aufweisen können, nicht aber $(n - 2)$ -fache, so gibt es eine größere Anzahl von Möglichkeiten: wenn eine Fläche F^n drei $(n - 2)$ -fache Schmiegungspunkte O, O', O'' besitzt, die auf einer Gerade liegen, und wenn ein vierter solcher Punkt O''' in der harmonischen Ebene von O z. B. vorhanden ist, so ist $n = 4$, und F^4 hat noch zwei ähnliche Punkte O^{IV}, O^V ; liegt O''' in den harmonischen Ebenen von O, O' , und deshalb auch von O'' , so ist entweder $n = 4$ oder $n = 5$ und es gibt auf F^4 oder F^5 keinen weiteren ähnlichen Punkt. *E. G. Togliatti.*

Dantoni, Giovanni: *Metodi geometrici per lo scioglimento delle singolarità delle superficie e varietà algebriche.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 1, 99—112 (1953).

Considérations à propos de la possibilité de trouver une démonstration géométrique à la fois simple et rigoureuse du théorème fondamental pour la théorie des surfaces algébriques qui affirme l'existence de modèles sans singularités. Les démonstrations algébriques de ce théorème [Zariski, ce Zbl. 21, 253; Ann. of Math., II. Ser. 43, 583—593 (1942)], irréprochables au point de vue de la rigueur, on fait ressortir les difficultés intrinsèques du problème. Du fait de ces difficultés, à l'avis du rapporteur, si une démonstration géométrique doit être rigoureuse elle ne pourra pas être si simple que l'A. semble le souhaiter.

G. Ancochea.

Gaeta, Federico: *Ricerche intorno alle varietà matriciali ed ai loro ideali.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 326—328 (1953).

Kurzer Bericht ohne ausführliche Beweise über Matrixideale $\mathfrak{a} = (A_{pq})$, welche durch die p -zeiligen Unterdeterminanten einer homogenen Matrix A_{pq} ($q = p$) erzeugt werden. Der Fall $q = p + 1$, der u. a. die Kurven von endlichem Residual umfaßt, wurde vom Verf. bereits ausführlich untersucht (dies. Zbl. 40, 230). Diese Sätze sollen nun auf $q > p + 1$ ausgedehnt werden. Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang ist der Satz, daß die Matrixideale $\mathfrak{a} = (A_{pq})$ und $\mathfrak{b} = (A_{p, p-1})$, wo $A_{p, p-1}$ eine genügend allgemein gewählte Untermatrix von A_{pq} ist, wechselseitig reziprok sind zum Hauptklassenideal \mathfrak{h} , das von denjenigen p -zeiligen Unterdeterminanten von A_{pq} erzeugt wird, die $A_{p, p-1}$ enthalten; dann gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \mathfrak{a}$. In geometrischer Sprache bedeutet das: die Mannigfaltigkeiten $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ sind gegenseitig reziproke Reste bezüglich des vollständigen Schnittes von $r = q - p + 1$ Hyperflächen $V(\mathfrak{h})$.

W. Gröbner.

Predonzan, Arno: *Condizioni di unirazionalità per varietà algebriche irriducibili.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 431—433 (1953).

Verf. erinnert zunächst an einige Methoden von U. Morin, und vom Verf. selbst, um hinreichende Bedingungen für die Unirationalität einer algebraischen Mannigfaltigkeit festzustellen. Dann spricht er ohne Beweis einen neuen Satz in derselben Richtung aus; dieser Satz gibt hinreichende Bedingungen für die Unirationalität einer algebraischen Hyperfläche auch im Falle, daß sie keine allgemeine Hyperfläche ihrer Ordnung ist. Es sei n diese Ordnung; es ist dann möglich, drei ganze Zahlen $r_{n-2} < r_{n-1} < r_n$ derart zu finden, daß eine algebraische irreduzible V_{r-1}^n des Raumes S_r unirational ist, sobald: 1. $r \geq r_n$; 2. V_{r-1}^n einen Raum $S_{r_{n-1}}$ enthält; 3. V_{r-1}^n kein Ort von Total- $S_{r_{n-1}}$ ist (Verf. sagt, daß V_{r-1}^n ein Ort von Total- S_h ist, wenn durch jeden Punkt P von V_{r-1}^n Räume S_h hindurchgehen, die auf V_{r-1}^n liegen, derart, daß alle auf V_{r-1}^n liegenden und den allgemeinsten jener S_h enthaltenden linearen Räume in einem Raum S_t ($t \geq h$) der V_{r-1}^n liegen). Die Unirationalität der V_{r-1}^n ist im Körper $\gamma(S_{r_{n-1}})$ zu verstehen, wenn V_{r-1}^n im Körper γ definiert ist. Der Beweis wird an anderer Stelle publiziert werden. *E. Togliatti.*

Roth, L.: *Hyperelliptic threefolds.* Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 397—409 (1953).

Die hyperelliptischen Mannigfaltigkeiten mit drei Dimensionen, V , die hier betrachtet werden, besitzen eine kontinuierliche vertauschbare ∞^2 Gruppe G von birationalen Transformationen; die Bahnflächen der Gruppe G sind ∞^1 hyperelliptische Flächen C , die ein Büschel $\{C\}$ bilden. Es sei $\varrho \geq 0$ das Geschlecht von $\{C\}$. Es wird vorausgesetzt: V und die allgemeine Fläche C sind irreduzibel; G ist auf C ausnahmslos transitiv; C ist frei von exceptionellen Kurven, und ihre Moduln sind allgemein. Es folgt dann zunächst, daß V eine hyperelliptische Kongruenz I von Kurven K enthält, die miteinander birational äquivalent sind. Es sei π das Geschlecht der Kurven K . Die Anzahl $d \geq 1$ der Schnittpunkte einer Fläche C und einer Kurve K heißt die Determinante von V und spielt in der ganzen Untersuchung eine wichtige Rolle. Ist K^* eine Bildkurve des Büschels $\{C\}$ und C^* eine Bildfläche der Kongruenz I , so ist das Produkt $V^* = K^* \times C^*$ ein d -faches Bild von V ; und die mehrfache Fläche, auf V , der Korrespondenz zwischen V und V^* besteht aus einer gewissen Anzahl $N \geq 0$ von Flächen C_{st} , so beschaffen, daß $s_i C_{st} = C$ ist. Die Untersuchung der Abbildung von V auf V^* gestattet das kanonische System $|K|$ von V zu bestimmen und die Geschlechter P_ϱ und P_i auszurechnen; es ist z. B. $P_\varrho = \varrho$. Weiter findet man $\omega = \Omega_i = P_a = 1$. Die Fälle $P_\varrho = 0$ und $P_\varrho = 1$ sowie der Fall einer uneigentlich hyperelliptischen I werden besonders berücksichtigt. Ist $P_{12} = 0$, so ist auch $\pi = 0$, und umgekehrt; in diesem Falle ist V mit einem S_0 -Kegel birational äquivalent. Es folgt eine analytische Darstellung von V , nur im Falle, daß die d -fache Fläche C^* zyklisch ist. Es folgen schließlich einige Beispiele und Bemerkungen auch im Falle, daß dC^* nicht zyklisch ist.

E. G. Togliatti.

Roth, Leonard: *Sulle V_3 algebriche che possiedono un sistema anticanonico*. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 434—439 (1953).

In Verbindung mit einer anderen Abhandlung desselben Verf. (dies. Zbl. 46, 386), beschäftigt sich hier Verf. mit algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten V_3 , die ein antikanonisches System $|A| = |C - C'|$ besitzen; $|C|$ bedeutet ein Linearsystem von Flächen auf V_3 und $|C'|$ das zu $|C|$ adjungierte Linearsystem. Es gibt in diesem Gebiete schon viele Ergebnisse; viele Fragen bleiben noch offen; von den Ergebnissen und von den ungelösten Aufgaben gibt Verf. zunächst eine Zusammenfassung; die behandelte Aufgabe ist mit der Bestimmung aller V_3 , auf welchen das Adjunktionsverfahren abbricht, eng verbunden. Dann gibt Verf. verschiedene Beispiele von irregulären V_3 , die diese letztere Eigenschaft besitzen; es wird betont, daß die Existenz solcher V_3 , die unirational, nicht aber birational sind, die Existenz von irrationalen Involutionen des Raumes S_r ($r = 3, 4, \dots$) mit sich bringt.

E. Togliatti.

Todd, J. A.: *On the invariants of the canonical system of a V_a* . Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 410—412 (1953).

Die arithmetischen Geschlechter Ω_i der i -dimensionalen charakteristischen Systeme des kanonischen Systems auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_a sind miteinander durch gewisse Relationen verbunden. Solche Relationen finden sich zum ersten Male in einer Abhandlung von G. Albanese [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 4, 154—184 (1927)]; sie wurden dann vom Verf. zusammen mit E. A. Maxwell wiedergefunden (dies. Zbl. 17, 420). Die Relationen des Verf. sind aber von denjenigen von G. Albanese formal sehr verschieden. Hier zeigt Verf., daß die ersteren Formeln den letzteren ganz allgemein äquivalent sind. Der Beweis ist eine Anwendung einiger Identitäten zwischen Polynomen, die aus den Formeln von Newton-Stirling und Newton-Bessel hergeleitet werden können.

E. G. Togliatti.

Brennan, J. G.: *Manifolds whose points image pairs or trios of points chosen from the groups of a linear series*. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 4, 41—53 (1953).

Généralisation de problèmes posés par V. C. Morton [Proc. London math. Soc., II Ser. 30, 379—400 (1930)]. Détermination du genre et de l'ordre de la courbe $V_1(k, n)$ image de k points variant dans une g_n^1 d'une courbe donnée de genre p , des nombres de points doubles et triples d'une $V_1(2, n)$ et des intersections d'une $V_1(2, n_1)$ et d'une $V_1(2, n_2)$. Détermination de l'ordre de la surface $V_2(3, n)$ des triples de points appartenant à une g_3^2 , de l'intersection de deux telles surfaces, de leurs points doubles, triples, quadruples. Détermination dans les cas simples correspondants des

nombres $N(k, k', k'')$ ($k^{(i)} \leq 4$) du nombre de groupes G_1, G_2, G_3 appartenant à des séries, g_n, g_n', g_n'' , ayant ensemble k'' points communs, G_1 et G_2 , n'en ayant pas d'autres, G_1 et G_3 en ayant k ; G_2 et G_3 k' ; avec la condition $k + k' + 2k'' = r + r' + r''$.

B. d'Orgeval.

Guazzone, Stefano: *Sulle quadriche che appartengono alle forme generali di dato ordine.* Atti. IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 350—353 (1953).

Es wird hier folgendes bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine allgemeine Hyperfläche F_{r-1}^n des Raumes S_r mit $n \geq 4$, eine Quadrik Q_{k-1} des Raumes S_k enthält, ist:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1} \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{k} - \binom{k+2}{2} + 1 \right];$$

für $n = 3$ lautet die Bedingung: $r \geq k - 1 + \frac{1}{k} \binom{k+2}{3}$. Der Beweis ist eine Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Anzahl. Mit derselben Methode könnte man die Bedingung finden dafür, daß F_{r-1}^n eine rationale normale C^l mit $l \geq 1$, enthält; sie lautet $r \geq (ln+5)/(l+1) - 1$ und wird ohne Beweis ausgesprochen.

E. Togliatti.

Gauthier, Luc: *Sulle congruenze d'ordine uno di rette di S_4 la cui focale propria è irriducibile.* Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 329—337 (1953).

In einem vierdimensionalen Raume S_4 ist eine Geradenkongruenz gegeben, d. h. ein ∞^3 -Geradensystem derart, daß durch jeden Punkt allgemeiner Lage eine endliche Anzahl r von Geraden des Systems hindurchgehen. Man weiß, daß jede allgemeine Gerade der Kongruenz drei Brennpunkte enthält, d. h. Punkte, wo die betrachtete Gerade eine unendlich benachbarte Gerade des Systems trifft; Ort solcher Brennpunkte ist im allgemeinen eine algebraische Fläche F . Verf. betrachtet hier Geradenkongruenzen 1. Ordnung ($r=1$), unter der Voraussetzung, daß F irreduzibel ist und daß jede allgemeine Gerade der Kongruenz drei getrennte Brennpunkte besitzt. Die Bestimmung aller solcher Kongruenzen ist mit der Bestimmung aller Flächen F , die einen einzigen scheinbaren dreifachen Punkt aufweisen, gleichbedeutend; diese Bestimmung, im Falle einer mit lauter gewöhnlichen Singularitäten versehenen Fläche, hat schon F. Severi im Jahre 1901 erledigt. Unter den allgemeineren Voraussetzungen des Verf. findet man, außer den Lösungen von F. Severi, noch eine weitere Fläche der Ordnung 7. Um sie zu konstruieren, kann man von derjenigen rationalen Fläche F^7 des fünfdimensionalen Raumes ausgehen, die auf einer Ebene durch das Linearsystem aller Kurven 4. Ordnung mit 9 Basispunkten abgebildet wird; die Kurve C^9 , welche durch die neun Basispunkte hindurchgeht, entspricht einer ebenen Kurve der Fläche F^7 ; projiziert man diese aus einem allgemeinen Punkt jener Ebene auf einen Raum S_4 , so erhält man die gewünschte Fläche; sie besitzt eine dreifache Gerade l und ein ∞^2 -System von Raumkurven 4. Ordnung 2. Art (in den durch l hindurchgehenden Räumen S_3), deren dreifachschneidende Geraden die betrachtete Geradenkongruenz bilden. E. Togliatti.

Gallarati, Dionisio: *Sul numero dei complessi algebrici di rette, di ordine assegnato, che contengono una data rigata algebrica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 213—220 (1953).

L'A. dimostra che una superficie algebrica, rigata di S_r , non può appartenere a più di $\frac{1}{m+1} \binom{m+r}{r} \binom{m+r-1}{r-1} = m(r-1) - 1$ complessi algebrici di ordine m , linearmente indipendenti; il massimo è raggiunto, se $m = 1$ dalle rigate razionali normali e dai coni che proiettano da un punto una curva razionale normale; se $m = 1$ dalle rigate razionali normali e da tutti i coni. Questa seconda proprietà è caratteristica per le rigate razionali normali e per i coni. La dimostrazione è di carattere algebrico geometrico. Il risultato ottenuto appare come una estensione di precedenti risultati stabiliti da G. Gherardelli e B. Segre. A. Andreotti.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Bassaly, W. A.: *Applications of group theory to the study of the symmetry properties of tensors.* Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, Nr. 4, 105—116 (1953).

Kurze Beschreibung des bekannten Zusammenhanges zwischen den irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe G_m und der vollen linearen Gruppe L_n ; Zerlegung des Tensorraumes m -ter Stufe über dem n -dimensionalen Vektorraum

in Teilräume von Tensoren mit Symmetrie-Eigenschaften, die für $m = 3$ und $m = 4$ eingehend beschrieben werden. Es wird darauf hingewiesen, daß die Symmetrie der zur Darstellung (2^2) gehörigen Tensoren dem Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zukommt.
H. Boerner.

Laurenti, Fernando: Sur la formule du double produit vectoriel. Enseignement math. 39, 192—194 (1953).

Manarini, Mario: Diadi vettoriali ed applicazioni. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 526 —529 (1953).

Die schon von Jaumann eingeführte, dem Vektorprodukt assoziativ zugeordnete Dyade wird neu entdeckt und nach Aufstellung der zugehörigen Rechenregeln angewendet.
G. Hamel.

Kilmister, C. W.: A note on Milner's E -numbers. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 144—148 (1953).

In two recent papers (this Zbl. 47, 402) Milner has suggested that certain results seem to require an extension of tensor theory. It is shown in this paper that this extension is unnecessary. If A is an algebra and L a linear mapping of A onto A a new composition $a \circ b$ is defined by $L(a b) = L a \circ L b$, which leads to a new algebra A^* with compositions $+$ and \circ . The elements $L b$ and $L b'$ are related by an equivalence relation T^* in A^* if $b \rightarrow b'$ is an equivalence relation T in A . If T is a summed transformation so is T^* . If A is a finite algebra and $L^2 = 1$, then there exists a quadratic form invariant under L . It is shown that all Milner's results can be deduced in this way by quaternion methods. Similar results are obtained for an even Clifford algebra.
J. Haantjes.

Strubecker, Karl: Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation. Elemente Math. 8, 4—13 (1953).

In knapper Form, unterstützt von zahlreichen anschaulichen Figuren, gelingt es dem Verf., eine klare und durchsichtige Einführung in die in der Überschrift genannten schwierigen Gebiete zu geben, die wichtigsten Tatsachen darzulegen und geometrisch-konstruktiv zu begründen. — Erst wird die Studysche Darstellung der ebenen Bewegungen mittels Quaternionen erklärt, dann die kinematische Abbildung von Blaschke-Grünwald und die zugehörige quasielliptische Metrik eingeführt. Der Übergang zur Abbildung von Geraden auf Kasnersche Turbinen ermöglicht die konstruktive Herstellung der Lieschen Berührungstransformation, durch welche die Strahlen eines Gewindes auf die orientierten Kreise einer Ebene abgebildet werden. Die Euklidische Geraden-Kugel-Transformation wird dann (mit einer Realitätsverschiebung) durch zyklographische Deutung der Linienelemente einer Turbine als Bild eines Regulus einer C -Kugel erhalten und somit durch Zusammensetzung der kinematischen Abbildung der Geraden auf Turbinen und der zyklographischen Abbildung dieser auf orientierte Kugeln gewonnen. Zahlreiche geschichtliche Hinweise sowie Literaturangaben vervollständigen diese wertvolle Zusammenfassung.
H. R. Müller.

Truesdell, C.: Generalization of a geometrical theorem of Euler. Commentarii math. Helvet. 27, 233—234 (1953).

Ausgehend von einem Irrtum L. Eulers bei der Ableitung der Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik, der auf der ungerechtfertigten Vernachlässigung infinitesimaler Größen beruht, betrachtet Verf. im n -dimensionalen Raum in Matrizenschreibweise eine stetige Familie von affinen Transformationen (affinen Bewegungen). Das Verhältnis der im Euklidischen Sinne gemessenen Inhalte von Parallellflächen vor und nach der Transformation wird durch die Säkulardeterminante gegeben. Ihre Entwicklung führt zu Invarianten, die im Falle $n = 2, 3$ bereits von Euler richtig angegeben wurden. In dieser Weise werden vom Verf. die Hauptinvarianten (elementarsymmetrische Funktionen der Eigenwerte) einer beliebigen Matrix geometrisch gedeutet.
H. R. Müller.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Krafft, Maximilian: Ein neuer Beweis des Vierecksatzes. Arch. der Math. 4, 43—44 (1953).

Hat die geschlossene konvexe stetig gekrümmte Kurve \mathcal{C} nur zwei Punkte extremer Krümmung (A, B), so gibt es auf \mathcal{C} zwei durch A, B getrennte Punkte Q, Q^* mit gleicher Krümmung und parallelen Tangenten. Dreht man einen der beiden Kurvenbögen Q, Q^* um die Mitte der Sehne Q, Q^* um 180° , so erhält man zwei Kurvenbögen mit denselben Endpunkten und parallelen Tangenten in diesen, von denen die Krümmung des einen stets größer ist als die des anderen. Das ist unmöglich. H. Gericke.

Iha, P.: On curves having a given curve for the locus of the centre of spherical curvature. Math. Student 20, 115—118 (1953).

Zu einer gegebenen Raumkurve C gibt es eine zweiparametrische Schar von Kurven, für welche C der Ort der Mittelpunkte der Schmiegkugeln ist. Aus dieser werden durch Festhalten je eines Parameters Regelflächen und Kanalfächen herausgehoben und einige geometrische Eigenschaften von diesen abgeleitet.

H. Gericke.

Wintner, Aurel: On the infinitesimal geometry of curves. Amer. J. Math. 75, 241—259 (1953).

The classical theory of curves in E_3 assumes that they are of class C^3 , i. e., that the third derivative $x'''(s)$ exists and is continuous. If they are only assumed of class C^2 , the curvature $\kappa = |x''|$ assumed > 0 and the Frenet vectors $u_1 = x'$, $u_2 = \kappa^{-1} x''$, $u_3 = u_1 \times u_2$ are well defined and the torsion may then be defined by $\tau = \det(u_1, u_2, u_3)$ which does not require the existence of x''' . Some theorems of the following type are proved: a) If $\tau(s)$ is continuous and $\kappa(s)$ is of class C^1 , then the curve is of class C^3 ; b) If a curve Γ is of class C^4 and is free of spherical points, then the locus of the centers of the osculating spheres of Γ is a curve of class C^2 possessing a non-vanishing continuous curvature and a non-vanishing continuous torsion. Theorems of this type are applied to the obtainment of certain interesting refinements of classical theorems on spherical curves and on the surfaces of center of given surfaces.

L. A. Santaló.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On asymptotic parametrizations. Amer. J. Math. 75, 488—496 (1953).

Let $X = X(u^1, u^2)$ be a parametrization of class C^m (called a C^m -parametrization) of the surface S of gaussian curvature $K < 0$. If the curves $u^j = \text{constant}$ are asymptotic curves of S , then $X = X(u^1, u^2)$ is called an asymptotic parametrization. The paper deals with relations between the order of general and asymptotic parametrizations. The authors showed elsewhere that if S possesses an asymptotic C^n -parametrization, where $n \geq 2$, then it possesses C^{n-1} -parametrizations. Here is proved by an example that the straightforward converse is not true, that is: if S possesses a C^2 -parametrization, it need not possess any asymptotic C^1 -parametrization. However the following more restrictive converses hold: a) If S possesses a C^m -parametrization, where $m \geq 3$, then it possesses asymptotic C^{m-2} -parametrizations; b) If S possesses a C^m -parametrization, where $m \geq 2$, and if the curvature $K (< 0)$ is a function of class C^{m-1} in this parametrization, then S possess asymptotic C^{m-1} -parametrizations.

L. A. Santaló.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the third fundamental form of a surface. Amer. J. Math. 75, 298—334 (1953).

Some refinements of classical theorems about the spherical representation of surfaces. If the quadratic form $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2$) is positive definite (on a domain D) and the functions g_{ij} are of class $C^{(n)}$, the form will be referred as a $C^{(n)}$ -metric. A set S of points in the euclidean 3-space is called a surface of class $C^{(n)}$ if there exist some (u, v) -domain D and

some vector function $X(u, v)$ of class $C^{(n)}$ on D such that $X_u \wedge X_v \neq 0$ and $X = X(u, v)$ is a one to one mapping of D onto S . The vector function $X = X(u, v)$ is said to be a $C^{(n)}$ -parametrization of S . Part I reminds that the „total“ Gaussian curvature $\tau(E)$ of a domain E on a surface with a C' -metric can be defined as the oriented variation of the direction of a vector transported parallel to itself along the boundary of the domain. Then, from $\tau(E) = \iint K g \, du \, dv$, the gaussian curvature K may be defined. With this generalized definition, if $K = \text{const.}$, the standard analytic form ds^2 holds good. Part II and III deal with different parametrizations of a given surface and the corresponding classes of the three fundamental forms; in particular some theorems are given in order to remove from the Codazzi equations belonging to the third fundamental form unnecessary assumptions of differentiability which are implicit in the standard treatment of the problem. Part IV analyzes the class of the supporting functions for special parametrizations of S . Part V and VI concern with the problem of existence of surfaces with a given third fundamental form and a needed existence theorem for solutions of an elliptic partial differential equation. Part VII proves the existence (locally) of an unique geodesic for arbitrary initial conditions if the metric is of class C' and the curvature K (as defined in Part I) is bounded. An appendix contains a refinement of a noteworthy uniqueness theorem on closed convex surfaces due to Aleksandrov and Pogorelov (this Zbl. 30, 414). *L. A. Santaló.*

Tuganov, N. G.: Über die Kongruenz der Dupinschen Indicatrizen einer Fläche. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 217—220 (1953) [Russisch].

Eine Linie heißt Zentrumlinie der Fläche, wenn die Indicatrizen von Dupin in den Punkten dieser Linie eine Einhüllende gestatten. Die Einhüllende heißt dann Fokallinie. Es gibt drei Zentrumlinien durch jeden Punkt der Fläche. Jeder Zentrumlinie entsprechen zwei Fokallinien. Verf. leitet die Gleichung der Zentrumlinie im allgemeinen Falle ab und betrachtet dann die Zentrumlinien auf einigen bekannten Flächen. Dann setzt er einige Eigenschaften der Zentrumlinien voraus und untersucht die entsprechenden Klassen der Flächen. Verf. gibt auch einige Eigenschaften der Fokallinien und der von ihnen gebildeten Fokallflächen. Am Ende wird die Beziehung zur Kongruenzentheorie erklärt. *W. Wrona.*

Berezina, L. Ja.: Einige Eigenschaften der Evolutenflächen. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 3 (55), 109—110 (1953) [Russisch].

Soit une surface Σ et le trièdre T formé par les tangentes principales de Σ et la normale à Σ : on a

$$(1) \quad \omega_1 = R_1 \omega_{13}, \quad \omega_2 = R_2 \omega_{23}, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_{12} = (R_1/\varrho_{1g}) \omega_{13} + (R_2/\varrho_{2g}) \omega_{23},$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbure principaux de Σ et $(1/\varrho_{1g}), (1/\varrho_{2g})$ les courbures géodésiques des lignes de courbure. Aux centres de courbure de Σ construisons les trièdres auxiliaires T_1, T_2 dont les premières arêtes sont la normale à Σ et les autres normales aux développées Σ_1, Σ_2 . Les composantes du déplacement des tétraèdres $T_1 (\omega_\alpha^1, \omega_\beta^1)$ et $T_2 (\omega_\alpha^2, \omega_\beta^2)$ s'expriment au moyen de celles de T par les relations

$$(2) \quad \omega_1^1 = dR_1, \quad \omega_2^1 = (R_1 - R_2) \omega_{23}, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_{12}^1 = \omega_{23}, \quad \omega_{13}^1 = -\omega_{13}, \quad \omega_{22}^1 = \omega_{13},$$

$$(3) \quad \omega_1^2 = dR_2, \quad \omega_2^2 = (R_1 - R_2) \omega_{13}, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_{12}^2 = -\omega_{13}, \quad \omega_{13}^2 = -\omega_{23}, \quad \omega_{23}^2 = \omega_{12}$$

Entre les trièdres T_1, T_2 ont lieu

$$(4) \quad \omega_i^i = a^i \omega_{13}^i + b^i \omega_{23}^i \quad (i = 1, 2).$$

$$(5) \quad a^i = \frac{1}{2} (R_2^i - R_1^i) \sin 2\beta_i = [(k_1^i - k_2^i)/2 K_i] \sin 2\beta_i, \quad b^i = R_1^i \sin^2 \beta_i + R_2^i \cos^2 \beta_i = k_2^i/K_i.$$

R_1^i, R_2^i rayons de courbure principaux de Σ_i ; β_i , angle de la normale à Σ avec les lignes de courbure de (Σ_i) ; k_1^i, k_2^i courbures principales de Σ_i ; K_i courbure de la section normale de Σ_i tangente à la normale de Σ ; K_i courbure gaussienne de Σ_i . Des relations (1), (2), (3), (4) on déduit

$$(6) \quad a^1/b^1 = (R_1 - R_2)/b^2 = R_1/\varrho_{1g}, \quad a^2/b^2 = (R_1 - R_2)/b^1 = R_2/\varrho_{2g}.$$

En utilisant $R_i/\varrho_{ig} = \text{tg } \psi_i$ ($i = 1, 2$), où ψ_i est l'angle de la normale à la ligne de courbure de (Σ) avec le plan tangent de (Σ) , nous obtenons les relations indépendantes

$$(k_1^1 - k_2^1)/\text{tg } \psi_1 = 2k_1^1/\sin 2\beta_1, \quad (k_1^2 - k_2^2)/\text{tg } \psi_2 = 2k_2^2/\sin 2\beta_2,$$

$$k_1^1/K_1 = (R_1 - R_2)/\text{tg } \psi_2, \quad k_2^2/K_2 = (R_1 - R_2)/\text{tg } \psi_1, \quad \text{et par suite}$$

$$\sin 2\beta_1 \sin 2\beta_2 = 4(R_1 - R_2)^2/(R_1^1 - R_2^1)(R_1^2 - R_2^2),$$

$$(R_2^1 - R_1^1) \sin 2\beta_1 = 2(R_1 - R_2) \text{tg } \psi_1 \cotg \psi_2, \quad (R_2^2 - R_1^2) \sin 2\beta_2 = 2(R_1 - R_2) \text{tg } \psi_2 \cotg \psi_1.$$

B. Gambier.

Pan, T. K.: The spherical curvature of a hypersurface in Euclidian space. Pacific J. Math. 3, 461—466 (1953).

The author relates his concept of normal curvature of a vector field (this Zbl. 47, 404) with some properties of the spherical curvature of a hypersurface in euclidean

space. The case of surfaces in ordinary space, for which spherical curvature = Gaussian curvature, is considered in detail. The theorems proved are of the following type: a) The spherical curvature at a point P is equal to the product of the extreme principal curvatures of vector-fields at P ; b) For surfaces, one m -th of the sum of the squares of the principal curvatures of $m - 2$ vector-fields at P , such that the angle of two adjoining vectors of these fields is $2\pi/m$, is equal to a half of the square of the mean curvature minus the Gaussian curvature at P . L. A. Santaló.

Jonas, Hans: Bestimmung von Flächenklassen auf Grund geforderter Biegeigenschaften. Math. Nachr. 9, 307—320 (1953).

Zu einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ erhält man zwei weitere Orthogonalflächen als Enveloppen von Kugeln mit dem Radius $R(u, v)$ und dem Mittelpunkt \mathfrak{x} . Diese sind biegungsinvariant mit der Fläche \mathfrak{x} verbunden. Gefragt wird nach dem Linienelement von \mathfrak{x} , so daß bei allen Verbiegungen den Asymptotenlinien auf \mathfrak{x} ein konjugiertes Netz auf den Orthogonalflächen entspricht. Dazu muß R der sog. ersten und zweiten Biegunsgleichung genügen. Bei Verwendung geeigneter Parameter gehen diese in eine Liouvillesche Differentialgleichung für R über. Da deren allgemeines Integral bekannt ist, gelingt so eine integrale Darstellung des Linienelementes, die Verf. noch auf einem zweiten Wege herleitet. Es ergibt sich die Metrik der von Calo angegebenen isometrischen Flächenpaare, für die somit die charakteristische Eigenschaft gefunden ist: Rollt die eine Fläche des Caloschen Paares auf einer beliebigen Biegefläche, so entspricht den Asymptotenlinien der Biegefläche stets ein konjugiertes Netz auf der vom bewegten Nullpunkt erzeugten Rollfläche. — Im zweiten Teil bestimmt Verf. Flächen, für die eine bei Verbiegungen gekoppelte Strahlenkongruenz existiert, auf deren sphärischem Bild den Asymptotenlinien ein Orthogonalnetz entspricht. Die Flächen sind durch $z = \operatorname{Re} f(x + iy)$ charakterisiert. — Die Arbeit schließt mit einem Satz über Normalenkongruenzen in einem 4-gliedrigen Bäcklund-Zyklus. Joachim Nitsche.

Grottemeyer, Karl-Peter: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. der Math. 4, 52—60 (1953).

„Halbeiflächen“ sind ebenrandige einfach zusammenhängende konvexe Flächenstücke mit einem Großkreis als sphärischem Bild des Randes. Am Rande gilt: Normalkrümmung $b = \pm$ Krümmung k , geodätische Torsion $a =$ Torsion $\alpha =$ geodätische Krümmung $c = 0$. — Für infinitesimale Verbiegung wird eine Integralformel des Ref. benutzt und die neue Formel $\oint (v \, du \, c) = 2 \iint (\alpha \, d - \beta \, \gamma) (\xi \, e) \, d\sigma$ ($e =$ konst. Vektor). Sie lassen sich so umformen, daß im Randintegral $\delta b = \pm \delta k$ bzw. $\delta a = -\delta \alpha$ auftritt, während die Integranden der Doppelintegrale gleiche Vorzeichen haben. Daraus folgt: Infinitesimale Verbiegung ist unmöglich, wenn die Normalkrümmung (Krümmung) bzw. die geodätische Torsion (Torsion) am Rande stationär bleiben soll. — Der analoge Satz für isometrische Abbildung wird mit der bekannten Integralformel des Verf. bewiesen. Hier läßt sich das Randintegral in der Form $\oint (b^* - b) \, ds = \oint (k - k^*) \, ds$ schreiben. Ist $\alpha = \alpha^* = 0$, so gilt bekanntlich $\oint k \, ds = \oint k^* \, ds = 2\pi$. — In obiger Formel tritt nach der Umformung als zweiter Faktor die Weingartensche Funktion auf. Wenn sie also am Rande verschwindet, ist auch die zugehörige infinitesimale Verbiegung der Halbeifläche trivial. E. Rembs.

Grottemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschaftengrenze ist. Math. Z. 58, 272—280 (1953).

Den Satz des Ref., daß eine konvexe Kalotte, deren Rand Eigenschaftengrenze (bei Parallelbeleuchtung) ist, nicht mit Erhaltung dieser Eigenschaft infinitesimal verbogen werden kann, beweist Verf. mit seinem vektoriellen Integralsatz für infinitesimale Verbiegung, den er mit dem Einheitsvektor der Lichtrichtung multipliziert. Im vorliegenden Fall kann er das Randintegral so umformen, daß der Faktor $\delta(a \, b)$ im Integranden auftritt ($a =$ geodätische Torsion, $b =$ Normalkrümmung am Rand). Aber das verschwindet, weil hier die geodätische Krümmung $c = -d \{\arctan(a/b)\} / ds$ ist und c invariant bleibt. Auch mit der Nebenbedingung, daß die Bogenlänge des sphärischen Bildes stationär bleibt, besteht Starrheit der Flächen. Benutzt wird eine Integralformel des Ref., deren Randintegral hier so umgeformt wird, daß im Integrand der Faktor $\delta |\xi'|$ erscheint. — Für das Analogon des ersten Satzes bei endlicher Verbiegung wird des Verf. diesbezüglicher vektorieller Integralsatz mit dem Einheitsvektor der Lichtrichtung multipliziert. Der Nachweis, daß auch hier das Randintegral verschwindet, macht etwas umfänglichere Überlegungen erforderlich. Das Verfahren bewährt sich auch noch

für konvexe Flächen mit 2 parallelen Rändern, von denen einer Eigenschaftengrenze ist, während längs des anderen die Flächennormalen parallel sind. — Es sei noch auf eine als „Gesamtmaß der Verbiegbarkeit“ bezeichnete Größe hingewiesen, die auch schon in früheren Arbeiten des Verf. auftritt.

E. Rembs.

Pozniak, E. G.: Unendlich kleine Verbiegungen von Rinnen. Mat. Sbornik, n. Ser. **32 (74)**, 681—692 (1953) [Russisch].

Ausgestaltung der Arbeit des Verf. dies. Zbl. **43**, 160. Die Beweise sind durchgeführt. Zwei Figuren dienen der Erläuterung. Die Zylinder der vieleckigen Rinne brauchen nicht eine allen gemeinsame Tangentialebene zu besitzen, wie man nach der Beschaffenheit der vom Ref. betrachteten glatten Rinnen hätte annehmen können. Die eine Figur gibt überdies ein Beispiel einer „bedingt“ unstarren Rinne. Auf ihr existiert ein eindeutiges nichttriviales Geschwindigkeitsfeld \mathfrak{g} , obwohl die Winkel an den Kanten der Rinne stationär sind, was bedeutet, daß auch das Drehfeld η eindeutig ist. Die Bemerkung über die Verbiegbarkeit von Rinnen, die sich ins Unendliche erstrecken, wurde weggelassen, vielleicht weil die früher gestellte Forderung, η solle auf solch einer Rinne beschränkt sein, jetzt als unberechtigt angesehen wird.

E. Rembs.

Dalla Volta, Vittorio: Sulle calotte deformabili di ipersuperficie in uno spazio euclideo. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. **2**, 313—316 (1953).

Bei der „Deformierbarkeit“ handelt es sich um die Frage nach der Existenz von Hyperflächen, die zu einer gegebenen V_n des S_{n+1} isometrisch sind. Man weiß, daß eine deformierbare V_n Ort von $\infty^2 S_{n-2}$ ist, längs deren jeweils die Tangentialhyperebenen fest sind. Hier werden insbesondere deformierbare „Kalotten“ einer gewissen „Ordnung“ $l-1$ behandelt, die „von der Ordnung l deformierbar“ sind. Man sieht leicht, daß man sich auf diesen Fall beschränken kann. Ziel des Verf. ist die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen. Es ergibt sich, daß diese Bedingungen wie die obige trotz des metrischen Charakters des Problems projektiver Art sind. Verf. hat die Fälle $l \leq 5$ untersucht. Die Fragen der Deformierbarkeit 1. und 2. Ordnung bieten keine Schwierigkeit. Im Falle $l=3$ werden die Bedingungen angegeben und die Eigenschaften der V_n^3 formuliert, die eine von 3. Ordnung deformierbare Kalotte enthalten. Für $l=4$ werden alle Bedingungen nur im Falle der Hyperflächen des S_4 genannt; sie sind schon etwas verwickelt. Für die S_{n+1} mit $n > 3$ und $l=4$ endlich beschränkt sich Verf. auf einige das Problem nicht erschöpfende Bemerkungen. Weitere Ausführungen und die Beweise sind einer späteren Arbeit vorbehalten.

E. Rembs.

Pylarinos, O.: Sur une classe particulière de géodésiques des surfaces réglées W . Bull. Sci. Math., II. Ser. **77**, 63—72 (1953).

Verf. bezeichnet als geodätische W -Kurve eine geodätische Linie einer W -Fläche, längs der die beiden Hauptkrümmungen und damit die mittlere Krümmung und das Gaußsche Krümmungsmaß fest sind. Für geradlinige W -Flächen wird die Frage untersucht, wie viele solche geodätische W -Linien höchstens auftreten können. Verf. zeigt: Für eine windschiefe (nicht abwickelbare) W -Fläche, d. h. für ein Drehhyperboloid oder eine Regelschraubfläche [Beltrami, Ann. Mat. pura appl. (1) **7**, 148 (1865)] gibt es nur eine einzige solche Kurve. Eine W -Torse, die kein Drehzylinder ist, kann nicht mehr als zwei geodätische W -Linien besitzen. Krümmung κ und Torsion τ einer (beliebigen) geodätischen Linie auf einer W -Torse, die zwei geodätische W -Linien zuläßt, sind an eine Beziehung der Form $f(\kappa, \tau/\kappa) = 0$ gebunden. Diese Beziehung ist algebraisch, wenn das Verhältnis der festen mittleren Flächenkrümmungen längs ihrer beiden geodätischen W -Kurven rational ist. (Bemerkung des Ref.: Dem Verf. scheint entgangen zu sein, daß eine windschiefe offene Regelschraubfläche, bei der also die Erzeugenden die Schraubachse nicht schneiden, überhaupt keine reelle geodätische W -Linie besitzt.)

H. R. Müller.

Biran, Lutfi: Généralisation de deux formules de J. Liouville. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **18**, 109—115 (1953).

Im Anschluß an die (von W. Blaschke eingeführte) Auffassung der Differentialgeometrie der Linienkongruenzen als Theorie der Membranen einer dualen Kugel werden zwei bekannte Formeln von Liouville, die geodätische Krümmung einer Flächenkurve und die Gaußsche Krümmung einer Fläche betreffend, auf Linienkongruenzen übertragen.

K. Strubecker.

Kovancov, N. I.: Das triorthogonale Liniensystem eines Geradenkomplexes.
Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 125-128 (1953) [Russisch].

La notion de centre du rayon d'un complexe est féconde en applications métriques; le centre A est le point où le plan tangent au cône du complexe (de sommet A) le long du rayon est perpendiculaire au plan tangent au cylindre du complexe correspondant à ce rayon. La normale au plan tangent du cône porte le nom de normale principale; la normale au plan tangent du cylindre porte le nom de binormale. A étant le centre du rayon, I_1 le vecteur unitaire de la normale principale, I_2 celui de la binormale, I_3 celui du rayon, les transformations infiniment petites du trièdre mobile sont représentées par les équations $dA = \omega_1 I_1$, $dI_i = \omega_{ik} I_k$ ($\omega_{ik} = -\omega_{ki}$, $i = 1, 2, 3$) avec $\omega_2 = a \omega_{31}$. La différentiation extérieure fournit

$$\omega_{12} = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_{31} + x_3 \omega_{32}, \quad da = x_2 \omega_1 + x_4 \omega_{31} + x_5 \omega_{32}$$

$$\omega_3 = (a x_1 - x_3) \omega_1 + (a x_2 - x_5) \omega_{31} + (a x_3 - x_6) \omega_{32}.$$

avec
Le rayon du complexe est tangent à une courbe gauche si $dA = \omega_3 I_3$, c'est-à-dire si $\omega_1 = \omega_2 = 0$, ce qui montre qu'un complexe arbitraire (cas de dégénérescence exclus) est en général formé de tangentes à une famille de courbes à deux paramètres, dites courbes centrales. Les vecteurs I_1, I_2, I_3 décrivent des complexes B_1, B_2, B_3 (ce dernier est le complexe donné a priori). B_1 est conjugué à B_3 et contient le centre A du rayon du complexe B_3 , mais A n'est pas en général centre du rayon de B_2 . Les courbes centrales de B_2 forment avec celles de B_1 un système triorthogonal de courbes. La normale principale des lignes centrales du complexe B_1 est aussi la binormale I_2 du complexe B_3 et du complexe B_1 . Les courbes centrales des complexes B_3 et B_1 se stratifient en une famille de surfaces à un paramètre chaque fois que l'on a $\omega_2 = 0$, ce qui n'est possible que pour le complexe $x_1 = 0$, auquel cas chaque cylindre dégénère en plan. Si les courbes centrales du complexe B_3 et, en même temps, les courbes binormales se stratifient en une famille de surfaces à un paramètre, l'équation différentielle de ces surfaces sera $\omega_1 = 0$, ce qui, par différentiation extérieure, donne $2a x_3 - x_6 = 0$. Si les courbes centrales et les courbes binormales de B_1 se stratifient en une famille à un paramètre de surfaces, on a $\omega_3 = 0$, et par différentiation extérieure, $a^2 x_1 - x_6 = 0$: les courbes centrales de B_1 sont les asymptotiques de la surface $\omega_3 = 0$; le système triorthogonal de droites du complexe se stratifierait en système triorthogonal de surfaces si l'on avait $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_6 = 0$, ce qui ne peut avoir lieu.

B. Gambier.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Süss, W.: Eine elementare kennzeichnende Eigenschaft des Ellipsoids. Math.-phys. Semesterber. **3**, 57-58 (1953).

Es wird elementar gezeigt, daß die Ellipsoide die einzigen geschlossenen konvexen Flächen sind, deren sämtliche scheinbaren Parallelumrisse Ellipsen sind.

F. Hohenberg.

Muracchini, Luigi: Trasformazioni puntuali fra due spazi a configurazione caratteristica armonica. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **8**, 144-152 (1953).

Considerata una trasformazione puntuale analitica T fra due spazi ordinari S_3, S_3 proiettivi, in una coppia regolare di punti corrispondenti A, A , in generale non esistono calotte piane del 2° ordine di centri A, A corrispondenti in T . In casi particolari siffatte calotte possono esistere e i loro piani sono chiamati piani caratteristici. I piani caratteristici, quando esistono in numero finito, sono 6 al più. E quando i piani caratteristici sono 6 essi sono i piani proiettanti da A (da A) i lati di un quadrangolo piano completo; le sette rette caratteristiche per A (per A) sono allora le rette proiettanti da A (da A) i vertici e i punti diagonali del quadrangolo; si ha cioè quella configurazione delle rette caratteristiche che l'A. chiama armonica. L'A. studia le trasformazioni che, nella generica coppia di punti corrispondenti, presentano appunto la configurazione caratteristica armonica. Si dimostra che i piani caratteristici inviluppano necessariamente superficie (superficie caratteristiche). Vi sono dunque 6 sistemi ∞^1 di superficie caratteristiche. Con tali 6 sistemi si possono formare tre 4-tessuti di superficie a configurazione ottaedrale. Le trasformazioni in discorso dipendono da 12 funzioni arbitrarie di una variabile. Si considerano poi casi in cui le superficie caratteristiche sono piani. L'A. dimostra che: se una delle 6 famiglie di superficie caratteristiche è di piani, tali piani stanno necessariamente in un fascio. Si considerano anche i casi in cui 3 o 4 delle 6 famiglie di superficie sono famiglie di piani. Se 5 famiglie di superficie sono famiglie di piani anche la sesta è una famiglia di piani. L'A. determina le trasformazioni per cui tutte le 6 famiglie sono di piani. Esse sono una delle due seguenti:

$$\bar{x} = x^n, \bar{y} = y^n, \bar{z} = z^n \quad (n = \text{cost.}); \quad \bar{x} = e^x, \bar{y} = e^y, \bar{z} = e^z$$

(x, y, z coordinate in S_3 e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ coordinate in S_3). Segue: Una trasformazione puntuale fra due spazi ordinari che muti 6 sistemi ∞^1 di piani in piani è necessariamente una omografia

salvo che tutti quei piani appartengano ad una stella o siano sei fasci aventi per assi gli spigoli di un tetraedro. L'A. determina infine le trasformazioni a configurazione caratteristica armonica i cui invarianti sono tutti costanti. Esse dipendono da 4 costanti arbitrarie e le relative superficie caratteristiche sono superficie W di Klein-Lie, mentre le curve caratteristiche sono pure curve W ; le equazioni di tali trasformazioni sono del tipo: $\bar{x} = x^1 y^{m_1} z^{n_1}$, $\bar{y} = x^1 y^{m_2} z^{n_2}$, $\bar{z} = x^1 y^{m_3} z^{n_3}$ (le l_i , m_i , n_i opportune costanti; $i = 1, 2, 3$).

M. Villa.

Ströher, Wolfgang: Zur projektiven Geometrie der Linienelemente fünfter und vierter Ordnung. Monatsh. Math. 57, 19—28 (1953).

Bei einer W -Kurve 2. Art entartet das Fundamentaldreieck, indem 2 Punkte zusammenfallen. Durch ein Linienelement 6. Ordnung ist genau eine solche Kurve festgelegt. Geht man nun von einem Element 5. Ordnung aus, so erhält man ∞^1 W -Kurven 2. Art durch dieses. Die Doppel- und Verzweigungspunkte aller dieser Kurven liegen auf 2 Kegelschnitten, die dem von dem Schmiegekegelschnitt und der doppeltgezählten Tangente bestimmten Hyperoskulationsbüschel angehören. Ein entsprechender Satz ergibt sich für die Doppel- bzw. Verzweigungsgeraden durch duale Übertragung des vorstehenden. — Bei Zugrundelegen eines Linienelementes 4. Ordnung ergibt sich eine zweiparametrische Schar von W -Kurven durch dieses. Sie läßt sich in ∞^1 Scharen von W -Kurven zusammenfassen, so daß alle Kurven einer Schar gemeinsame projektive Normale im Trägerpunkt besitzen. Die Doppel- bzw. Verzweigungspunkte der Kurven einer jeden Schar liegen wieder auf Kegelschnitten. Diese umhüllen gemeinsam den Schmiegekegelschnitt des gegebenen Linienelementes.

J. Nitsche.

Teixidor, J.: Über die Umkehrung des Theorems von Reiss. Arch. der Math. 4, 225—229 (1953).

New elementary proof of the inverse of Reiss theorem (already proved by S. Lie and Fr. Engel): given n curvilinear differential elements in a plane having their origins on a line, if the Reiss condition is satisfied for this line and for those in its neighborhood, the given elements belong to an algebraic curve. E. Bompiani.

Lauffer, Rudolf: Analytische Kurven auf einer Fläche 2. Ordnung. Math. Nachr. 9, 301—306 (1953).

Die Kurve $X = X(\tau)$ verläuft auf einer regulären Quadrik A , wenn $(X|X) \equiv \sum a_{ik} X_i X_k = 0$ mit $|a_{ik}| = 1$. Unter Benutzung eines projektiv invarianten Parameters t , erklärt durch $t'^2 = (X X' X'' X''') (X'|X')^{-2}$, und der normierten Darstellung $Y = \lambda X$ mit $\lambda^2 = (X X' X'' X''') (X'|X')^{-3}$ wird ein (bezüglich A polares) begleitendes Tetraeder konstruiert, dessen Ableitungsgleichungen angegeben werden. Alle projektiven Differentialinvarianten der Kurve lassen sich durch die Invariante $J = (\dot{Y}|\dot{Y})$ und ihre Ableitungen ausdrücken. Die Invariante J wird dann noch unter Zugrundelegung einer Parameterdarstellung der Quadrik A berechnet, bei der die Erzeugenden als Parameterlinien fungieren. Eine Schlussbemerkung bezieht sich auf die durch $J = \text{const}$ gekennzeichneten W -Kurven auf A .

W. Wunderlich.

Wunderlich, Walter: Sur les lignes D des quadriques. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 465—468 (1953).

Bericht über eine frühere Arbeit (s. dies. Zbl. 46, 395).

Godeaux, Lucien: Note sur quelques éléments associés aux points d'une surface. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 14—23 (1953).

Les tangentes asymptotiques d'une surface non réglée se représentent sur la quadrique de Klein-Lie de S^5 par deux points U et V déterminant une suite de Laplace $U_n, \dots, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, \dots, V_n$, dont les points U_1 et V_1 ne sont pas sur la quadrique Q ; on suppose qu'également U_2 et V_2 ne sont pas sur Q . Le plan VV_1V_2 détermine une conique par rapport à laquelle A est pôle de V_1V_2 , de même B est défini par rapport à UU_1U_2 ; la droite AB , polaire dans Q de $U_1U_2V_1V_2$ coupe Q en R_1 et R_2 images des droites r_1 et r_2 arêtes du tétraèdre de Demoulin n'appartenant pas aux quadriques de Lie associées. On peut définir de même une droite $\bar{A}\bar{B}$ qui coïncide avec AB à partir de $V_1V_2V_3$ et $U_1U_2U_3$. En associant les points (A, B) , (\bar{A}, \bar{B}) , à U et V on définit des plans coupant Q selon des coniques images de quadriques liées à la surface de départ se coupant respectivement selon

τ_1, τ_2 et les directrices de Wilczynski de 1^e et de 2^e espèce (celles-ci ayant pour images les sections de Q et de $U_2 V_2$). Les intersections de ces quadriques définissent encore deux droites liées intrinsèquement à la surface. B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface.

Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 156—164 (1953).

(Vgl. auch L. Godeaux, dies. Zbl. 18, 374.) Die Lie-Quadriken einer Fläche des dreidimensionalen projektiven Raumes hüllen neben der Ausgangsfläche im allgemeinen noch vier weitere Flächen ein. Verf. betrachtet den Fall, daß die Asymptotenlinien der Ausgangsfläche denen der Hüllflächen entsprechen. Diese Eigenschaft haben, wie man weiß [vgl. etwa G. Thomsen, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 5, 169—184 (1928)], nur die Projektivminimalflächen und die zweisinnigen Komplexflächen. — Die Schmiegtangenten einer Fläche des R_3 definieren im Geradenraum eine Laplace-Kette, Godeaux-Kette genannt, die zu sich selbst polar ist bezüglich der absoluten Quadrik. Bei den Komplexflächen bricht diese Kette in beiden Richtungen ab. — Verf. betrachtet also die Godeaux-Ketten der Projektivminimalflächen und gewisse in sie eingeschriebene Ketten und berechnet deren Laplace-Invarianten sukzessiv. Einbeschriebene Ketten werden z. B. definiert durch die weiteren Hüllflächen der Lie-Quadriken (O. Mayer, dies. Zbl. 5, 117). Interessant ist weiterhin eine Kette, die den Ebenen dreier aufeinanderfolgender Ecken der Ausgangskette einbeschrieben ist. Kann diese sich mit der Periode vier schließen? [Vgl. hierzu: G. Bol, Math. Z. 59, 97—150 (1953)]. M. Barner.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin.

Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 245—254 (1953).

Die Schmiegtangenten einer Fläche des dreidimensionalen projektiven Raumes R_3 bilden im Geradenraum R_3 zwei Flächen, die Laplacetransformierte voneinander sind. Verf. hat verschiedentlich die Flächen des R_3 mittels dieser Laplace-Kette des R_3 studiert — man spricht deshalb von der Godeaux-Kette einer Fläche (vgl. insbes.: La théorie des surfaces et l'espace réglé, Paris 1934, dies. Zbl. 9, 227). Gibt es Flächen mit geschlossener Godeaux-Kette der Periode acht? Dann ist die Laplace-Kette auch Godeaux-Kette einer zweiten Fläche, der Gegenfläche, und beide Flächen haben das Vierseit von Demoulin gemeinsam. Von diesem Gesichtspunkt aus greift Verf. die Frage nach der Existenz dieser Flächen erneut auf (vgl. dies. Zbl. 7, 425), nachdem von Rozet und Carton ein Beispiel angegeben wurde (Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, Februar 1953). „Im allgemeinen Fall scheint die angewandte Methode auf komplizierte Rechnungen zu führen, und man müßte ohne Zweifel einen anderen Weg finden, das Problem anzugreifen“. Verf. beschränkt sich deshalb auf einen Spezialfall, ohne eine Existenzaussage zu machen. Vgl. auch G. Bol, Arch. der Math. 4, 61—74 (1953); Math. Z. 59, 97—150 (1953). M. Barner.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin.

Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 363—368 (1953).

Deux surfaces ont même quadrilatère de Demoulin lorsque les quadriques de Lie de 2 points homologues se touchent en quatre points caractéristiques pour ces deux quadriques. On peut associer aux asymptotiques d'une surface, 2 points U et V de la quadrique de Klein de S^5 , se correspondant dans une suite de Laplace $U_n^* \dots U_1^*, U, V, V_1, \dots, V_n^* \dots$; si celle-ci a la période 8 les points U_3^* et V_3^* appartiennent à la quadrique de Klein et représentent les asymptotiques d'une surface ayant même quadrilatère de Demoulin; ces conditions sont suffisantes et permettent de déterminer la seconde surface connaissant la première. B. d'Orgeval.

Rogovoj, M. R.: Über die Darboux'schen Büschel für eine anholonome Fläche.

Ukrain. mat. Žurn. 5, 93—98 (1953) [Russisch].

Es ist unmöglich, bei der Konstruktion des Darboux'schen Büschels für eine anholonome Fläche die Methode der Auffindung der Flächen zweiten Grades, welche in engster Berührung mit der Fläche sind, anzuwenden. Es gibt keine solchen Flächen für eine anholonome Fläche. Der Verf. paßt die Methode von Bompiani-Klobouček an und erhält für eine anholonome Fläche zwei Darboux'schen Büschel, die jeder von zwei Asymptotenlinien entsprechen. Für eine holonome Fläche fallen diese Büschel mit dem bekannten Darboux'schen Büschel zusammen. Der Verf. verallgemeinert auch einige mit einer gegebenen Fläche verbundenen Flächen. W. Wrona.

Dalla Volta, Vittorio: Sulle superficie di S_n possedenti un doppio sistema coniugato. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 8, 29—36 (1953).

C. H. Hsiung (dies. Zbl. 44, 180) hatte konjugierte Netze mit gleichen von Null

verschiedenen Laplace-Invarianten einer Fläche im n -dimensionalen Raum ($n \geq 4$) durch die Existenz einer gewissen Schar von Quadriken gekennzeichnet. Dem Verf. gelingt es, diesen Satz auf rein geometrische Weise herzuleiten und dabei eine entsprechende Charakterisierung auch für den Fall ungleicher Laplace-Invarianten zu finden.

W. Haack—H. J. v. Schnakenburg.

Kimpara, Makoto: Sur un analogue du théorème de Gauss-Bonnet en géométrie projective différentielle. J. math. Soc. Japan 5, 70—74 (1953).

Let $x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x$, $x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x$ be the fundamental equations of the projective differential geometry of surfaces and set

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 - \beta \theta_v - \beta_v - 2p_{11}, \quad M = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta_v^2 - \gamma \theta_u - \gamma_u - 2p_{22}, \\ \lambda = -\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} (\log \gamma)_{uu} - \frac{1}{4} (\log \gamma)_u^2, \quad \mu = -\frac{1}{2} M - \frac{1}{2} (\log \beta)_{vv} - \frac{1}{4} (\log \beta)_v^2.$$

The author shows that the exterior differential of the form $\sigma = (\mu/\gamma) du + (\lambda/\beta) dv$ is the form $\Omega = [(\mu/\gamma) (\log \beta^2 \gamma)_v - (\lambda/\beta) (\log \beta \gamma^2)_u] du dv$ and, consequently, that the integral formula $\iint \Omega = \int \sigma$ holds, where the integrals are extended over a simple connected domain and its boundary respectively. Some geometrical characterizations of the forms σ and Ω are given.

L. A. Santaló.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

• **Blumenthal, Leonard M.:** Theory and applications of distance geometry. Oxford: At the Clarendon Press (Geoffrey Cumberlege) 1953. XI, 347 p. 50 s. net.

Seit dem Erscheinen von Mengers Untersuchungen über allgemeine Metrik [Math. Ann. 100, 75—163 (1928)] haben verschiedene Mathematiker auf diesem Gebiet gearbeitet. Das vorliegende Buch ist eine ausführliche Darstellung der bis jetzt erhaltenen Resultate, insbesondere der Theorie der kongruenten Einbettung, das spezielle Gebiet des Verf. Vorkenntnisse der benötigten topologischen Begriffe werden nicht vorausgesetzt (Kap. I). Kap. II handelt über die metrische Strecke. Es enthält einen von Aronszajn herrührenden Beweis eines Satzes von Menger: In einem vollständigen konvexen metrischen Raum existiert für jedes Punktepaar eine dieses Paar verbindende Strecke. Kap. III ist der metrischen Kurventheorie gewidmet. Es werden mehrere mögliche Definitionen gegeben von Länge und Krümmung und einige „differentialgeometrische“ Sätze abgeleitet. — Eine Klasse von metrischen Räumen ist metrisch charakterisiert, wenn die notwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet sind, denen die Metrik eines metrischen Raumes genügen soll, dafür daß dieser Raum kongruent ist mit einem Raum dieser Klasse. Ausführlich behandelt Verf. die Charakterisierung der Klasse der Teilräume eines euklidischen Raumes, wie auch der Teilräume des Hilbertschen, sphärischen, hyperbolischen und elliptischen Raumes. Es zeigt sich, daß jeder metrische Raum mit der Eigenschaft, daß jedes System von $n + 3$ seiner Punkte kongruent in einen E_n (n -dimensionaler euklidischer Raum) eingebettet werden kann, kongruent ist mit einem Teilraum des E_n , d. h. die Kongruenzordnung eines E_n ist $n + 3$. Die damit zusammenhängenden Probleme werden eingehend besprochen. Mit ganz ähnlichen Methoden werden die entsprechenden Theoreme des hyperbolischen Raumes abgeleitet. Ein wenig Neues bringt der sphärische Raum, was auch damit zusammenhängt, daß Diametralpunkte existieren. Ganz verschieden ist aber die Behandlungsweise des elliptischen Raumes (I_n), weil viele geometrische Eigenschaften des I_n ganz verschieden sind von den entsprechenden Eigenschaften des euklidischen Raumes. Bis jetzt hat man zum Beispiel noch keine Methode gefunden zur Bestimmung der Kongruenzordnung des I_n für $n > 2$. Am Ende des Buches findet man einige Anwendungen der geometrisch-metrischen Methode auf die Determinantentheorie, auf die Theorie der linearen Ungleichungen und auf die Verbandstheorie. Das Literaturverzeichnis ist vollständig.

J. Haantjes.

Bing, R. H.: A convex metric with unique segments. Proc. Amer. math. Soc. 4, 167—174 (1953).

Si $D(x, y)$ est une métrique convexe de la courbe continue M , chaque couple de points peut être relié par un arc géodésique (image congruente d'un segment de droite; pour la terminologie v. Bing, ce Zbl. 48, 412). Théorème: Chaque courbe continue M possède une métrique convexe $\mathcal{D}(x, y)$, et un sous-ensemble partout dense W , tels que, si $x, y \in W$, il n'y a qu'un seul arc géodésique d'extrémités x, y . Pour construire $D(x, y)$ en même temps que W , l'A. envisage une suite de partitions $\{G_i\}$ (au sens de Bing), G_{i+1} étant un raffinement convenable de G_i („core refinement“). D s'obtient en assignant des diamètres convenables aux éléments de G_i et en passant à la limite. L'A. mentionne, entre autres, le problème non résolu que voici: Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que chaque arc géodésique soit déterminé par ses extrémités ($W = M$)? M doit être homotope à un point, bien entendu. L'A. donne un

exemple montrant que cette condition n'est pas suffisante. En effet, dans l'exemple cité *M* possède un point, dont les groupes d'homotopie locaux (Hurewicz, ce Zbl. 12, 319) ne sont pas nuls. Or, cette condition est indépendante de la première, et elle est évidemment nécessaire. Notons que des problèmes analogues se présentent dans les travaux de H. Busemann.

I. Fáry.

Thomas, G. H. M.: Simultaneous partitionings of two sets. Trans. Amer. math. Soc. 75, 69—79 (1953).

Let *M* be a compact partitionable set (cf. Bing, this Zbl. 36, 117) and *N* a closed partitionable subset. For every $\varepsilon > 0$ there exists a simultaneous (*S*, ε)-partitioning *G* of *M*, i. e. an ε -partitioning *G* of *M*, such that $\{g_i \subset N\}$ ($g_i \in G$) is a partitioning of *N*, and $g_i, g_j \subset N$ have property *S*. So there exists a sequence $\{G_i\}$ of simultaneous *S*-partitionings of *M* and *N*, such that G_i is a refinement of G_{i-1} of mesh less than $1/i$. There exists furthermore a decreasing sequence of simultaneous core partitionings of *M* and *N*. Two conjectures are stated. *I. Fáry.*

Unger, G.: Maximalstetige Kurven. (Eine neue Charakterisierung der Kneser-Juelschen Bögen.) Elemente Math. 8, 79—85 (1953).

(I) Ein Bogen *K* (d. h. ein eindeutiges stetiges Streckenbild) in der projektiven Ebene heiße dualstetig (kurz: d. st.), wenn *K* erstens in jedem Punkt $P \in K$ (genau) eine stetige Tangente *p* besitzt (*p* ist Limes der Sekanten durch *P* und $Q \in K$ mit $Q \rightarrow P$) und wenn zweitens (dual zu erstens) *P* Limes der Schnittpunkte von *p* mit den Tangenten *q* in $Q \in K$ mit $Q \rightarrow P$ ist. — (II) Ein d. st. Bogen *K* heiße regulär, wenn für jedes $P \in K$ und die Tangente *p* in *P* gilt: (1) Wird *K* aus einem Punkt $A \neq P$ der Ebene projiziert, so trennt die Projektionsgerade *AP* die Geraden *AQ'* und *AQ''*, wobei *Q'* bzw. *Q''* in einer Umgebung von *P* auf *K* vor bzw. hinter *P* liegt, genau dann nicht, wenn *A* auf *p* liegt; (2) (dual zu (1)) die Schnittpunkte der (zu *p* benachbarten) Tangenten *q'* bzw. *q''* in Q' bzw. Q'' mit einer Geraden $a \neq p$ werden auf *a* durch den Schnittpunkt von *p* mit *a* nicht getrennt genau dann, wenn *a* durch *P* geht. (Reguläre Bogen sind lokal konvex.) — (III) Ein d. st. Bogen *K* heiße maximalstetig, wenn die Tangente *p* an *K* in *P* zugleich Paratingente ist (d. h. Limes der Geraden durch beliebige zwei gegen *P* konvergierende Punkte von *K*) und wenn (dual) *P* der Limes der Schnittpunkte zweier beliebiger gegen *p* konvergierender Tangenten ist (d. h. Tangenten in gegen *P* konvergierenden Punkten von *K*). — (IV) Verf. zeigt: Ein dualstetiger Bogen ist regulär genau dann, wenn er maximalstetig ist. *Otto Haupt.*

Unger, Georg: Ein Kriterium für die Kneser-Juelschen Kurven. Arch. der Math. 4, 143—153 (1953).

Cet article s'inspire de l'ouvrage de L. Locher-Ernst, Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven (Basel 1952, ce Zbl. 46, 145). *K* désigne une courbe du plan projectif dalement continue, c'est-à-dire un continu linéaire d'éléments de contact (*Pp*) liés; les éléments de *K* sont classifiés en éléments ordinaires et éléments singuliers (c'est-à-dire inflexionnels ou de rebroussement). Une discussion de la courbe $y = x^2(a - b \sin \log x)$ pour $x \neq 0$, $x = 0$ pour $x = 0$, au voisinage de l'origine, suivant la position de *a*, *b* relativement aux valeurs critiques $1/2$ et 2 , introduit la Déf. 1: (*Pp*) est dit régulier si dans un voisinage de (*Pp*), pour tout point *A* $\neq p$, la droite (*AP*) sépare les points de *K* et si pour toute droite *a* ne contenant pas *P*, le point (*ap*) d'intersection de *a* et *p* fait de même pour les tangentes λK . Th. 1.: Tout élément d'un arc ouvert consistant en éléments ordinaires est régulier. Déf. 2.: *K* est dit simple en petit si chaque (*Pp*) admet sur *K* un voisinage *V* tel que *V* n'ait en commun avec *p* que le point *P* et n'admette que *p* comme tangente passant par *P*. Th. 2.: Si *K* est simple en petit, elle est partout réguliere. Déf. 3.: (*Pp*) est dit maximalelement continu si pour tout suite d'éléments de contact (Q_i, q_i), (R_i, r_i) de *K* convergeant librement vers (*Pp*), le point (q_i, r_i) converge vers *P* et la droite (Q_i, R_i) vers *p*. Th. 3.: Tout segment de *K* maximalelement continu est régulier et inversement. — Par courbe de Kneser-Juel l'A. entend toute courbe *K* (partout) maximalelement continue. Il regarde la notion de continuit maximale comme réalisant l'idée de „continuit complète“ de Juel. A la différence des propriétés de régularité ou de simplicité en petit qui peuvent valoir en un point isolé, la continuit maximale en (*Pp*) l'implique dans un voisinage. L'article termine sur l'exemple d'une courbe *K* qui n'est nulle part maximalelement continue.

Chr. Pauc.

Moore, R. L.: Spirals in the plane. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 207—213 (1953).

Verallgemeinert wird der Begriff der logarithmischen Spirale um ihren Pol, und es werden damit zusammenhängende Sätze gegeben. Es sei J ein Kreis und O ein Punkt auf demselben. Ein bis auf O ganz im Innern von J verlaufender Bogen α_1 mit den Endpunkten O und A heiße um A [mindestens] 1-stufig gewunden, wenn α_1 und die Strecke OA sich kreuzen, [mindestens] n -stufig gewunden, wenn es keine Reihe von Bögen $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}$ gibt derart, daß α_k und α_{k+1} ($1 \leq k \leq n$) sich nicht kreuzen und daß α_{n+1} die Strecke OA nicht kreuzt. Falls α_1 für jedes n um A n -stufig gewunden, so heiße α_1 um A gewunden. Ist OA Teilbogen eines Bogens OB und ist OA um A gewunden, so heiße OB um A gewunden. Ein Teilbogen BC von α_1 , der zwei Punkte B und C der Strecke OA von einer Seite derselben zur anderen verbindet, ohne OA zu treffen, wird Windung genannt, mit deren Hilfe wird dann ein Kriterium dafür gegeben, daß α_1 um A gewunden ist. Der merkwürdigste unter den Sätzen ist der folgende: Gegeben sei eine kompakte, total diskontinuierliche Menge M . Dann gibt es einen Bogen, der um jeden Punkt von M und um keinen anderen Punkt gewunden ist.

H. Terasaka.

Green, John W.: Length and area of a convex curve under affine transformation. Pacific J. Math. 3, 393—402 (1953).

This paper deals first with the problem of finding in the euclidean (cartesian) plane the affine transform of a given convex closed curve K , for which L^2/A (L : perimeter, A : area) is a minimum. The affine transformations considered are $T_{\lambda, \mu}$: $x = e^\lambda x'$, $y = \mu x' + e^{-\lambda} y'$; the parameters λ and μ have to be so determined as to yield the minimum length for $T_{\lambda, \mu}(K)$. K is represented analytically by means of its supporting function $p(\theta)$. K is called an extreme curve if it is solution of the problem, or equivalently, if $(0,0)$ is a minimizing pair. Theorem 1. A necessary and sufficient condition for K to be an extreme curve is the vanishing of the Fourier

coefficients $\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos 2\theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} p(\theta) \sin 2\theta d\theta$. Theorem 2. Each extreme curve with a continuous radius of curvature has at least six vertices. Theorem 3. (stated without proof) Each extreme curve intersects a certain circle of radius $L/2\pi$ at least six times. [Remark by the reviewer. In footnote (2), p. 397, about Theorem 2, the author refers to a paper by W. Blaschke, Christ. Huygens, Internat. Math. Tijdschrift 2, 150—154 (1922—1923), where is found that ellipse K_1 of area equal to that of K , whose mixed area with K is a minimum, without elucidating the relation of Blaschke's problem to his own. In fact they are equivalent. C denoting the unit circumference of the plane, T any area-preserving affine transformation, the euclidean length of $T(K)$ is namely equal to the Minkowskian length of K with respect to the ellipse $T^{-1}(C) = K^*$ used as indicatrix (gauge), which is $= 2A(K, K^*)$, where $A(K, K^*)$ denotes the mixed area of K with K^* (see for instance H. Busemann, this Zbl. 34, 252). The equivalence can also be seen if, instead of the $T_{\lambda, \mu}$, the symmetrical affine transformations with determinant $= 1$ are used for the analytical treatment.] The second half of the paper is concerned with the determination of the extreme curves K_M for which L^2/A reaches its maximum m . Two lemmas on supporting functions of convex closed curves (sub-sine functions of period 2π) are given; the second one enables the deformation of an extreme curve of length 1 onto an extreme curve of the same length but with smaller area. From the impossibility for a K_M to fulfil the requirements of Lemma 2 follows that K_M must be a polygon of five or fewer sides. It is conjectured that K_M is an equilateral triangle (which would imply $m = 12\sqrt{3}$). Chr. Pauc.

Gustin, William: An isoperimetric minimax. Pacific J. Math. 3, 403—405 (1953).

In the preceding paper J. W. Green obtained the upper estimate $48\sqrt{3}$ for m by inscribing in the convex closed curve K a triangle of maximum area and drawing through its vertices lines parallel to the opposite sides. Using the same configuration but refining Green's crude estimate, the present author proves by elementary considerations that $m = 12\sqrt{3}$ and that this maximum is attained only by equilateral triangles.

Chr. Pauc.

Taylor, S. J.: Some simple geometrical extremal problems. Math. Gaz. 37, 188—198 (1953).

Gefragt wird nach den ebenen konvexen Kurven C der festen Länge l , welche kleinsten Flächeninhalt haben, wenn eine der folgenden Nebenbedingungen erfüllt ist: 1) C liege in einer Kreisscheibe H vom Radius r , $4r < l \leq 2\pi r$; die Lösung ist ein bestimmtes Polygon mit Ecken auf dem Rand von H . — 2. C habe festen Durchmesser d ; Lösungen werden nur für Spezialfälle angegeben. — 3. C liege

in einem Reuleux-Dreieck der Breite d , $3d \leq l \leq \pi d$; Lösung ist ein bestimmtes Polygon mit Ecken auf dem Rand des Reuleux-Dreiecks. Ein Hauptpunkt der Beweise ist: In einem Punkt, der nicht auf dem Rand des fraglichen Bereichs liegt, kann die Krümmung von C keinen endlichen Wert $\neq 0$ haben. *H. Gericke.*

Bordoni, Piero Giorgio: Su certe proprietà generali dei raggi di girazione delle figure piane convesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 238–242 (1953).

L'A. introduce dapprima una semplice trasformazione geometrica (detta traslazione generalizzata) tale che applicata ad una figura convessa σ lascia invariata la sua area, il suo momento statico e il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse opportuno τ . Supposto quest'ultimo baricentrale l'A. prova che il rapporto fra il raggio di girazione di σ rispetto a τ e la distanza fra le tangenti al contorno di σ parallele a τ ammette, al variare di σ , un estremo inferiore e un estremo superiore che sono punti di accumulazione e che risultano, rispettivamente, funzione crescente e decrescente della distanza del baricentro dalla retta parallela alle tangenti e che dimezza la striscia da essi limitata. *D. Graffi.*

Rankin, R. A.: A problem concerning three-dimensional convex bodies. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 44–53 (1953).

Es sei K ein konvexer abgeschlossener beschränkter Körper im R_3 mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung O und O als innerem Punkt. Jedem solchen Körper kann bekanntlich eine Distanzfunktion $f(x, y, z)$ zugeordnet werden. Es sei nun $\mu \geq 1$ eine feste reelle Zahl. Für jedes $\lambda \geq 1$ und für jedes Paar von reellen Zahlen p, q sei $K(\lambda, p, q)$ der konvexe Körper $f(x/\lambda, y/\lambda, z - (\lambda - 1)(px + qy)/\lambda) \geq 1$, $K(1, p, q) = K$ für alle p, q . Es sei $\lambda(p, q) = \sup \lambda$ für die $K(\lambda, p, q) \subseteq \mu K$ und $\kappa = \sup \lambda(p, q)$ über alle p, q . Dann wird gezeigt:

$$(1) \quad (1 + 3\mu)/4 \leq \kappa \leq \mu.$$

Weiter wird gezeigt: Es gibt Körper K , für die $\kappa = (1 + 3\mu)/4$ bzw. $\kappa = \mu$ ist, d. h. (1) kann nicht mehr verschärft werden. Geometrisch handelt es sich dabei um folgendes: Es seien L_1, L_2 zwei verschiedene Gerade durch O , so daß die z -Achse (L_3) nicht in der Ebene P liegt, welche durch L_1, L_2 aufgespannt wird. Diese Ebene schreibt sich in obiger Bezeichnungsweise $z = px + qy$. Es wird nun K von O aus dilatiert, so daß in den Richtungen L_1, L_2, L_3 die Vergrößerungen $\lambda, \lambda, 1$ sind. Es wird nun $\lambda(P) = \lambda(p, q) = \sup \lambda$ aller λ betrachtet, für welches $K(\lambda, p, q) = K(\lambda, p)$ in μK liegt, und es wird dann $\lambda(P)$ möglichst groß gewählt, bei Variation von P , d. h. es wird κ betrachtet. Die Bedeutung von (1) beruht hauptsächlich in der Anwendung auf die Anomalie konvexer Körper (s. dies. Zbl. 50, 274), besitzt aber auch selbständiges Interesse. Der Beweis ist sehr kompliziert und ist außerordentlich scharfsinnig durchgeführt.

E. Hlawka.

Ohmann, D.: Ein vollständiges Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz. Commentarii math. Helvet. 27, 151–156 (1953).

Es sei $h(\omega)$ die Stützfunktion eines im konvexen Bereich A enthaltenen konvexen Bereiches B . Wir verschieben alle Stützhalbebenen von A nach außen bzw. innen, und zwar die zur Normalenrichtung ω gehörige um $h(\omega)$. Der Durchschnitt $A + B$, bzw. $A - B$ der verschobenen Halbebenen wird Minkowskische Summe bzw. Differenz von A und B genannt. Es wird gezeigt, daß für die Flächeninhalte F die Ungleichungen $F(A + B) + F(A - B) \geq 2\{F(A) + F(B)\}$ und $4F(A - B)F(A) \leq \{3F(A) + F(B) - F(A + B)\}^2$ bestehen und daß diese mit $F(A - B) \geq 0$, $F(B) \geq 0$, $F(A) + F(A - B)$ alle Ungleichungen erschöpfen, die bei beliebig vorgegebenen konvexen Bereichen $A \supseteq B$ für die vier Flächeninhalte von $A, B, A + B$ und $A - B$ bestehen. *L. Fejes Tóth.*

Bieri, H.: Ein (M, F) -Problem mit Nebenbedingung. Experientia 9, 207–209 (1953).

Verf. spricht die Vermutung aus, daß unter den konvexen Rotationskörpern von fester Länge und von festem Integral der mittleren Krümmung der Kegel die kleinste Oberfläche aufweist, und unterstützt diese Vermutung durch einige Teilergebnisse in dieser Richtung. *L. Fejes Tóth.*

Hadwiger, H.: Zur isoperimetrischen Ungleichung für k -dimensionale konvexe Polyeder. Nagoya math. J. 5, 39–44 (1953).

Für ein eigentliches konvexes Polyeder P des k -dimensionalen euklidischen Raumes R_k gilt die isoperimetrische Ungleichung $(1) F^k/V^{k-1} \geq \omega_k k^k$, in der ω_k das Volumen der k -dimensionalen Einheitskugel, V das Volumen und F die Oberfläche von P bedeuten. Ist n die Anzahl der Seitenflächen von P , dann kann (1) zu $(2) F^k/V^{k-1} \geq n k^{k-1} \chi[k \omega_k/n]$ verschärft werden, wobei $\chi(\sigma) = \omega_{k-1} \operatorname{tg}^{k-1} \tau$ gilt und $\tau = \tau(\sigma)$ durch $\int_0^\tau \sin^{k-2} \lambda \, d\lambda = \frac{\sigma}{(k-1) \omega_{k-1}}$ bestimmt ist. Für $n = 2$ er-

gibt sich aus (2) die klassische Ungleichung für Polygone und für $n = 3$ die Ungleichung von M. Goldberg (vgl. dies. Zbl. 10, 410). (2) kann somit als die gemeinsame Verallgemeinerung der erwähnten Sonderfälle hinsichtlich der Dimensionszahl aufgefaßt werden.

R. Inzinger.

Molnár, J.: **Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise. I.** Publ. math., Debrecen 2, 266—275 (1953).

Sind in einem konvexen sphärischen Gebiet wenigstens drei kongruente nicht übereinandergreifende Kugelkappen eingelagert, so ist die Lagerungsdichte $d < \pi\sqrt{12}$ ($= 0.9069 \dots$). Vermutungsweise wurde dieser Satz von L. Fejes Tóth ausgesprochen. In dem Beweis erledigt Verf. erst Spezialfälle, wo die Anzahl der Kugelkappen klein ist, und behandelt dann den allgemeinen Fall, wo Abschätzungsformeln von L. Fejes Tóth (dies. Zbl. 35, 109) nützlich sind.

I. Fáy.

Erdős, Paul and C. A. Rogers: **The covering of n -dimensional space by spheres.** J. London math. Soc. 28, 287—293 (1953).

Es sei θ_n^* das Infimum der Dichten der Überlagerung des R_n durch Kugeln von gleichem Radius. θ_n sei analog definiert, wo aber verlangt wird, daß die Mittelpunkte der Kugeln ein n -dimensionales Gitter bilden (reguläre Überdeckung). Bambah und Davenport (dies. Zbl. 47, 51) haben gezeigt, daß $\theta_n > 4/3 - \varepsilon_n$ wo $\varepsilon_n \rightarrow 0$ geht für $n \rightarrow \infty$. Die Verf. zeigen nun $\theta_n^* > 16/15 - \varepsilon_n$ ($\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$). Der Beweis dieser Abschätzung benützt die gleiche Methode wie früher. Es werden wieder konvexe Polyeder Π betrachtet, welche den R_n einfach und lückenlos überdecken, und jedes Polyeder ist einer zugehörigen Kugel der Überdeckung eingeschrieben. Dann ist die Anzahl N der Seitenflächen von Π abzuschätzen („es sollen nicht zu viele sein“; dies geht für den regulären Fall leicht, ist hier aber schwieriger). Es wird $N \leq \theta_n^* 4^n - 1$ gezeigt, und dann ist das Volumen von Π im Vergleich zum Volumen der umgeschriebenen Kugeln abzuschätzen. Ist $N = [4^n \theta_n^* - 1]$ und V_N das Volumen der größten Polyeder mit N Seitenflächen, welche in eine Kugel vom Radius 1 eingeschrieben werden, so ist ja $\theta_n^* \geq J_n/V_N$, J_n Volumen der Kugel. Im regulären Fall liegt der Fußpunkt der Lote vom Mittelpunkt der Kugel auf die Seitenflächen von Π stets innerhalb der Seitenfläche. Im allgemeinen Fall ist dies aber nicht so. Hier wird nun folgender Satz von C. A. Rogers benützt. Ist $V(\Pi)$ das Volumen eines konvexen Polyeders von N Seitenflächen in einer Kugel vom Radius 1 und Volumen J_n (im R_n), dann ist

$$\frac{J_n}{V(\Pi)} \geq \int_0^1 (1 - C^\delta (1 - t^\delta))^{-n/2} dt, \quad \delta = \frac{2}{n-1}, \quad C = \frac{n V(\Pi)}{N J_{n-1}}.$$

Streben die n, N gegen ∞ , so daß $N^{1/n}$ gegen einen Limes λ strebt, dann ist $\lim_{J_n} \frac{V(\Pi)}{J_n} \leq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$.

Da der Beweis dieses Satzes von Rogers kompliziert ist, so zeigen die Verf. in der Arbeit die schwächere Abschätzung $J_n/V(\Pi) \geq (1 - C^\delta)^{-1/2}$, $\lim V(\Pi)/J_n \leq (1 - \lambda^{-2})^{1/2}$, welches $\theta_n^* > (16/15)^{1/2} - \varepsilon_n$ heißt.

E. Hlawka.

Topologie:

• Bourbaki, N.: **Éléments de Mathématique. XVI. Première partie: Les structures fondamentales de l'Analyse. Livre III: Topologie générale (Fascicule de résultats).** (Actual. sci. industr. No. 1196.). Paris: Hermann & Cie. 1953. 95 p.

Dieser zusammenfassende Bericht über die im Buch III von Bourbaki's Elementen (s. dies. Zbl. 30, 241; 31, 55; 36, 386) entwickelten Begriffe und Sätze bezweckt ein schnelles Zurechtfinden in den bisher gewonnenen Ergebnissen, wie es für eine ergiebige Behandlung topologischer Probleme nützlich ist. Beweise werden nicht gegeben, jedoch wird gelegentlich auf die betreffenden Stellen im Buch III selbst hingewiesen. Der Gegenstand ist nach folgenden Punkten geordnet:

Topologische Strukturen, Filter und Limiten, uniforme und metrische Räume, Vergleich der Topologien, Trennungssaxiome, stetige und halbstetige Funktionen, Teil-, Produkt- und Zerlegungsräume, kompakte Räume, Zusammenhang, topologische Algebra, unendliche Summen und Produkte, der n -dimensionale Vektorraum, Funktionenräume. Ein ausführliches Sachverzeichnis steht zur Verfügung. (Übrigens liegt dem Bändchen ein Berichtigungsblatt bei, welches verschiedene Teile der Elemente betrifft.

G. Aumann.

Nöbeling, Georg: Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden.

J. reine angew. Math. **191**, 125—134 (1953).

Dieser Artikel vermittelt einen Einblick in das im Drucke befindliche Buch „Analytische Topologie“ vom Verf. Er überträgt die Choquetsche Limitentheorie für Mengenfamilien in einem topologischen Raum (dies. Zbl. **31**, 281) auf topologische Vereine und Verbände. Die angewandte Technik, um ohne Punkte und — wenigstens zuerst — ohne die üblichen Mengenoperationen auszukommen, ist bei der folgenden Grunddefinition ersichtlich. I bezeichnet eine Indexmenge, \mathfrak{A} einen Raster (Filterbasis) in I , \mathfrak{G} das System aller Teilmengen G von I mit der Eigenschaft, daß für jede Menge $R \in \mathfrak{A}$ der Durchschnitt $G \cap R$ nicht leer ist. Ein Soma A aus dem topologischen Verein \mathfrak{A} heiße der Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch den Raster \mathfrak{A} adjungiert (oder adjärent) bzw. stark adjungiert (oder stark adjärent), wenn gilt: Ist S ein Soma aus \mathfrak{A} derart, daß $A_i \leq S$ gilt für alle Elemente i mindestens einer Menge $R \in \mathfrak{A}$ bzw. $G \in \mathfrak{G}$, so gilt $A \leq S$. Existiert in \mathfrak{A} die Vereinigung aller der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch \mathfrak{A} adjungierten bzw. stark adjungierten Somen, dann wird diese Vereinigung mit $\limsup_{\mathfrak{A}} A_i$ bzw. $\liminf_{\mathfrak{A}} A_i$ bezeichnet. Ist \mathfrak{A} ein Vollverband und setzt man für eine beliebige Teilmenge M von I $V_M = \bigvee_{i \in M} A_i$, dann gelten $\limsup_{\mathfrak{A}} A_i = \bigwedge_{R \in \mathfrak{A}} \bar{V}_R$, $\liminf_{\mathfrak{A}} A_i = \bigwedge_{G \in \mathfrak{G}} \bar{V}_G$. Zahlreiche

Sätze aus der Limitentheorie für Mengen werden unmittelbar oder leicht übertragen. Besonders aufschlußreich sind die Formulierungen und Beweise der Sätze (6) und (19), die eine für eine Mengenfamilie durch Verfeinerung des Rasters gewonnene Konvergenzeigenschaft aussagen.

Satz 6. \mathfrak{A} sei ein distributiver, \vee -topologischer (d. h. $A_1 \vee A_2 = \bar{A}_1 \vee \bar{A}_2$) Verband. Es sei P ein Atom in \mathfrak{A} , welches der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch \mathfrak{A} adjungiert ist. Dann existiert in I ein Raster \mathfrak{A}^* , der mindestens so fein ist wie \mathfrak{A} und durch welchen P der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ sogar stark adjungiert ist. Satz 19. \mathfrak{A} sei ein Vollverband und besitze eine abzählbare (Hüllen-)Basis. Dann enthält jede Folge von Somen aus \mathfrak{A} eine konvergente (d. h. $\limsup = \liminf$) Teilfolge. Merkwürdig ist Satz 18. \mathfrak{A} sei ein Vollverband, \mathfrak{A} ein Ultrafilter in I , dann gilt immer $\limsup_{\mathfrak{A}} A_i = \liminf_{\mathfrak{A}} A_i$.

Chr. Pauc.

Areškin, G. Ja.: Freie distributive Verbände und freie bikompakte T_0 -Räume.

Mat. Sbornik, n. Ser. **33** (75), 133—156 (1953) [Russisch].

Bekanntlich bestimmt jeder distributive Verband L mit einem kleinsten Element λ und größten Element θ eindeutig einen bikompakten T_0 -Raum $T_0(L)$ (nämlich den Raum aller Prim- α -Ideale von L). Verf. untersucht den Fall, daß L ein freier distributiver Verband $CD_0(\tau; \lambda, \theta)$ mit einem Erzeugendensystem von der Mächtigkeit τ und mit hinzugefügten Elementen λ und θ ist. Der zugehörige bikompakte T_0 -Raum $CT_0(\tau)$ wird als freier bikompakter T_0 -Raum bezeichnet. Zunächst wird die Struktur des freien distributiven Verbandes $CD_0(\tau; \lambda, \theta)$ untersucht und bewiesen, daß $CD_0(\tau; \lambda, \theta)$ isomorph ist zum Ring aller endliche- J -abgeschlossenen Untermengen des Verbandes aller endlichen Untermengen einer Menge M von der Mächtigkeit τ . Dabei heißt eine Teilmenge einer teilweis-geordneten Menge endlich- J -abgeschlossen, wenn sie J -Hülle einer endlichen Teilmenge ist. Dies Ergebnis ist für endliche τ bekannt, für unendliche τ liefert es die Lösung des Problems 68 von G. Birkhoff (Lattice Theory, 2. Aufl., New York 1948, dies. Zbl. **33**, 101). Für den Raum $CT_0(\tau)$ ergibt sich hieraus zunächst, daß sein „genaues Gewicht“ gleich τ ist. Das „genaue Gewicht“ eines Raumes R ist die kleinste Mächtigkeit τ , für welche ein System von der Mächtigkeit τ nicht-leerer, von R verschiedener abgeschlossener Mengen existiert, die zusammen mit der leeren Menge und R eine abgeschlossene Basis von R erzeugen. Weiter wird bewiesen, daß ein T_0 -Raum X dann und nur dann in den Raum $T_0(L)$ topologisch eingebettet werden kann, wenn ein Homomorphismus des Verbandes L auf einen Verband des Raumes X existiert. Hieraus folgt wegen der Freiheit von $CD_0(\tau; \lambda, \theta)$ sofort, daß $CT_0(\tau)$ universal ist für die Klasse aller T_0 -Räume von einem genauen Gewicht $\leq \tau$. Schließlich wird gezeigt, daß $CT_0(\tau)$ homöomorph ist zu dem von P. S. Alexandroff [Uspechi mat. Nauk **2**, Nr. 1, 5—57 (1947)] konstruierten universalen Raum F_τ .

E. Burger.

Papić, Pavle: Sur les espaces admettant une base ramifiée de voisinages. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **8**, 30—40 und franz. Zusammenfassung, 41—43 [Serbo-Kroatisch].

Démonstration des propositions 1—9 d'une Note antérieure de l'A. (ce Zbl. **50**, 167) et de coïncidence dans les espaces considérées: de la séparabilité et de la séparabilité parfaite d'une part, de compacité et de la bicompatibilité de l'autre.

G. Kurepa.

Ramm, N. S. und A. S. Švare: Geometrie der Nachbarschaft, uniforme Geometrie und Topologie. Mat. Sbornik, n. Ser. 33 (75), 157–180 (1952) [Russisch].

Der Zusammenhang zwischen den δ -Räumen (infinitesimalen Räumen, Nachbarschaftsräumen) von Efremovič und den Weilschen uniformen Räumen ist von Smirnov (dies. Zbl. 47, 419) ausführlich untersucht worden. Verff. zeigen zunächst an einem Beispiel, daß ein δ -Raum tatsächlich mehrere uniforme Strukturen besitzen kann. Weiter werden die hauptsächlichen Ergebnisse der obengenannten Arbeit von Smirnow mit neuen und einfacheren Beweisen versehen. Dabei wird der Satz, daß für einen metrisierbaren δ -Raum die durch eine Metrik erzeugte uniforme Struktur maximal ist, verallgemeinert auf eine gewisse Klasse von uniformen Strukturen und zum Beweis eines Metrisationssatzes für δ -Räume benutzt (vgl. hierzu auch Efremovič und Švare, dies. Zbl. 50, 170). Ferner wird ein Metrisationssatz für den maximalen δ -Raum zu einem gegebenen topologischen Raum bewiesen. Weiter werden die gegenseitigen Beziehungen zwischen analogen topologischen, infinitesimalen und uniformen Begriffen wie Stetigkeit, Zusammenhang, Gewicht usw. untersucht. Z. B. ist eine infinitesimal-stetige Abbildung eines δ -Raumes R in einen δ -Raum R' gleichmäßig-stetig bezüglich der minimalen zu R' gehörigen und einer beliebigen zu R gehörigen uniformen Struktur. Schließlich wird gezeigt, daß die systematische Verwendung infinitesimaler Begriffe die Beweise der Sätze über die Bikompaktifizierung topologischer Räume vereinfacht.

E. Burger.

Dickinson, Alice: Compactness conditions and uniform structures. Amer. J. Math. 75, 224–228 (1953).

In this note the author calls „crude“ the element of all the uniform structures on a locally compact space which is less fine than all the others. It is shown that the uniform structure induced in such a space by the unique uniform structure of its compactified extension (compactification by adjunction of one point) is the crude uniform structure of it. A converse of this theorem is obtained: If a space has a unique uniform structure, then it has a unique compactification (by adjunction of a single point). Two other theorems are established: if a space has a unique uniform structure it is countably compact (Theorem 3). A paracompact space is complete with respect to its universal uniform structure (in the sense of A. Weil), a theorem which is completed by two corollaries. The first states that if a paracompact space is precompact in all its uniform structures it is compact. The second states that a paracompact space with a uniform structure is compact. — The author remarks that a converse of Theorem 4 poses an interesting problem.

C. Racine.

Arens, Richard: Extension of coverings, of pseudometrics, and of linear-space-valued mappings. Canadian J. Math. 5, 211–215 (1952).

Let A be a closed subset of a topological space X . The author proves that the following three conditions are equivalent: (1) Any countable locally finite (= neighbourhood-finite) open covering of A has a refinement which can be extended to a countable locally finite open covering of X . (2) Any separable pseudometric on A can be extended to a separable pseudometric on X . (3) Any continuous mapping of A into a separable closed convex subset S of a Banach space B can be extended over X , keeping the values still in S . The corresponding conditions (1)*, (2)*, (3)* obtained by omitting „separable“ and „countable“ are also shown to be equivalent. [However it seems necessary to attach the adjective „normal (in the sense of J. W. Tukey)“ to all coverings in (1) and (1)*; if this is done, a mere insertion of the word „normal“ in suitable places makes the authors proof valid, since if \mathfrak{N} is a normal \mathcal{I} -refinement of a locally finite normal open covering $\{G_\alpha\}$ of X the intersection of all the binary coverings $\{G_\alpha, S(X - G_\alpha, \mathfrak{N})\}$ is a locally finite normal open covering which is a \mathcal{I} -refinement of $\{G_\alpha\}$ (cf. K. Morita, this Zbl. 41, 97, 317)]. It is also proved that (1) or (1)* holds for any A according as X is normal or fully normal. [Cf. C. H. Dowker, this Zbl. 48, 410, where it is proved that (1)* holds for any A if X is collectionwise normal in the sense of R. H. Bing and (3)* for any A , S and B implies the collectionwise normality of X .] Thus these results generalize Tietze's extension theorem and an earlier result of the author (this Zbl. 46, 118). Finally the author proves that if A is a closed set of a normal space X and K is a convex set with non-void interior in a topological linear space L , then a continuous mapping f of X into K such that $f(A)$ avoids an F_σ -set T contained in the frontier of K can be so deformed at points not in A so as to have values in K but to avoid T altogether; moreover if A is a G_δ -set the same conclusion holds without the assumption that T is an F_σ -set.

K. Morita.

Watson, P. D.: On the limits of sequences of sets. *Quart. J. Math., Oxford* II. Ser. **4**, 1—3 (1953),

Let X be a separable metric space, and let $(2^X)_L$ be the L^* -space of closed subsets of X [see C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1948 (this Zbl. **41**, 96), p. 247]. If X is not locally compact, then $(2^X)_L$ is not a topological space. If X is locally compact, then $(2^X)_L$ is a compact metric space.

R. Sikorski.

O'Neill, Barrett: Essential sets and fixed points. *Amer. J. Math.* **75**, 497—509 (1953).

In addition to establishing the existence of fixed points of continuous mappings of a topological space into itself, it may often prove very useful to study the stability of such points. Such a study has been made by M. K. Fort [*Amer. J. Math.* **72**, 315 (1950) — see this Zbl. **36**, 130]. In this paper the author generalizes this notion of stability — called by him „essentiality“ — to sets of points, particularly to open sets. Let U be an open set of the given topological space and f a continuous mapping, having a fixed point in U . Then U will be called essential if any mapping sufficiently near to f (in the sense of the compact-open topology of the space of these mappings) has also a fixed point in a vicinity of U . The notion of essentiality, exactly as the notion of fixed point, depends on the notion of an index determined by an open set U and a mapping f . This index, defined by J. Leray, is introduced by the author in a somewhat more elementary fashion, in the case of a finite polyhedron. The non vanishing of the index is a test of essentiality, provided U contains only isolated components of the set of all the fixed points of the mapping considered. If this last condition is not fulfilled, a more complicated analysis is necessary. A few interesting examples are treated by the author and the case of an euclidean space, particularly important, elaborately studied.

C. Racine.

Kapuno, Isaac: Sur les surfaces homéomorphes à un disque dans un R^3 . *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1229—1231 (1953).

Unter Benutzung der bekannten Beispiele von J. W. Alexander [*Proc. nat. Acad. Sci. USA*, **10**, 8—10 (1924)] und von L. Antoine [*J. Math. pur. appl.*, VIII. Ser., **4**, 221—325 (1921)] werden konstruiert: 1. eine Kalotte (= topologisches Bild des Kreises), die in keine andere Kalotte eingebettet werden kann, und 2. eine Menge E , die die Vereinigung abzählbar vieler, perfekter, total diskontinuierlicher Mengen in E^3 ist derart, daß $E^3 - E$ keine Kalotte enthält. *H. Terasaka.*

Sharp jr., Henry: Strongly topological imbedding of F_σ -subsets of E_n . *Amer. J. Math.* **75**, 557—564 (1953).

Let M_n^k be the set of points (in the n -dimensional Euclidean space E_n) having at most k rational coordinates. A set $B \subset E_n$ is said to be a strongly topological image of a set $A \subset E_n$ if there is a homeomorphism h of E_n onto itself such that $B = h(A)$. The paper is concerned with the problem: does the set M_n^k contain a strongly topological image of every j -dimensional F_σ -subset of E_n ($j \leq k$)? It was known that the answer is affirmative if $j \leq k = n$, or $j \leq k = n - 1$, or $n = 2$, $k = 0$, or $n = 3$, $k = 1$, $j = 0$, and that it is negative if $n = 3$, $k = 0$. The author proves that the answer is affirmative if $j \leq k = n - 2$ and $n \geq 4$, and negative in all other previously unsolved cases.

R. Sikorski.

Kuratowski, Casimir: Sur une propriété topologique fondamentale du plan euclidien. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **2**, 361—362 (1953).

La propriété (abbr. (P)) en question c'est la propriété de Janiszewski que voici: A, B étant deux ensembles connexes fermés tels que le complémentaire de leur réunion soit connexe, alors l'intersection $A \cap B$ est connexe. La propriété (P) est vérifiée pour la sphère (Janiszewski) etc. Si un espace est normal, connexe, localement connexe et s'il vérifie la propriété précédente, on peut y prouver les deux propositions qu'on obtient de (P) en y supposant que A, B soient fermés (ouverts). L'A. prouve que la propriété de Janiszewski est invariante relativement aux transformations continues „monotones“ (\Leftarrow si C est connexe, $f^{-1}C$ l'est aussi). Dans d'autres articles l'A. a montré le rôle de (P) ou de propriétés de Janiszewski analogues dans la topologie de la sphère ou dans la topologie générale [v. Atti Congr. Math. Int. Bologna **4**, 239—241 (1928), *Fundamenta Math.* **13**, 307—318 (1929), **12**, 152—157 (1928) (avec Straszewicz), Grzegorzczak et Kuratowski *Ann. Soc. Polon. Math.* **25**, 169—182 (1952)].

G. Kurepa.

Denjoy, Arnaud: A propos des théorèmes dits „de Janiszewski“. Atti IV. Congr. Un mat. Ital. 2, 363—365 (1953).

A propos de la note précédente, l'A. exprime sa surprise que Janiszewski dans son article [Prace mat.-fiz. 26, 11—63 (1915)] contenant, en polonais, ses recherches concernant „la propriété de Janiszewski“ n'eût fait aucune mention de recherches de l'A. publiées en 1911 dans les C. r. Acad. Sci., Paris 153, 423—426, 493—496 et concernant en particulier „la biconnexité“ des espaces cartésiens (cf. ce Zbl. 43, 398) et l'application de celle-ci à la démonstration du th. de division de Jordan. L'A. s'arrête en particulier sur les énoncés suivants: C, C' étant deux continus plans dont les complémentaires forment un nombre fini ou \aleph_0 de régions, si $C - C \cap C'$ se trouve dans une région R' de C' et si $C' - C \cap C'$ se trouve dans une région R de C , on a ceci: 1° Si $C \cap C'$ est un point ou un continu ne divisant pas le plan, alors $R \cap R'$ est une région; 2° Si $C \cap C'$ se compose de 2 points ou de 2 continus (ne divisant pas le plan) disjoints, alors $R \cap R'$ forme 2 régions. L'A. en déduit le théorème de Jordan. L'A. généralise l'énoncé 2° comme il suit: Si C, C' se compose de p continus disjoints (p entier > 1), alors $R \cap R'$ est formé de p régions.

G. Kurepa.

Reifenberg, E. R.: A separation theorem for finite sets of plane continua. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 573 (1953).

Démonstration d'un théorème connu (v., par exemple, Kuratowski, Topologie II. Warszawa 1950, p. 398, théorème 7, ce Zbl. 41, 96).

I. Fáry.

Clark, C. E.: Homologies in a normal space and closed subspace. Publ. math., Debrecen 2, 237—243 (1953).

Let K_1 and L_1 be the first barycentric subdivision of a finite simplicial complex K and its normal subcomplex L . The closed star and the open star of L_1 in K_1 are denoted by N_1 and O_1 respectively, and we put $R_1 = K_1 - O_1$, $B_1 = N_1 \cap R_1$. Let B (or G) be the subgroup of the homology group of B_1 made up of the homology classes whose cycles bound in R_1 (or both in R_1 and in N_1), and L the subgroup of the homology group of L_1 made up of the homology classes whose cycles bound in K_1 , where all chains have as coefficient group a fixed discrete Abelian group and the dimension of all homology classes is fixed at an arbitrary non-negative integer (cf. an earlier paper by the author, this Zbl. 21, 358). First the author proves $B/G \cong L$. Secondly, for a closed subset A of a normal space R he defines the groups \mathfrak{B} , \mathfrak{G} and \mathfrak{L} of the type of the Čech homology groups as limit groups of suitable inverse systems which consist of the groups B, G and L of the nerves of suitable coverings of R and of homomorphisms induced by suitable mappings between the nerves respectively. The corresponding groups related to the Alexandroff inner Betti groups (Alexandroff, this Zbl. 26, 270) are defined and studied in detail. The isomorphism $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{G} \cong \mathfrak{L}$ is proved for the groups of both types. Finally it is shown that if R is a polyhedron with a finite simplicial subdivision K and A carries a normal subcomplex L , we have $\mathfrak{B} \cong B$, $\mathfrak{G} \cong G$, $\mathfrak{L} \cong L$ where the groups $\mathfrak{B}, \mathfrak{G}, \mathfrak{L}$ are of the Čech type.

K. Morita.

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: On the groups $H(\Pi, n)$. I. Ann. of Math., II. Ser. 58, 55—106 (1953).

Beim Studium des Einflusses der n -ten Homotopiegruppe Π eines Raumes, der in allen Dimensionen $\neq n$ asphärisch ist, auf seine Homologieeigenschaften haben Verff. früher [Ann. of Math., II. Ser. 46, 480—509 (1945)] die in rein algebraischer Weise für jede abelsche Gruppe Π definierten Komplexe $K(\Pi, n)$ eingeführt. Diese Komplexe werden hier genauer untersucht, und zwar werden sie zunächst durch algebraisch durchsichtigere Komplexe $A(\Pi, n)$ ersetzt, die zu ihnen homologie-äquivalent sind. Der Komplex $K(\Pi, n)$ hat als q -Zellen die n -Kozyklen $\sigma \in Z^n(\Delta_q, \Pi)$ auf dem q -Simplex Δ_q mit Koeffizienten aus Π . Die Ecken von Δ_q sind dabei geordnet. Bezeichne ϵ^i die Abbildung von Δ_{q-1} in Δ_q , die die Ecken von Δ_{q-1} ordnungstreu so auf die Ecken von Δ_q abbildet, daß dabei nur die i -te Ecke von Δ_q freibleibt, und bezeichne η^i die Abbildung von Δ_{q+1} auf Δ_q , die die Ecken von Δ_{q+1} ordnungstreu so auf die Ecken von Δ_q abbildet, daß nur die i -te Ecke doppelt besetzt wird. Dann liefern diese Abbildungen Homomorphismen $F_i: Z^n(\Delta_q, \Pi) \rightarrow Z^n(\Delta_{q-1}, \Pi)$ bzw. $D_i: Z^n(\Delta_q, \Pi) \rightarrow Z^n(\Delta_{q+1}, \Pi)$. Komplexe mit derartigen „Seiten-“ und „Entartungsoperatoren“ F_i, D_i werden als FD -Komplexe bezeichnet und allgemein untersucht. Sie sind eine Verallgemeinerung der vollständigen halbsimplizialen Komplexe von Eilenberg-Zilber (dies. Zbl. 36, 126). Weiter besitzen die Komplexe $K(\Pi, n)$ vermöge der Gruppenverknüpfungen von $Z^n(\Delta_q, \Pi)$ eine gewisse Ringstruktur. Derartige Komplexe werden als R -Komplexe bezeichnet und ebenfalls allgemein untersucht. Insbesondere kann jeder R -Komplex R unter Benutzung einer Produktbildung im kartesischen Produkt $R \times R$ (vgl. Eilenberg-Zilber, dies. Zbl. 50, 173) in einen „graded ∂ -ring“ verwandelt werden. Es wird eine allgemeine Konstruktion (Strichkonstruktion) angegeben, die jedem schiefkommutativen graded ∂ -ring G einen ebensolchen $B(G)$ zuordnet, der auch eine R -Komplex-Struktur besitzt. Wegen der Einzelheiten dieser Konstruktion (und der obigen Definitionen) muß auf die Arbeit

selbst verwiesen werden. Die Komplexe $A(H, n)$ werden nun induktiv durch $A(H, n+1) = B(A(H, n))$ definiert, wobei $A(H, 0)$ der ganzzahlige Gruppenring von H ist. Andererseits wird unter Benutzung einer direkten Summenzerlegung $Z^{n+1}(1_{q+1}, H) \approx Z^n(1_q, H) + Z^{n+1}(1_q, H)$ eine Konstruktion W angegeben, so daß $W(K(H, n)) = K(H, n+1)$ ist, womit eine induktive Konstruktionsvorschrift für die Komplexe $k(H, n)$ gewonnen ist. Diese Konstruktion W läßt sich für einen beliebigen R -Komplex durchführen. Das Hauptresultat der Arbeit besteht nun in dem Beweis der Tatsache, daß für jeden R -Komplex R die Komplexe $B(R)$ und $W(R)$ homologieäquivalent sind, woraus durch Iteration die Homologie-Äquivalenz von $A(H, n)$ und $K(H, n)$ folgt. Ferner ergeben sich durch diesen Zusammenhang von $K(H, n)$ und $A(H, n)$ für die Homologiegruppen $H_q(H, n; G)$ von $K(H, n)$ mit Koeffizientengruppe G für $0 < q < 2n$ die Isomorphismen $H_q(H, n; G) \approx H_{q+1}(H, n-1; G)$, und ebenso für die Kohomologiegruppen. Diese Isomorphismen werden vermittelt durch eine „Einhängungstransformation“ $S: K(H, n) \rightarrow K(H, n+1)$. Weiter vermittelt S für $q = 2n$ einen Homomorphismus von $H_{2n}(H, n; G)$ auf $H_{2n+1}(H, n+1; G)$ und entsprechend einen Isomorphismus in für die Kohomologiegruppen. Voranzeige dieser Ergebnisse siehe dies. Zbl. 37, 395; 39, 190; 42, 414. Die früher beim Beweis des Einhängungstheorems benutzten kubischen Komplexe $Q(H)$ werden jetzt nicht mehr benutzt; sondern vielmehr explizit eine Abbildung von $A(H, n)$ in $K(H, n)$ konstruiert. E. Burger.

Steenrod, N. E.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 213–217 (1953).

Verf. gibt für seine früher definierten reduzierten Potenzen (dies. Zbl. 48, 413) eine allgemeinere Definition, die es gestattet, naturgemäße Beweise für bekannte Eigenschaften und Relationen (Adem, dies. Zbl. 48, 170; Thom, Strasbourg Colloq. 1951) dieser Steenrodschen Cohomologie-Operationen zu finden. Es sei X ein Komplex, π eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_n von n Objekten. u sei ein Element von $H^q(X)$, und c sei ein Element der i -ten Homologiegruppe $H_i(\pi)$ der Gruppe π . Verf. definiert die reduzierte Potenz $u^n c = H^{nq+i}(X)$. Was bisher im Referat gesagt wurde, ist natürlich noch nicht präzise, da nichts über die Koeffizienten-Gruppen ausgesagt wurde. Genauer: Die Gruppe π operiere von links auf A , und $H_i(\pi, A)$ sei die entsprechend gebildete Homologiegruppe von π . Mit $B^{n,q}$ werde das n -fache Tensorprodukt der Gruppe B mit sich selbst bezeichnet, auf das π in folgender Weise operiert: Wenn q gerade ist, dann permutiert π einfach die n Faktoren des Tensorproduktes; wenn q ungerade ist, dann permutiert π in derselben Weise, bewirkt jedoch noch eine Multiplikation mit dem Zeichen der Permutation. A und $B^{n,q}$ sind also π -Gruppen. Man kann demnach ihr Tensorprodukt $A \otimes_{\pi} B^{n,q}$ über π bilden; (d. h.: π operiert in natürlicher Weise auf dem gewöhnlichen Tensorprodukt. Um $A \otimes_{\pi} B^{n,q}$ zu erhalten, hat man alle Elemente des gewöhnlichen Tensorproduktes zu identifizieren, die durch eine Operation von π auseinander hervorgehen). Für $u \in H^q(X, B)$ und $c \in H_i(\pi, A)$ ist die reduzierte Potenz $u^n c$ ein Element von $H^{nq+i}(X, A \otimes_{\pi} B^{n,q})$. Die Definition von $u^n c$ erfolgt in drei Schritten (C deutet Ketten- bzw. Coketten-Gruppen an; der obere links vorgestellte Index c bedeutet, daß auf dem Komplex und auf den Koeffizientenbereich in bestimmter Weise eine Gruppe operiert und daß die äquivarianten Coketten gemeint sind): 1. Von $u \in C^q(X, B)$ kommt man zu $u^n = c^{nq}(X, B^{n,q})$. 2. W sei ein azyklischer Komplex, auf den π frei operiert. Der diagonal carrier $\Phi: W \times X \rightarrow X^n$ wird durch $\Phi(w \times x) = \sigma^n$ definiert. Zu diesem diagonal carrier wird eine äquivariante Ketten-Abbildung $\Phi_w: W \times X \rightarrow X^n$ konstruiert. $\Phi_w u^n$ ist äquivalente Cokette von $W \times X$. 3. Für den Augenblick seien W und X beliebige Komplexe. Für $v \in C^r(W \times X)$ und $c \in C_i(W)$ wird $v \cdot c = c^{r+i}(X)$ (lies „ c slant v “) folgendermaßen definiert: $(v \cdot c) \cdot \sigma = v \cdot (c \cdot \sigma)$ für jede $(r+i)$ -Zelle σ von X . (Der Punkt bedeutet „Kronecker Index“. Einzelheiten bezüglich der Koeffizientengruppen hier in Referat weggelassen.) Nun sollen X und W wieder die alte Bedeutung haben. Die „slant“-Operation wird sinngemäß auf die äquivalente Theorie angewandt, und man gelangt mit Hilfe der äquivarianten i -dimensionalen Kette c aus W von $\Phi_w u^n$ zu $\Phi_w u^n c = c^{nq+i}(X, A \otimes_{\pi} B^{n,q})$. Man ist damit am Ziel angelangt und hat zu kontrollieren, daß diese für Ketten definierte Operation tatsächlich die Cohomologie-Operation der gewünschten Art induziert. Verf. bespricht nun die Invarianzeigenschaften der Operation $u^n c$, ($u \in H^q(X)$ und $c \in H_i(\pi)$). Für eine Abbildung f des Komplexes X in einen Komplex Y hat man: $f^*(u^n c) = (f^* u)^n \cdot c$. Dies impliziert, daß es sich um topologisch invariante Operationen handelt. Nun seien $\pi \subset \pi'$ zwei Untergruppen von S^n , es sei λ die Inklusionsabbildung. Verf. betrachtet insbesondere den Spezialfall: $A = B =$ zyklisch, S_n operiert auf A genau so wie auf $B^{n,q} = B$, also trivial für gerades q und mit Vorzeichen für ungerades q . In diesem Fall sind alle Koeffizienten-Gruppen isomorph mit A ; man hat die Gleichung $u^n c = u^n \cdot \lambda_* c$ und deshalb das folgende Prinzip: For ease of calculation, choose π to be the smallest subgroup of S_n „containing“ the cycle c ; and to obtain relations on $u^n c$, choose $\pi = S_n$. Abschließend bespricht Verf. das Verhalten von $u^n c$ unter der Rand-Operation c_* und der Corand-Operation δ^* , die zur exakten Koeffizienten-Folge $0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow Z_m \rightarrow 0$ gehören. Es gilt: $u^n c_* = (-1)^{n-1} \delta^*(u^n c)$, wobei $c \in H_i(\pi, Z_m)$ und $u \in H^q(X, Z)$.

F. Hirzebruch.

Steenrod, N. E.: *Cyclic reduced powers of cohomology classes*. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 217—223 (1953).

In dieser an die vorhergehende anschließenden Note definiert Verf. die speziellen zyklisch reduzierten Potenzen. In diesem sehr wichtigen Fall ist π die zyklische Permutationsgruppe der n Faktoren von X^n , die von der Transformation T erzeugt wird, die jeden Faktor um eine Stelle „nach rechts“ verschiebt. Um die zu Zyklen $c \in H(\pi)$ gehörigen reduzierten Potenzen untersuchen zu können, konstruiert Verf. einen π -freien azyklischen Komplex W : Im Gruppierung

$Z(\pi)$ wird $.1 = T - 1$ und $\sum = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ gesetzt. Der π -Komplex W besteht aus genau einer

Zelle e_i und ihren transformierten $T^k e_i$ für jede Dimension $i \geq 0$. Die Randoperation ∂ wird durch $\partial e_{2i+1} = .1 e_{2i}$ und $\partial e_{2i+2} = \sum e_{2i+1}$ ($i \geq 0$) definiert. Als Koeffizientengruppen werden Z oder Z_n benutzt, auf die π trivial operiert. Zur Berechnung von $H(\pi)$ hat man den Faktor-komplex $Z \otimes_{\pi} W = W/\pi$ zu verwenden. Dieser hat in jeder Dimension $j \geq 0$ eine einzige Zelle, die ebenfalls mit e_j bezeichnet werde. Die Randoperationen sind: $\partial e_{2i+1} = 0$ und $\partial e_{2i+2} = n e_{2i+1}$. Das ergibt $H_{2i+1}(\pi, Z) \simeq Z_n$, $H_{2i+2}(\pi, Z) = 0$, ($i \geq 0$), und $H_j(\pi, Z_n) \simeq Z_n$. Wenn e_j ein Zyklus ist, dann soll die von e_j repräsentierte Homologiekategorie von π ebenfalls mit e_j bezeichnet werden. Wegen der am Schluß des vorangehenden Referats angegebenen Rand- und Corand-Formel braucht man sich hauptsächlich nur für die durch $e_{2i} \in H_{2i}(\pi, Z_n)$ gegebenen reduzierten Potenzen zu interessieren. Man erhält eine besonders angenehme Theorie, wenn man voraussetzt, daß n eine Primzahl ist: Für $n = 2$ und $e_j \in H_j(\pi, Z_2)$ liefert $u \rightarrow u^2/e_j$ falls

$u \in H^q(X, Z_2)$ einen Homomorphismus von $H^q(X, Z_2)$ in $H^{2q-1}(X, Z_2)$. Dieser Homomorphismus wird mit Sq^{q-j} bezeichnet (Steenrodsches reduziertes Quadrat). Sq^k ist ein additiver Homomorphismus der Gesamt-Cohomologiegruppe $H^*(X, Z_2)$ in sich selbst, der alle Dimensionen um k erhöht. Wenn n eine ungerade Primzahl ist und $e_{2i} \in H_{2i}(\pi, Z_n)$, dann liefert $u \rightarrow u^n e_{2i}$ für $u \in H^q(X, Z_n)$ einen Homomorphismus von $H^q(X, Z_n)$ in $H^{nq-2i}(X, Z_n)$. Die Dimensionserhöhung dieses Homomorphismus ist also $nq - 2i - q$. Verf. beweist den Satz von Thom (Strasbourg Colloq., 1951), daß der gerade definierte Homomorphismus nur dann verschieden von 0 sein kann, wenn seine Dimensionserhöhung durch $2(n-1)$ teilbar ist. Verf. verwendet dabei sein am Ende des vorigen Referats angegebenes Prinzip, er betrachtet den natürlichen Homomorphismus von $H_{2i}(\pi, Z_n)$ in $H_{2i}(S_n, Z_n)$. Wegen dieses Satzes von Thom bezeichnet man die zyklisch reduzierten Potenzen, die die Dimension um $2s(n-1)$ erhöhen, mit \mathfrak{P}_n^s . Das soll heißen: \mathfrak{P}_n^s ist für jedes q ein Homomorphismus von $H^q(X, Z_n)$ in $H^{q+2s(n-1)}(X, Z_n)$.

(Es muß noch gesagt werden, daß nach Def. des Verf. die \mathfrak{P}_n^s nur bis aufs Vorzeichen reduzierte Potenzen sind. Die Vorzeichen sind nachträglich so gewählt worden, damit die im folgenden angegebenen Eigenschaften von \mathfrak{P}_n^s ohne störende Vorzeichen richtig sind.) Die \mathfrak{P}_n^s können auch für relative Cohomologie definiert werden. Sie lassen sich durch die folgenden vom Verf. in dieser Note bewiesenen Eigenschaften axiomatisch charakterisieren: n ist eine ungerade Primzahl. Für jedes ganze s ist \mathfrak{P}_n^s ein Homomorphismus von $H^q(, Z_n)$ in $H^{q+2s(n-1)}(, Z_n)$. Es gilt 1. $\mathfrak{P}_n^s = 0$ für $s < 0$, $\mathfrak{P}_n^0 =$ Identität. 2. Für $s > q/2$ ist $\mathfrak{P}_n^s = 0$. Für gerades q und $u \in H^q(, Z_n)$ ist $\mathfrak{P}_n^{q/2} u = u^n$ (Potenz im Sinne des Cup-Produktes). 3. Für $u \in H^*(X, Z_n)$, $v \in H^*(Y, Z_n)$ und $u \times v \in H^*(X \times Y, Z_n)$ gilt die folgende Multiplikationsformel, die eine Verallgemeinerung der Cartanschen Multiplikationsformel für die Steenrodschen

reduzierten Quadrate ist (H. Cartan, dies. Zbl. 41, 99): $\mathfrak{P}_n^s(u \times v) = \sum_{t=0}^s \mathfrak{P}_n^t u \times \mathfrak{P}_n^{s-t} v$.

4. Die reduzierten Potenzen \mathfrak{P}_n^s sind mit Abbildungen vertauschbar. 5. Die reduzierten Potenzen \mathfrak{P}_n^s sind mit dem Corand-Homomorphismus der exakten Folge der relativen Cohomologie vertauschbar. Abschließend bemerkt Verf., daß wegen der Eigenschaften 1.—3. die \mathfrak{P}_n^s zum Beispiel für die komplex-projektiven Räume unmittelbar berechnet werden können.

F. Hirzebruch.

Thom, René: *Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables*. I. Le théorème général. II. Résultats et applications. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 453—454, 573—575 (1953).

I. $L_n^p A$. étude la possibilité de réaliser dans une variété V à n dimensions (paracompacte différentiable de classe C^∞) une classe d'homologie donnée à $n - k$ dimensions ($0 < k < n$) par une sous-variété plongée (de manière différentiable) dans V ; on se donne en outre le groupe de structure G (sous-groupe du groupe orthogonal $O(k)$) de l'espace fibré des vecteurs normaux. — La construction repose sur la considération du complexe $M(G)$ obtenu (en identifiant à un point le bord E_G) à partir de l'espace fibré en k -boules associé à l'espace fibré universel E_G (des espaces fibrés en sphères S^{k-1} avec G pour groupe de structure). Le problème est possible si et seulement s'il existe une application de V dans $M(G)$ dont la transposée applique sur la classe de cohomologie duale (par dualité de Poincaré) de la classe donnée une certaine classe fondamentale (à k dimen-

sions) de $M(G)$. — En particulier, pour que la classe d'homologie z soit réalisable par une sous-variété à espace normal trivial ($G = 0$), il faut et il suffit que la classe x duale de z soit sphérique (c.-à.-d. image, par une application convenable, de la classe fondamentale du k^{e} groupe de cohomologie de S^k). D'après un théorème de J. P. Serre il y a toujours un entier $N \neq 0$ (dépendant de k et n seulement) tel que Nx soit sphérique (x étant une classe de cohomologie à coefficient entiers de dimension k) si k est impair ou si $n < 2k$. — II. Lorsque $G = O(k)$ (groupe orthogonal) ou $SO(k)$ (groupe des rotations), la classe fondamentale de $M(G)$ est respectivement une classe mod 2 ou à coefficients entiers. On étudie la possibilité d'appliquer dans $M(G)$ le complexe d'Eilenberg-MacLane $K(Z_2, k)$ ou $K(Z, k)$. Les obstacles sont respectivement liés au carré de Pontrjagin (pour $k = 2$) ou au cube de Steenrod (pour $k \geq 3$) de la classe fondamentale du complexe d'Eilenberg-MacLane. On pourra donc réaliser par des sous-variétés $H_{n-1}(V^n; Z_2)$ pour tout n ; $H_{n-2}(V^n; Z_2)$ pour $n < 6$; $H_i(V^n; Z_2)$ pour $i < [n/2]$; si V est orientable, on peut réaliser (par des sous-variétés orientables) $H_{n-1}(V^n; Z)$, $H_{n-2}(V^n; Z)$, et $H_i(V^n; Z)$ pour $i \leq 5$, et on a une condition nécessaire pour la réalisation de z pour les autres valeurs de i . — Il résulte de l'homologie de $K(Z, k; Z_0)$ que pour k pair $\neq 0$, il y a un N entier $\neq 0$ tel que Nz soit réalisable par une sous-variété orientable (z étant une classe quelconque à $n = k$ dimensions) à coefficients entiers dans une V^n orientable). — Utilisant l'immersion de $K(Z_2, 2)$ ou $K(Z, 3)$ dans un espace euclidien, l'A. construit des exemples de classes (à 9 dimensions dans une V^{11} ou 14 dimensions dans une V^{17}) qui ne sont pas réalisables par des sous-variétés. — Toute classe d'homologie mod 2 d'un polyèdre fini est image de la classe fondamentale d'une variété différentiable compacte; un multiple fini Nz de toute classe d'homologie z à r dimensions à coefficients entiers d'un polyèdre fini est image de la classe fondamentale d'une variété différentiable orientable compacte; N ne dépend que de r ; pour $r \leq 5$, on peut prendre $N = 1$ (Problème posé par N. E. Steenrod).

Guy Hirsch.

Thom, René: Sur un problème de Steenrod. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1128—1130 (1953).

Plongeant un polyèdre fini K dans un espace euclidien, on peut y réaliser toute classe d'homologie (à coefficients entiers), image d'une variété différentiable compacte, par une sous-variété différentiable d'un voisinage de K . Appliquant la dualité de Poincaré aux voisinages ouverts de K , l'A. associe aux puissances réduites de Steenrod des homomorphismes θ^p de $H_r(K; Z_p)$ en $H_{r-p}(K; Z_p)$. Utilisant alors la condition pour qu'une classe d'homologie soit réalisable par une sous-variété (rapp. précéd.), pour que z dans K soit image de la classe fondamentale d'une variété différentiable compacte, il faut que les θ^p soient nuls [p premier $\neq 2$, $i = 1 \pmod{2(p-1)}$]. Si $\dim z \leq 8$, il faut et il suffit que $\theta^2(z) = 0$; si $\dim z \leq 6$, la condition est toujours remplie. Au contraire, il existe pour toute $\dim z \geq 7$ des z qui ne sont image d'aucune variété différentiable compacte. L'A. en donne pour exemple une classe à 7 dimensions dans une V^{14} (produit de 2 espaces lenticulaires). — Comme il est possible de réaliser la classe d'une variété différentiable compacte par cette variété elle-même, on aura $\theta^p_i = 0$ (pour p et i impairs), d'où des conditions, résultant de l'hypothèse de différentiabilité, sur les puissances de Steenrod. Le problème de la validité de ces conditions pour les variétés topologiques (non nécessairement différentiables) n'est pas résolu.

Guy Hirsch.

Thom, René: Variétés différentiables cobordantes. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1733—1735 (1953).

Deux variétés de même dimension sont cobordantes si leur différence est le bord d'une variété compacte (toutes les variétés étant supposées orientées, sauf dans le cas mod 2). Ces classes constituent un groupe abélien (de cobordisme) Ω_k et un anneau gradué Ω (somme directe des Ω_k) (désignés par \mathfrak{R}_k et \mathfrak{R} dans le cas mod 2). La classe nulle est celle des variétés-bords. Par la considération du complexe $M(G)$ introduit dans une Note antérieure (v. 2^{ème} rapp. ci-dessus), l'A. établit que Ω_k et \mathfrak{R}_k sont isomorphes à $\pi_{r-k}(M(G))$ avec $G =$ respectivement $SO(r)$ et $O(r)$ ($k = r - 1$). Il en résulte que si une variété a tous ses nombres caractéristiques de Stiefel-Whitney nuls, c'est une variété-bord (mod 2); l'anneau \mathfrak{R} est isomorphe à une algèbre de polynômes sur Z_2 admettant un générateur X_i pour toute dimension $i = 2^m - 1$. L'A. détermine aussi Ω_k pour $k \leq 7$, et le nombre caractéristique de Pontrjagin $P^4(V^4)$ pour une variété orientée de dimension 4. En vertu de résultats de J. P. Serre appliqués à $M(G)$, les Ω_k sont finis si k n'est pas multiple de 4; l'algèbre Ω (en coefficients rationnels) est isomorphe à une algèbre de polynômes admettant un générateur pour chaque dimension divisible par 4.

Guy Hirsch.

Borel, A. et J.-P. Serre: Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Amer. J. Math. 75, 409—448 (1953).

Cet article donne une méthode pour déterminer les puissances de Steenrod dans la cohomologie d'un groupe de Lie G et de son espace classifiant B_G , lorsque G et le quotient de G par un tore maximal T de G sont sans p -torsion (p premier). L'action des puissances de Steenrod dans la cohomologie $H^*(G)$ de G est connue, dès qu'on l'a déterminée dans $H^*(B_G)$; en effet, $H^*(G)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments „universellement transgressifs“, et les puissances de Steenrod commutent à la transgression. L'application identique de T dans

G induit une application canonique $f: B_T \rightarrow B_G$, et les images par l'application $f^* H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_T)$ ne sont autres que les classes de cohomologie de B_T invariantes par le groupe de Weyl de G , isomorphe au quotient par T du normalisateur N de T dans G . De plus seul importe le cas unitaire, les autres cas justiciables de la méthode (essentiellement les groupes classiques, avec la restriction p impair dans le cas orthogonal) pouvant s'y ramener par plongement. En ce cas, $H^*(B_G)$ est la cohomologie d'un produit de l espaces projectifs complexes, de générateurs x_i de degré 2 (l rang du groupe). Les images par f^* sont les fonctions symétriques des variables x_i ; en particulier, les fonctions symétriques élémentaires $\Sigma x_1 x_2 \cdots x_i$ s'identifient (assez laborieusement) aux classes de Chern C_{2i} de la grassmannienne complexe. Or les puissances de Steenrod peuvent s'obtenir dans $H^*(B_T)$ par un calcul purement formel (basé sur la formule du produit); d'où leur calcul dans $H^*(B_G)$ et par suite dans $H^*(G)$. Les A.A. donnent ainsi une justification topologique au calcul antérieurement fait par Wu Wen-Tsun des puissances de Steenrod des classes de Chern. De nombreuses et importantes applications s'en déduisent: pour $i > 4$, la classe de Chern C_{2i} , réduite mod p , où l'entier premier p ne divise pas i , s'exprime en fonction des classes de Chern C_{2j} , où $j < i$ (à l'aide de puissances de Steenrod et de polynômes); par suite, la sphère S^{2i} ne peut être la base d'une structure unitaire que si la classe fondamentale C_{2i} est nulle mod p . De là l'inexistence de structures presque-complexes sur les sphères autres que S^2 et S^6 (ce résultat s'étendrait même aux sphères homologiques), et d'algèbres à division d'un certain type. Un procédé analogue montre de même l'inexistence de section dans les fibrations $SU(n)/SU(n-1)$, $n \geq 3$, $Sp(n)/Sp(n-1)$, $n \geq 2$, $Spin(9)/Spin(7) = S^{15}$, $Spin(7)/G_2 = S^7$; on en déduit les p -composantes des groupes d'homotopie des groupes classiques ainsi que les groupes π_6 de dimension 6. On établit enfin que „presque toutes“ les fibrations classiques définies par les variétés de Stiefel complexes n'admettent pas de section. *R. Thom.*

Rochlin, V. A.: Innere Homologien. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 789—792 (1953) [Russisch].

Zwei glatte, kompakte, orientierte k -Mannigfaltigkeiten M und N heißen homolog, wenn es eine glatte, kompakte, orientierte $(k+1)$ -Mannigfaltigkeit gibt, deren Rand $M - N$ ist ($M - N$ bezeichnet die Vereinigung von M und $-N$, wobei $-N$ aus N durch Umkehrung der Orientierung entsteht). Die entstehenden Homologieklassen werden addiert durch Bildung der Vereinigung repräsentierender Mannigfaltigkeiten. Die so erhaltene Gruppe O^k wird k -dimensionale innere Homologiegruppe genannt. Entsprechend wird für nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten die Gruppe \mathfrak{N}^k definiert. Indem man bei orientierten Mannigfaltigkeiten von der Orientierung absieht, erhält man einen Homomorphismus h von O^k in \mathfrak{N}^k . Verf. bestimmt Kern und Bild von h , z. B. ist der Kern von h gleich $2O^k$. Es folgen einige Anwendungen auf reelle und komplexe projektive Räume. Bekanntlich sind die Gruppen O^1, \mathfrak{N}^1, O^2 trivial, und \mathfrak{N}^2 ist von der Ordnung zwei und wird erzeugt von der projektiven Ebene P^2 . Verf. bewies früher (dies. Zbl. 44, 381 und 46, 407), daß O^3 und \mathfrak{N}^3 trivial sind und daß O^4 unendlich zyklisch ist und von der komplexen projektiven Ebene Q^4 erzeugt wird. In der letztgenannten Arbeit war ferner fälschlich behauptet worden, daß \mathfrak{N}^4 von der Ordnung zwei sei, während in Wirklichkeit aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit folgt, daß \mathfrak{N}^4 zwei unabhängige Erzeugende von der Ordnung zwei besitzt, nämlich den reellen projektiven Raum P^4 und die komplexe projektive Ebene Q^4 .

E. Burger.

Weier, Josef: Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. 59, 171—190 (1953).

Die Arbeit behandelt einige grundlegende Sätze aus der Theorie der Fixpunkte und verallgemeinert sie auf den Fall kompakter topologischer Mannigfaltigkeiten. Dabei sind n -dimensionale Mannigfaltigkeiten als topologische Räume \mathfrak{P}^n zu verstehen, in denen es zu jedem Punkt eine in \mathfrak{P}^n offene, zum euklidischen n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n homöomorphe Umgebung gibt. Es wird also keinerlei Voraussetzung über Triangulierbarkeit gemacht. Es handelt sich um folgende drei Tatsachen: 1. Zu jeder Selbstabbildung f von \mathfrak{P}^n in sich und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine ε -Approximation f' von f , die nur endlich viele isolierte Fixpunkte besitzt. — Der Beweis verläuft so, daß zunächst eine entsprechende Tatsache im Kleinen, nämlich in einer n -dimensionalen Vollkugel, gezeigt wird. Da die Menge der Fixpunkte kompakt ist, kann sie durch endlich viele solche Umgebungen überdeckt werden, woraus sich der allgemeine Satz erschließen läßt. 2. Die algebraische Fixpunktzahl der Abbildung f bleibt bei Deformation von f invariant. — Der Beweis wird nur für ε -Deformationen geführt; der allgemeine Fall wird mit Hilfe eines noch nicht publizierten Satzes des Verf. über sogenannte normale Abbildungsscharen gefolgt. 3. Zwei zur gleichen Nielsen-Reidemeisterschen Fixpunktclass gehörende Fixpunkte lassen sich in einen einzigen Fixpunkt zusammenziehen. — Auch diese zuerst von Wecken für endliche Polyeder einer Dimension ≥ 3 mit gewissen Zusammenhangseigenschaften bewiesene Tatsache wird hier für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, wieder unter Voraussetzung von Zusammenhangseigenschaften und für $n \geq 3$, bewiesen. Der Beweis ist von dem Weckenschen unabhängig. Er behandelt zunächst den Sonderfall, daß die beiden zur selben Klasse gehörenden Fixpunkte in derselben zum \mathbb{R}^n homöomorphen Teilmenge von \mathfrak{P}^n enthalten sind. Im allgemeinen Fall wird der Weg, der die beiden Fixpunkte im Sinne der Definition

der Klassengleichheit verbindet, durch endlich viele solche Mengen überdeckt. Der Fall $n = 2$ bleibt nach wie vor offen. Wolfgang Franz.

Kneser, Martin und Dieter Puppe: Quadratische Formen und Verschlingungs-invarianten von Knoten. Math. Z. 58, 376–384 (1953).

Seifert (dies. Zbl. 11, 178) hat gezeigt, daß die quadratische Form eines Knotens die eindimensionale Homologiegruppe \mathfrak{H}^1 der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes aufgefaßt als Gruppe mit Verschlingung (V -Gruppe), eindeutig bestimmt. Puppe (dies. Zbl. 46, 168) zeigte, daß umgekehrt durch die V -Gruppe \mathfrak{H}^1 die Minkowskischen Einheiten des Knotens bestimmt sind. Verff. zeigen nun, daß durch die V -Gruppe \mathfrak{H}^1 sogar die quadratische Form des Knotens vollständig bestimmt ist. Hierzu ist der folgende rein algebraische Satz zu beweisen: Seien für zwei ganzzahlige symmetrische Matrizen A und B die V -Gruppen mit den Verschlingungsmatrizen A^{-1} bzw. B^{-1} von ungerader Ordnung und zueinander isomorph. Dann bestimmen A und B die „gleiche“ quadratische Form (in dem bekannten knotentheoretischen Sinn). — Die entscheidende Rolle beim Beweis des Satzes spielt die lokale Betrachtung der quadratischen Formen an den einzelnen Primstellen. Der Übergang zum Rationalen wird dann bewerkstelligt durch den Satz von Meyer [Vjschr. naturf. Ges. Zürich 36, 241–250 (1891)] über Geschlechter indefiniter quadratischer Formen. — Verff. bemerken noch, daß der obige Satz über ganzzahlige Matrizen A , B (unabhängig von seiner knotentheoretischen Bedeutung) auch ohne die Voraussetzung ungerader Ordnung richtig bleibt. Jedoch erfordert der Beweis dafür weitere Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen. E. Burger.

Theoretische Physik.

● **Stickland, A. C. (Executive editor): Reports on progress in physics.** Vol. XVI. London: The Physical Society 1953. 407 p. 2£, 10 s. net.

Die Arbeiten mathematisch-physikalischen Inhalts werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt; der Band wird unter der Abkürzung Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 16 geführt.

Born, Max: The conceptual situation in physics and the prospects of its future development. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 501–513 (1953).

Reulos, René: Échelle quantique des masses, des longueurs et des temps. J. Phys. Radium 14, 346–349 (1953).

● **Wallot, Julius: Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen.** Leipzig: Johann Ambrosius Barth-Verlag 1953. VIII, 216 S.

Verf. des eben erschienenen Buches war der erste, welcher es schon vor Jahren unternommen hatte, die Schwierigkeiten der Einheiten in Physik und Technik zu umgehen. Er führte die meisten Schwierigkeiten auf die Verwischung der physikalischen Größen mit ihren Zahlenwerten zurück und zeigte, daß eine strenge Trennung zwischen Größe und Zahlenwert den Ausweg aus diesem Dilemma bringt. Vorher wurden von den einzelnen Autoren immer wieder alle Schwierigkeiten auf das Fehlen eines allgemeinen Maßsystems zurückgeführt. Hierdurch traten dauernd Polemiken über das Problem der Einheiten auf, die in allen Zeitschriften seit einigen Dezennien festzustellen sind. Verf. kann daher für sich das Verdienst in Anspruch nehmen, Ordnung in die Schreibweise physikalischer Gleichungen gebracht zu haben und durch Mitarbeit im A. E. F. die Definitionen wichtiger Einheiten beeinflußt zu haben. Im Anfang traten dabei große Widerstände auf, die jedoch im Laufe der Zeit immer mehr überwunden wurden. Die Durchsicht des Werkes zeigt die große Klarheit und Prägnanz seiner Ausdrucksweise und verschafft dem Leser tiefe Einsicht in die Beziehungen zwischen den einzelnen physikalischen Größen. Ref. hatte selbst einmal vor Jahren Gelegenheit, die ausgezeichneten Ausführungen Wallots in Berlin zu diesen Fragen zu hören und konnte selbst feststellen, daß Betrachtungen dieser Art für die Kenntnis der Materie von großer Bedeutung sind. Als Beispiel hierfür kann speziell auf die elektromagnetischen Feldvektoren hingewiesen werden, deren Zusammenhang und Bedeutung aus den Betrachtungen Wallots zwangsläufig folgen. — Es ist daher nur zu begrüßen, daß eine Zusammenfassung aus so berufener Hand nunmehr vorliegt. Eine souveräne Zusammenstellung des Schrifttums und außerordentlich klare Tabellen ergänzen dieses für jeden Physiker und Techniker wirklich wertvolle Werk. P. Urban.

Whyte, L. L.: Dimensional theory: Dimensionless secondary quantities. Amer. J. Phys. 21, 323–325 (1953).

Roth-Desmeules, E.: Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Größen und ihre Anwendung. Elemente Math. 8, 60–62 (1953).

Kothari, L. S.: Application of Dirac's δ -function to some problems in classical physics. Amer. J. Phys. 21, 99–101 (1953).

Hosemann, R. und S. N. Bagchi: Begründung einer Algebra physikalisch beobachtbarer Funktionen mittels Faltungsoperationen. 1. Präzisionen, Funktionskomplex, Punktfunktionen, Fourier-Transformation eines Komplexes, Integro-Differentialoperator. *Z. Phys.* **135**, 50—84 (1953).

Um eine Mathematik zu entwickeln, welche nur solche Aussagen macht, die sicher beobachtbar sind, werden den physikalischen Zusammenhängen nicht einzelne Funktionen zugeschrieben, sondern Funktionskomplexe, bestehend aus der Gesamtheit all derer Funktionen, welche innerhalb der Meßfehler und innerhalb des Meßbereichs mit den Beobachtungen verträglich sind. Die einzelnen Funktionen des Komplexes unterscheiden sich in beliebiger Weise außerhalb des Meßbereichs und innerhalb des Meßbereichs auf Nullmengen sowie durch bei der Messung unauflösbare Fluktuationen. Die beobachtbaren Funktionsverläufe ergeben sich aus den wahren durch Faltung mit der Fehlerfunktion des Meßvorgangs. Die Betrachtung wird sowohl für eine beobachtbare Funktion der Zeit wie auch für deren Fouriertransformierte als Funktion der Frequenz durchgeführt. Der Beobachtungsfehler in der einen Variablen liegt dabei stets in der Größenordnung des reziproken Meßbereichs der anderen Variablen. — Einer eingehenden Betrachtung unterzogen wird der Komplex der Punktfunktionen, welche äquivalent sind der Diracschen Deltafunktion, jedoch hier präzise und ohne die der Deltafunktion anhaftenden Ungenauigkeiten und Fehlerquellen eingeführt werden (genau wie in der Schwarzschen Theorie der Distributionen). Durch fortgesetzte Faltung kann man aus den Punktfunktionen die Funktionen von „Multipolen“ erhalten, mit deren Hilfe man verallgemeinerte und auf beliebige Funktionskomplexe anwendbare Operatoren der Differentiation und Integration aufstellen kann. Durch den nachträglich durchgeführten Grenzübergang nach verschwindenden Meßfehlern kann man aus der vorliegenden Theorie die klassischen Theorien der Fouriertransformation und der Diracschen Deltafunktion erhalten und die dort bei der Beschränkung auf das Reelle auftretenden Schwierigkeiten und Unsicherheiten vermeiden. Walter Franz.

Elastizität. Plastizität:

Krettnner, J.: Elastostatische Grundformeln für allgemeine krummlinige Koordinaten. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **7**, 11—21 (1953).

Darstellung der Grundformeln der Elastizitätstheorie in krummlinigen Koordinaten. Besonders Zylinder- und Kugelkoordinaten. Konsequente Anwendung der Tensorrechnung. Rückgriff auf Elementarkörper unnötig, da die Spannungen von vornherein als Tensor angesehen werden. Verf. kennt offenbar ältere Untersuchungen wie die von Deuker nicht. Als Deformationstensor wird ohne weiteres der symmetrische Teil der vollständigen Ableitung der Verschiebung angenommen, ohne zu sagen, daß dies nur für sogenannte unendlich kleine Deformationen richtig ist. G. Hamel.

Grioli, Giuseppe: Proprietà di media ed equilibrio elastico. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **1**, 68—77 (1953).

Für die inneren und die äußeren Kräfte bei einem elastischen System werden Momente höherer Ordnung (coordinate astatiche ed iperastatiche) gebildet und durch die statischen Gleichungen miteinander in Verbindung gesetzt. Ausdehnung früherer Untersuchungen von Signorini [*Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat.*, II. Ser. **2**, 231—251 (1933)]. Die Spannungen werden nun nach einem Orthogonalsystem des Bereiches entwickelt und die zugehörigen Näherungen nach dem Theorem von Menabrea berechnet. G. Hamel.

Platrier, Charles: Conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation totale dans une transformation finie d'un milieu à trois dimensions. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **39**, 490—494 (1953).

Es sei im deformierten Zustand $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ der Ort des Ausgangspunktes $\mathbf{a} = (a_1, \hat{a}_2, a_3)$. Aus der Funktionalmatrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ mit $a_{ik} = \partial x_i / \partial a_k$ werde der übliche Verzerrungstensor $\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}'\mathfrak{A} - \mathfrak{E})$ gebildet. Im Falle infinitesimaler Deformationen gelten die St. Venantschen Integrabilitätsbedingungen: $\text{rot } \mathfrak{T} \text{ rot} = 0$. Es wird gezeigt, daß sich im allgemeinen Falle die Komponenten von $\text{rot } \mathfrak{T}$ rot durch nicht explizit wiedergegebene Ausdrücke in den Komponenten t_{ik} von \mathfrak{T} und den partiellen Ableitungen erster Ordnung der t_{ik} nach den a_v darstellen lassen.

H. Richter.

Jung, H.: Ein Beitrag zur nichtlinearen Elastizitätstheorie. Ingenieur-Arch., 21, 194—207 (1953).

Isotropes Material sei statisch verzerrt, wobei der Vektor \mathbf{x} des Ausgangszustandes in \mathbf{x} übergeht. Ausgehend von $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ sei der auf \mathbf{x} bezogene Verzerrungstensor \mathfrak{E} eingeführt mit den Invarianten $J_i = \rho$ -te Elementarsymmetrische der Eigenwerte γ_i von \mathfrak{E} , \mathfrak{P} mit den entsprechenden Invarianten P_i sei der Spannungstensor an der Stelle \mathbf{x} . $\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{P}}$ sind die Deviatoren. In Übernahme der für statische plastische Deformationen experimentell gefundenen Beziehung $\sigma_i = f_1(e_i)$ zwischen Spannungs- und Dehnungsintensität, $\sigma_i^2 = 2 P_1^2/3 - 2 P_2 = \text{Spur}(\tilde{P}^2)$, in das elastische Gesetz wird vorgeschlagen: (*) $\mathfrak{P} = \mathfrak{E} \cdot g(e_i) + J_1 \cdot f_2(J_1/3) \cdot \mathfrak{E} \cdot 3$. g und f_2 heißen bzw. Schub- und Kompressionsfunktion [obwohl geometrisch weder J_1 die Kompression, noch e_i die Gestaltänderung bei endlichen Deformationen charakterisieren; auch wird nicht beachtet, daß (*) weder für adiabatische noch für isotherme Verzerrungen thermodynamisch zulässig ist]. — Spezialisierung von (*) auf verschiedene homogene Verzerrungszustände: reine Kompression, einachsiger Zug, Torsion u. a. — Aus den Formeln für ebene Verzerrungszustände baut Verf. für einfache Belastungsarten einer Platte eine technische Biegelehre mit Berücksichtigung von Gliedern bis zur zweiten Ordnung auf, die nicht konsistent ist, da im Ansatz Glieder vernachlässigt werden, die sich in der Lösung als von gleicher Größenordnung erweisen wie die größten mitgenommenen.

H. Richter.

Ševčenko, K.: Das ebene Problem für ein unendliches elastisches Medium, das durch ein kreiszylindrisches Gebiet geschwächt ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 89, 799—800 (1953) [Russisch].

Eine durch ein kreisrundes Loch geschwächte Vollebene sei an zwei diametral entgegengesetzten Punkten des Kreises durch radiale Druckkräfte p belastet und überdies axialsymmetrisch mit der Intensität σ_0 im Unendlichen zusammengedrückt. Der Lochrand soll dabei, von den beiden konzentrierten Kräften abgesehen, spannungsfrei bleiben. Verf. bestimmt die hierfür notwendige Relation zwischen p und σ_0 in einfacher Weise, indem er, ähnlich wie in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 179), von Bipolarkoordinaten Gebrauch macht. Die Lösung gilt auch für ein unendliches Medium, das durch einen kreiszylindrischen Hohlraum geschwächt ist.

S. Woinowsky-Krieger.

Litvinov, M. V.: Die Lösung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie für einen unendlichen Streifen nach der Differenzenmethode. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1953, Nr. 2, 117—120 und russisch. Zusammenfassg. 121 (1953) [Ukrainisch].

Trenin, S. J.: Über die Lösungen der Gleichungen für das Gleichgewicht im axialsymmetrischen Problem der Elastizitätstheorie. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1) 7—13 (1953) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine Übersicht der zur Lösung des axialsymmetrischen Problems bisher eingeführten Spannungsfunktionen, deren Anzahl je nach ihrer Wahl drei (Papkovič, Galerkin), zwei (Trenin, C. Weber, Grodski) oder eins (Love, Marguerre) sein kann. Verf. zeigt, daß zwei Spannungsfunktionen im allgemeinsten Fall genügen, während einer einzigen Funktion eine gewisse Sonderlösung des allgemeinen Problems entspricht. Einige Lösungen erfüllen dabei die Gleichgewichtsbedingungen des elastischen Körpers bei ganz willkürlicher Wahl der betreffenden Spannungsfunktion, wodurch die Anwendung der Castiglianoschen Methode zur Befriedigung der Kompatibilitätsbedingungen besonders bequem gemacht wird. Abschließend wird der Zusammenhang zwischen verschiedenen Systemen von Spannungsfunktionen diskutiert und auf die Möglichkeit, durch speziellere Wahl einer Spannungsfunktion ihre Anzahl zu verringern, hingewiesen.

S. Woinowsky-Krieger.

Chong, Frederick: Solutions by dual integral equations of mixed boundary value problems in elasticity. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 143—144 (1953).

Plainevaux, J. E.: Équilibre d'un ensemble de rotors montés sur un arbre rectiligne porté par des paliers flexibles alignés. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 330—335 (1953).

Merlino, Francesco Saverio: Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 231—237 (1953).

Für die elastisch gebettete Platte mit konstanter Bettungsziffer und konstanter Dicke werden einige kreissymmetrische Lösungen der Differentialgleichung diskutiert.

H. Neuber.

Schultz-Grunow, F.: Greensche Funktionen für elastische Platten. Z. angew. Math. Mech. 33, 227—237 (1953).

Die Greenschen Funktionen (Einflußflächen) werden als Bipotentialfunktionen durch konforme Abbildung des eckigen Bereiches auf den Kreis aus analytischen Funktionen im Kreise so zusammengesetzt, daß erst die durch die Ecken entstehenden Singularitäten, die man nach H. A. Schwarz bestimmen kann, geglättet werden, worauf man durch weitere einschließlich des Randes reguläre Funktionen, etwa Potenzen, sehr schnell eine befriedigende Annäherung erreichen kann. G. Hamel.

Berger, E. R.: Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 39—49 (1953).

Zur Lösung der Differentialgleichung der dünnen elastischen Platte benutzt man häufig einen Ansatz, dessen Glieder einzeln die homogene Gleichung erfüllen, die Randbedingung indessen verletzen. Die Beiwerte des Reihenansatzes sind dann so zu ermitteln, daß die Randbedingungen durch die berücksichtigten Reihenglieder möglichst genau angenähert werden. Als ein Merkmal der besten Annäherung wird am häufigsten die Summe der Fehlerquadrate verwendet. Dies Verfahren hat aber den grundsätzlichen Nachteil, daß die einzelnen Summanden der Quadrate der Durchbiegungen und ihrer Ableitungen verschiedene Dimensionen haben und daher mit dimensionsbehafteten Gewichten multipliziert werden müssen, damit sie überhaupt summiert werden können. Auf diese Tatsache, die früher vielfach übersehen wurde, weist L. Col-latz (Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1951, S. 323, dies. Zbl. 44, 331) ausdrücklich mit der Bemerkung hin, daß bei günstiger Wahl der Gewichte bessere Ergebnisse erzielt werden können. — Verf. stellt fest, daß Anhaltspunkte für eine günstige Wahl dieser Gewichte fehlen und daß höchstens die Endresultate verglichen werden können. Falls eine strenge Lösung zum Vergleich nicht vorliegt, wird es auch schwer zu entscheiden sein, welches Resultat am genauesten sein wird. Verf. zeigt daher einen Weg, der der willkürlichen Festsetzung der Gewichte ausweicht und der eine Erweiterung des Verfahrens von E. Trefftz zur Lösung des Potentialproblems darstellt [I. Internat. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1927, S. 131—137 (1927)]. Aus dem Satz vom Minimum der potentiellen Energie wird ein zweites Minimalprinzip abgeleitet, wobei auf die Befriedigung der Randbedingungen verzichtet, dagegen die Erfüllung der Plattengleichung vorgeschrieben wird. Gegenüber der Methode, die Summe der Fehlerquadrate am Rande zu einem Minimum zu machen, hat das neue Verfahren den Vorteil, daß es keine beliebig wählbaren Gewichte enthält.

R. Gran Olsson.

Worsing, Robert A.: Integral equation solutions of elastic plate problems. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 280—281 (1953).

Hamel, Georg: Über die Theorie der dünnen, schwachgebogenen Platten. Herrn R. von Mises zum 70. Geburtstag. Z. angew. Math. Mech. 33, 138—143 (1953).

In der klassischen Theorie der Plattenbiegung gelten die Gleichgewichtsbedingungen: $\partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y + p = 0$, $\partial M_x / \partial x + \partial H / \partial y - Q_x = 0$, $\partial M_y / \partial y + \partial H / \partial x - Q_y = 0$, wo $p(x, y)$ die Belastung, Q_x und Q_y die Querkraft in Schnitten $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, M_x und M_y die Biegemomente und H das Drillungsmoment ist, das in beiden Schnitten aus Gleichgewichtsgründen gleich groß ist, wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Demgegenüber stellt Verf. an Stelle der beiden letzteren Gleichungen die folgenden auf: $\partial M_x / \partial x - \partial T_y / \partial y - Q_x = 0$, $\partial M_y / \partial y + \partial T_x / \partial x - Q_y = 0$. Verf. schreibt: „Es gibt keinen Grund $T_x + T_y = 0$ anzunehmen“, und weiter: „ $T_x + T_y \neq 0$ zu beachten, ist keine willkürliche Annahme, sondern exakte Folgerung aus der klassischen Lagrangeschen Mechanik. T_x und T_y sind die Torsionsmomente in den Schnitten $x = \text{const}$ bzw. $y = \text{const}$ “. Wenn die Annahmen von G. Kirchhoff zugrunde gelegt werden, erhält man drei Randbedingungen, nämlich für das Biegemoment M , für die Querkraft Q (vom Verf. als „Normalspannung“ bezeichnet) und für das Torsionsmoment T . Weiter besteht die klassische

Gleichung der Plattentheorie $N \Delta w = p(x, y)$, wo $N = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ die Biegesteifigkeit, w die Durchbiegung der Mittelebene der Platte, $\Delta =$ Laplacescher Operator. Ist die Plattengleichung mit den Randbedingungen für w integriert, kann man aus diesen M , $\mu = (T_x + T_y)/2$ und $Q = dT/ds$ berechnen. Man kann aber auch M , Q und T , den Bedingungen der allgemeinen Mechanik entsprechend, vorschreiben, bekommt zwei Randbedingungen für w aus den Bedingungen für M und Q und kann danach μ berechnen, das im allgemeinen nicht Null sein wird. Die vom Verf. eingeführten Konstanten A und B entsprechen bei der zweidimensionalen Theorie $A = -E/4(1+\nu)$, $B = E/8(1-\nu^2)$ mit ν als Poissonsche Zahl. — Verf. weist auf sein Buch [Hamel, Theoretische Mechanik, Berlin 1949, S. 166; dies. Zbl. 36, 243] hin, wo die Randbedingungen für Biege- und Torsionsmoment angegeben sind. Dazu ist zu bemerken, daß in der ersten Gleichung auf S. 166 der Buchstabe B in zwei ganz verschiedenen Bedeutungen benutzt wird, nämlich gemäß der zweiten Gleichung auf S. 152 $M = B \epsilon r \epsilon s + T \epsilon r \epsilon r$ als Biegemoment B und zweitens gemäß Zeile 11 von oben auf S. 161 als eine in den Ausdruck für das Potential eingehende Konstante. Infolgedessen enthalten viele Gleichungen auf S. 161 bis 166 den Buchstaben B in doppelter Bedeutung, was für die vorliegende, auf diesem Buch fußende Arbeit als ziemlich störend empfunden wird, zumal da auch diese einige störende Druckfehler enthält. R. Gran Olsson.

Kirste, L.: Elastische Verformung einer dünnen Platte nach einer abwickelbaren Fläche. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 134–139 (1953).

Bei sehr kleinen Verdrehwinkeln entspricht die Drillsteifigkeit einer sehr dünnen Platte noch der Theorie von Saint-Venant. Durch die schraubenartige Verzerung entstehen bei weiter zunehmender Drillbeanspruchung wesentliche Längsdehnungen, welche zu einer parabolischen Längsspannungsverteilung Anlaß geben; diese Längsspannungen liefern einen zweiten Beitrag zum Drillmoment und damit zur Drillsteifigkeit. Weiterhin stellt sich bei zunehmender Verformung die Überlagerung eines reinen Verbiegungszustandes der Platte zu einer abwickelbaren Fläche (Torse) ein. Verf. berücksichtigt auch diesen Effekt mit einfachen Näherungsformeln und diskutiert Versuchsergebnisse an einer Stahlplatte. H. Neuber.

Müller, W.: Die Momentenfläche der elastischen Platte oder Pilzdecke und die Bestimmung der Durchbiegung aus den Momenten. Ingenieur-Arch. 21, 63–72 (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 47, 429) hat Verf. für mehrere Belastungsfälle die Durchbiegung von rechteckigen Platten und durchgehenden Pilzdecken formelmäßig und in Schichtenplänen dargestellt. Als Ergänzung dazu werden in der vorliegenden Arbeit zwei beachtenswerte Sonderfälle behandelt, nämlich der Fall der frei aufliegenden Platte mit Punktbelastung und die durchlaufende Pilzdecke mit verschwindenden Stützflächen. Dies geschieht namentlich, um die Momentensumme oder die Niveaulinien der entsprechenden Flächen mit Hilfe der Thetafunktionen bis zur zahlenmäßigen Auswertung zu ermitteln und schließlich an dem Sonderfall der vereinfachten Pilzdecke die Frage zu beantworten, wie man die Umkehrung der Δ -Operation in einem gegebenen Fall ausführen kann. Statisch bedeutet dies die Berechnung der Durchbiegung aus den Momenten unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen. Einige kleinere Druckfehler (wie z. B. im Text zur Abb. 5 auf S. 67 sowie auf S. 70 Zeile 9 v. oben) sind vorhanden. R. Gran Olsson.

Fung, Y. C.: Bending of thin elastic plates of variable thickness. J. aeronaut. Sci. 20, 455–468 (1953).

Für Platten mit freien Rändern sind wenige Lösungen, selbst im Fall konstanter Dicke, bekannt, mit Ausnahme der Platten mit zwei gegenüberliegenden, frei gestützten Rändern. Numerische Lösungen sind wegen der Schwierigkeit der Erfüllung der Randbedingungen an freien Rändern mit zweifelhaftem Erfolg versucht worden. Ein erfolgreiches Verfahren von R. V. Southwell [Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford 1946; sowie Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 50, 15–56 (1951); Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 239, 419–460 (1945)] formulierte das Problem der Biegung dünner Platten auf zwei verschiedene Weisen, ähnlich wie die beiden wohlbekannten Formulierungen des ebenen Spannungs- oder Formänderungszustandes. Das eine Verfahren benutzt die Durchbiegung der Platte als unbekannt, das andere verwendet zwei Funktionen, die den Verschiebungen des ebenen Spannungsproblems entsprechen, wobei jedes Verfahren seine besonderen Vorteile in bezug auf gewisse Randbedingungen hat. In der

vorliegenden Arbeit werden die Gleichungen von Southwell von einem neuen Gesichtspunkt abgeleitet und auf Platten von veränderlicher Dicke und gemischten Randbedingungen erweitert. Die Biege- und Torsionsmomente sowie die Querkräfte in der Platte sind durch zwei Spannungsfunktionen U und V ausgedrückt. Die Randbedingungen haben eine solche Form, daß an einem nicht gestützten Rand die Werte von U und V am Rande bekannt sind und daß an einem eingespannten Rand die ersten Ableitungen von U und V bekannt sind. Diese neue Formulierung ist daher besonders zweckmäßig bei Platten mit freien Rändern, für welche die klassische Formulierung von G. Kirchhoff, ausgedrückt mit Hilfe der Durchbiegung, ungeeignet ist, weil die Randbedingungen die zweite und dritte Ableitung enthalten. Die Theorie wird auf eine quadratische Platte mit linear veränderlicher Dicke angewandt (der Querschnitt hat die Gestalt eines doppelten Keils). Die Platte ist an zwei sich diagonal gegenüberliegenden Ecken unterstützt und durch zwei gleich große Kräfte an den beiden anderen Ecken belastet. Diese Belastung wurde wegen der Einfachheit der experimentellen Verwirklichung gewählt, die auch ausgeführt wurde. Durchbiegung und Spannungen wurden mit Hilfe der Iterationsmethode gefunden. Der bedeutende Einfluß der Veränderlichkeit der Dicke auf die Spannungsverteilung wird durch Vergleich der Ergebnisse mit denjenigen der genauen Lösung der Platte von konstanter Dicke bei gleicher Belastung nachgewiesen. Die theoretischen Ergebnisse stimmen innerhalb der geschätzten Fehler der experimentellen Resultate mit diesen überein. Dies zeigt, daß die Formulierung des Problems der Plattenbiegung bei veränderlicher Dicke vernünftig ist. Der Einfluß der Dickenänderung und die Brauchbarkeit der Methode sind weiter nachgewiesen an den Ergebnissen der Biegung einer quadratischen Platte mit gleichmäßig verteilten Randmomenten sowie eines eingespannten Flugzeugflügels, deren Dicke nach hinten linear abnehmend ausgebildet ist.

R. Gran Olsson.

Johnson jr., James H. and Robert G. Noel: Critical bending stress for flat rectangular plates supported along all edges and elastically restrained against rotation along the unloaded compression edge. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 535—540 (1953).

Jušenko, O. A.: Große Verbiegungen einer rechteckigen Membran. *Dopovidi Akad. Nauk ukrain. RSR* **1953**, Nr. 2, 103—106 und russisch. Zusammenfassg. 106 (1953) [Ukrainisch].

Okubo, H.: The torsion of spiral rods. *J. appl. Mech.* **20**, 273—278 (1953).

Durch Transformation der elastischen Grundgleichungen auf Schraubenkoordinaten gelangt Verf. zu Ausgangsgleichungen für die Berechnung des Spannungszustandes in Schraubenfedern. Für zwei Sonderfälle, und zwar für sehr schwache und sehr starke Steigung der Schraubenfeder, lassen sich die Spannungen auf zweidimensionale Spannungsfunktionen zurückführen. Für kreisförmigen Querschnitt des Federdrahtes wird ein Beispiel angegeben.

H. Neuber.

Schwarz, M. J. de: Über das Verhalten der Torsionsfunktion in der Nähe von einspringenden Ecken massiver und hohler Stäbe. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **7**, 88—100 (1953).

L'A., proseguendo le ricerche di altri Autori, sull'argomento, assegna delle condizioni sufficienti per la sezione retta di un prisma sottoposto a torsione, affinché, applicando un metodo dato in precedenza da altro autore, si possa stabilire che in prossimità degli spigoli rientranti si presenta una concentrazione di sforzi.

G. Fichera.

Green, A. E. and E. W. Wilkes: A note on the finite extension and torsion of a circular cylinder of compressible elastic isotropic material. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 240—249 (1953).

Die allgemeine Lösung des Problems wird nach Potenzen des Torsionswinkels entwickelt und diskutiert.

G. Leibfried.

Huth, J. H.: Thermal stresses in conical shells. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 613—616 (1953).

Rostovcev, N. A.: Zur Lösung des ebenen Kontaktproblems. *Priklad. Mat. Mech.* **17**, 99—106 (1953) [Russisch].

Beim ebenen Problem findet sich die Pressung $p(x)$ auf der Berührungsstrecke $-a \leq x \leq a$ zwischen zwei Scheiben als Lösung der Integralgleichung

$$(1) \quad \int_{-a}^{+a} p(t) \log \left| 1 - \frac{x}{t} \right| dt + f(x) = \text{const.},$$

wo $f(x)$ durch die Elastizitätskonstanten und die ursprüngliche Begrenzung der beiden Körper gegeben ist. I. Y. Štaerman (Das Kontaktproblem der Elastizitätstheorie, Moskau 1949, dies. Zbl. 39, 405; insbesondere S. 99) gibt die Lösung von (1) in Form eines singulären Integrals. Hingegen wird Gl. (1) vom Verf. auf eine Volterrasche Integralgleichung erster Art zurückgeführt, die sich durch gewöhnliche Integrale auflösen läßt. Als Beispiel wird die punktförmige Berührung zweier Scheiben, insbesondere die zwischen einem Keil und einer Ebene behandelt. Schließlich wird in einigen Sonderfällen die Maximalpressung auf Grund der gewonnenen Lösung abgeschätzt.

S. Woinowsky-Krieger.

Panferov, V. M.: Das ebene Problem der Theorie der kleinen elastoplastischen Deformationen. Vestnik Moskovsk. Univ. 8, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 2), 45—68 (1953) [Russisch].

Behandelt wird das Problem der ebenen Deformations- und Spannungszustände in einfach zusammenhängenden Gebieten der x - y -Ebene mit stückweise stetig differenzierbarem Rand Γ für elasto-plastische Medien, deren Stoffgesetz beschrieben wird durch: $\sigma = 3ke$ und $\sigma_i = 3G e_i \cdot [1 - \omega(e_i)]$ mit elastischen Materialkonstanten k und G ; σ = mittlere Spannung; e = mittlere Dehnung; σ_i und e_i sind bzw. Spannungs- und Deformationsintensität; $\omega(e_i) \neq 0$ für $e_i > e_s$, $\omega(e_i) = 0$ für $e_i \leq e_s$. Vorgeschrieben sind Volumkräfte und die Kräfte längs Γ . Zur Lösung dient die Iljuschinsche Methode der elastischen Spannungen: Der Term $3G e_i \cdot \omega(e_i)$ des Stoffgesetzes erscheint in den Spannungs-Gleichgewichtsbedingungen und den Randbedingungen in der Gestalt von fiktiven Zusatzkräften höherer Ordnung, so daß als Iterationsverfahren die sukzessive Lösung der entsprechenden rein-elastischen Aufgabe angesetzt wird mit den Zusatzkräften aus der jeweils vorigen Näherung, beginnend mit Zusatzkräften = 0. Die Elimination der Verschiebungen aus dem Iterationsverfahren führt zu einem Gleichungssystem der Gestalt: (*) $\Delta W_{k+1} = F_k$ für die Spannungsfunktion W_{k+1} der $(k+1)$ -ten Näherung mit $F_k(W_k)$; für Randbedingung analog. — Lösung von (*) nebst Randbedingungen nach der funktionentheoretischen Methode. — Durchgerechnet bis zur zweiten Näherung sind: Biegung eines Balkens durch Drehmomente, die an den Enden angreifen; Biegung eines Sektors eines Kreisrings. Die Ergebnisse sind in Diagrammen und Tabellen niedergelegt. H. Richter.

Richter, Hans: Elasto-plastische Reflexion eines Stabes. Z. angew. Math. Mech. 33, 237—244 (1953).

Ein spannungsfreier Stab von konstantem Querschnitt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf eine feste Wand; beim Aufprall wird die Fließgrenze σ_s des Stabmaterials überschritten. Die Reflexion des Stabes und die sich ausbildende Stoßwelle werden untersucht. Aus der Gleichgewichtsbedingung, der Superposition der Gesamtdehnung aus elastischem und plastischem Anteil und dem Fließgesetz, daß für $\sigma > \sigma_s$ die zeitliche Abhängigkeit der plastischen Dehnung proportional ist zu $\sigma - \sigma_s \cdot \text{sign } \sigma$, ergibt sich ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen für $v(x, t)$ und $\sigma(x, t)$. Die Störungen pflanzen sich längs der Charakteristiken fort. Hinter den rein elastischen Wellenköpfen breitet sich die plastische Deformation aus. Das Verhalten des unendlich langen Stabes läßt sich leicht diskutieren. Beim Stab endlicher Länge kann die Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Bereich nur durch schrittweise Charakteristikenintegration verfolgt werden. Für zwei Intervalle von v_0 wird dies erläutert und die Bewegungslinien des Stabes im x, t -Diagramm einschließlich der Wellenfronten und der Wirkungslinien des Ablösevorganges von der Wand gezeichnet. Endlich wird die Abhängigkeit der Reflexionsdauer resp. des Restitutionskoeffizienten von v_0 bei fester Stablänge rechnerisch und graphisch bestimmt.

R. Moufang.

Bishop, R. E. D.: On dynamical problems of plane stress and plane strain. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 250—254 (1953).

Verf. diskutiert die Grundgleichungen der Elastodynamik für die beiden Sonderfälle des ebenen Spannungs- und Formänderungszustandes. Am Beispiel der symmetrischen Wellenbewegung wird der Unterschied des Wertes der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit numerisch untersucht.

H. Neuber.

Grilikij, D. V.: Die Kompression zweier elastischer, anisotroper Körper bei Berücksichtigung der Reibungskräfte. (Das ebene Problem.) Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1953, Nr. 2, 122—126 und russisch. Zusammenfassg. 126 (1953) [Ukrainisch].

Mencher, Alan G.: Epicentral displacement caused by elastic waves in an infinite slab. J. appl. Phys. 24, 1240—1246 (1953).

Verf. behandelt folgendes Problem: In einer ebenen elastischen Schicht von

der Dicke D , die für $t < 0$ in Ruhe ist, beginnt zur Zeit $t = 0$ in der Mittelebene eine Störung von rechteckiger Form zu wirken. Gesucht sind Spannungs- und Verzerrungszustand in der Schicht, deren Oberfläche spannungsfrei sein soll. Die Aufgabe wird mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst. Wegen der komplizierten Form der Lösung wird der Verschiebungszustand nur für $\varrho = 0$, $z = -\frac{D}{2}$ (ϱ, z Zylinderkoordinaten) genauer untersucht. Selbst in diesem Spezialfall erscheint die Lösung als unendliche Reihe, deren Konvergenz nicht völlig gesichert ist.

A. Weigand.

Reckling, K. A.: Die dünne Kreisplatte mit pulsierender Randbelastung in ihrer Mittelebene als Stabilitätsproblem. Ingenieur-Arch. 21, 141—147 (1953).

Verf. wendet ein Verfahren der Störungsrechnung, das er bereits in einer früheren Arbeit benutzte (dies. Zbl. 48, 186), auf das elastokinetische Stabilitätsproblem der durch pulsierende Radialbelastung beanspruchten Kreisplatte an. Durch Entwicklung der Lösung der auftretenden Differentialgleichung nach wachsenden Potenzen des die Lastpulsation kennzeichnenden Parameters ergibt sich ein System von sukzessiv zu lösenden partiellen Differentialgleichungen. Nach Abspaltung der Zeitfunktionen (durch periodische Ansätze), sowie der vom Zentriwinkel abhängigen, ebenfalls periodischen Funktionen ergeben sich für die funktionale Abhängigkeit vom Radius zwei Gruppen Besselscher Funktionen. Hierbei konnte Verf. an Untersuchungen von Federhofer [Ingenieur-Arch. 6, 68 (1935)] anknüpfen. Nach Aufstellung der Eigenfrequenzen wird die Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe eines von Kucharski (dies. Zbl. 40, 396 und 397) angewandten Verfahrens durchgeführt und an Hand eines Beispiels diskutiert.

H. Neuber.

Federhofer, K.: Die Frequenzgleichung der Biegungsschwingungen des dreifach gestützten Trägers mit einer Punktmasse und gleichförmiger Auflast. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 26—32 (1953).

Caligo, Domenico: Nuovi complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 36—42, 223—230 (1953).

In Teil I handelt es sich um die Berechnung der Eigenfrequenz und einiger Integrale, welche zum Problem eines einseitig freien und anderseitig elastisch eingespannten Stabes gehören. Dieser Stab wird der Wirkung einer über seine Länge verteilten Kraft unterworfen, welche eine einwellige Funktion der Zeit ist. Die Eigenwerte gehen aus einem Variationsproblem hervor. Bei Annahme von Lösungen dieser Aufgabe ergeben sich unmittelbar die Formeln für die Eigenfrequenzen. Im vorliegenden Falle ergeben sich hierfür transzendente Gleichungen mit trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Die Anwendung der Gleichungen wird an einem Zahlenbeispiel illustriert. In Teil II werden die Eigenfunktionen des schwingenden Stabes angegeben. Mit Hilfe dieser Eigenfunktionen berechnet der Verf. eine Anzahl von Integralen, welche bei der Lösung des Problems der erzwungenen Schwingungen eine Rolle spielen. In 5 Tabellen werden numerische Werte für die Eigenfrequenzen und für diese Integrale in einzelnen Fällen angegeben.

M. J. O. Strutt.

Traill-Nash, R. W. and A. R. Collar: The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 186—222 (1953).

Die Arbeit gibt eine beinahe vollständige theoretische Behandlung des Problems der Querschwingungen eines Balkens von konstantem Querschnitt, wenn die Biegung infolge von Querkraften und rotatorischer Trägheit in Betracht gezogen wird. Frequenzgleichungen und Schwingungsformen sind für die neun Fälle gegeben, die durch die verschiedenen Kombinationen der drei üblichen Typen der Unterstützung definiert sind (volle Einspannung, freie Unterstützung, und frei schwebend). Besondere Aufmerksamkeit ist dem Fall der höheren Frequenzen gewidmet.

Von besonderem Interesse ist das Vorhandensein eines zweiten Spektrums von Frequenzen, das früher nicht bemerkt worden ist. Es werden Formeln gegeben, mit deren Hilfe es möglich gemacht wird, die Wirkungen der Querkkräfte und der rotatorischen Trägheit abzuschätzen als Korrekturen der Ergebnisse von Untersuchungen, bei denen diese Größen vernachlässigt wurden. Zwei numerische Beispiele erläutern das Zustandekommen des oben genannten zweiten Spektrums. — Der zweite Teil der Arbeit beschreibt eine experimentelle Untersuchung, vorgenommen an besonderen Typen von Balken mit Kastenquerschnitt, wobei ausgezeichnete Übereinstimmung mit den im ersten Teil berechneten Frequenzen erhalten wird. Diese Untersuchung zeigt einen wesentlichen Einfluß der Querkkräfte und einen verhältnismäßig kleinen Einfluß der rotatorischen Trägheit beim Balken mit Kastenquerschnitt moderner Bauart. Die Arbeit schließt mit einer kurzen theoretischen Studie über den Querkrafteffekt an Balken mit konzentrierten Einzelmassen statt der kontinuierlich verteilten Masse eines Balkens von veränderlichen Querschnitten, wie es beispielsweise an Flugzeugflügeln der Fall ist. Insbesondere wird der Einfluß der Querkkräfte (aber nicht der rotatorischen Trägheit) auf die Biegeschwingungen eines Flügels des Flugzeuges Bristol Brabazon I untersucht. Auch beim Balken von veränderlichem Querschnitt ist der Einfluß der Querkkräfte bedeutend.

R. Gran Olsson.

Lindholm, Einar: The vibrations and bending of pre-stressed circular plates. Ark. Fys. 6, 223—242 (1953).

Diese Arbeit enthält eine Untersuchung über die Transversalschwingungen einer Kreisplatte mit Hilfe der Methoden der Variationsrechnung. Die Platte rotiert, hat eine symmetrische Temperaturverteilung, und einen freien Außenrand, während der Innenrand längs eines Kreises eingespannt ist. Die Temperaturverteilung entsteht durch Erwärmung des Umfanges und durch eine gleichmäßige Erwärmung der mittleren Zone der Platte, entsprechend den Anfangsdruckspannungen an dieser Stelle. Es werden Schwingungen mit verschiedener Anzahl von Durchmessern als Knotenlinien untersucht. Die Randbedingungen, die bei der Untersuchung einer Platte mit einem freien Rand erfüllt werden müssen, werden diskutiert. Diese Erörterung erleichtert die Wahl der Funktion zur Lösung des Problems mit den Methoden der Variationsrechnung. Die Untersuchung erstreckt sich weiter auf die Erscheinungen der Resonanz, die entstehen, wenn die wandernden Transversalwellen dieselbe Geschwindigkeit haben wie die rotierende Platte. Es wird rechnerisch nachgewiesen, wie die Frequenzen der Resonanz von der Anzahl der Knotendurchmesser, der Winkelgeschwindigkeit und der Temperaturverteilung abhängen. Zum Schluß wird die Biegung einer gleichmäßig belasteten Platte untersucht, wenn die Platte in zwei Endpunkten eines Durchmessers unterstützt und in der inneren Zone gleichmäßig erwärmt wird. Diese Berechnung macht einen quantitativen Vergleich mit Messungen der Anfangsspannungen in der Platte möglich. Die Ergebnisse werden auf die Stabilität von Kreissägen angewandt, die zum Holzsägen benutzt werden. Vgl. auch eine frühere Arbeit des Verf. [Teknisk Tidskrift 80, 243—247 (1950)].

R. Gran Olsson.

Päsler, M.: Die thermische Dämpfung elastischer Schwingungen. Z. Phys. 136, 67—73 (1953).

Nardini, Renato: Sull'energia dissipata da forze periodiche per isteresi elastica. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 534—536 (1953).

Anders, Till: Beugung akustischer Wellen an einer kleinen kreisförmigen Öffnung. Z. Phys. 135, 219—224 (1953).

Die Beugung an der kreisförmigen Öffnung wird mittels des Hönlschen Verfahrens (dies. Zbl. 46, 431) behandelt, d. h. also auf die Lösung zweier simultaner Integralgleichungen für die Fouriertransformierte der Wellenamplitude zurückgeführt. Die eine der Integralgleichungen wird durch einen geeigneten Reihenansatz nach Besselfunktionen gliedweise erfüllt, und die Koeffizienten aus der zweiten Integralgleichung für den Grenzfall Radius der Öffnung klein gegen die Wellenlänge näherungsweise bestimmt.

Walter Franz.

Escande, Léopold et Roger Huron: Conditions de stabilité des oscillations dans deux chambres d'équilibre placées sur les systèmes d'amenée et de fuite d'une usine. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 1405—1407 (1953).

Hydrodynamik:

• **Küchemann, Dietrich and Johanna Weber:** Aerodynamics of propulsion. New York-London-Toronto: McGraw-Hill Publishing Co., Ltd., 1953. X, 340 p.

Auf der Grundlage der nach Kriegsende von der Göttinger Aerodynamischen Versuchsanstalt herausgegebenen „Monographien“ der deutschen Luftfahrtforschung haben die beiden

heute in England lebenden Verff. diejenigen Teile, die sich auf die Aerodynamik des Vortriebs beziehen, neu bearbeitet und in Form eines Lehrbuches (mit eingestreuten Übungsaufgaben) zusammengefaßt. Der Inhalt des Buches ist freilich weit begrenzter, als es der Titel vermuten läßt. Alle Probleme, die sich auf Propeller, Verdichter, Turbinen und Kolbenmaschinen beziehen, sind weggelassen, weil Verff. berechtigterweise meinen, daß hierfür bereits gute Lehrbücher zur Verfügung stehen. Bei der Auswahl der Probleme hat die Neigung der Verff. für mathematisch lösbare Probleme eine nicht unwesentliche Rolle gespielt, so daß das Buch eher eine allerdings ausgezeichnete Einführung in die Grundlagen des Strahltriebwerkes vermittelt als eine erschöpfende Auskunft für die praktisch interessierenden Probleme gibt. Stationäre, reibungsfreie und inkompressible Strömungsprobleme überwiegen dabei weitaus. In den Kapiteln 2—5 werden die thermodynamischen Grundlagen entwickelt und allgemeine bei allen Strahltriebwerken wiederkehrende Strömungsprobleme behandelt. Hierzu gehört die Untersuchung des inhomogenen Strömungsfeldes bei örtlicher Zufuhr von mechanischer oder thermischer Energie, das bei Vernachlässigung der Reibung auf Potentialströmungen mit unstetigen Randbedingungen zurückgeführt werden kann. Rotationssymmetrische Probleme können dabei mit Hilfe von Wirbelringverteilungen berechnet werden, für die im Anhang Formeln und Tabellen bereitgestellt werden. Zu den allgemeinen Problemen zählt auch die Strömung durch Einlaufdüsen und Triebwerksverkleidungen. Ebene Einströmdüsen werden mit Hilfe der konformen Abbildung berechnet und für kreisförmige Düsen werden Berechnungs- und Versuchsergebnisse eingehend, auch mit Berücksichtigung des Kompressibilitätseinflusses, mitgeteilt. Zur Berechnung der Triebwerksverkleidungen wird im 5. Kapitel die Theorie dünner Ringflügel entwickelt. Die Reihe der Einzelprobleme beginnt im 6. Kapitel mit der ummantelten Luftschaube, die allerdings praktisch nur im Schiffsbau (Kort-Düse) angewandt wird. Die Theorie des idealen Staustrahls- oder Lorintriebwerkes wird im 7. Kapitel sowohl für Gleichdruck- als auch für Gleichraumverbrennung entwickelt. Abweichungen vom idealen Verhalten werden erörtert und ein Vergleich mit dem Pulso-Strahltriebwerk (Schmidt-Rohr) gezogen. Auch das Überschall-Lorintriebwerk wird, dem Projekt von Oswatitsch folgend, diskutiert. Das Turbinen-Luftstrahltriebwerk wird nur sehr kurz behandelt, wobei auch auf Mischungsvorgänge in der Brennkammer eingegangen wird. Einen größeren Raum nehmen wiederum im 9. Kapitel die durch Einbau der Strahltriebwerke in Rumpf und Flügel hervorgerufenen Einström- und Interferenzverluste ein. Das 10. Kapitel ist der Ausbildung turbulenter Freistrahlen in ruhender und strömender Luft sowie in der Nachbarschaft von Wänden gewidmet, wobei jedoch neuere Arbeiten über den Einfluß der Kompressibilität nicht berücksichtigt worden sind. Das 10. Kapitel gibt einen kurz gefaßten, anregenden Einblick in die Vortriebsarten bei Vögeln und Insekten, wobei auch das von v. Holst seinerzeit vorgeschlagene Triebflügel-Flugzeug als technische Verwirklichung des Libellen-Fluges gedeutet wird. Den Abschluß bildet ein Kapitel über die Eigenschaften verschiedener Kühleranordnungen. Im Anhang sind Formeln und Tabellen für die Stromfunktionen und Geschwindigkeitskomponenten häufig gebrauchter Singularitäten zusammengestellt.

W. Wuest.

Schultze, Ernst: Zur Berechnung der Druckpunktverteilung über die Spannweite für Flügel mit kleinem Seitenverhältnis. Z. angew. Math. Phys. 4, 207—214 (1953).

Verf. zeigt, daß ein dünnes Profil der Länge c in zweidimensionaler Strömung, welches aus den Anteilen: ebene Platte, Kreishogenprofil, S-Schlagprofil besteht, zur exakten Berechnung von Auftrieb und Moment durch zwei gebundene Einzelwirbel im Abstand $(3 \pm \sqrt{5})c/8$ von der Vorderkante ersetzt werden darf, wobei die Anströmungsbedingung in den Punkten $(5 \pm \sqrt{5})c/8$ zu erfüllen ist, und schlägt vor, zur Berechnung der Auftriebs- und Momentenverteilung eines endlichen Flügels ein dementsprechendes Wirbelmodell mit zwei tragenden Wirbellinien zu benutzen.

J. Weissinger.

Allen, D. N. de G. and S. C. R. Dennis: The application of relaxation methods to the solution of differential equations in three dimensions. II. Potential flow round aerofoils. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 81—100 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 42, 336.) Zur Berechnung einer inkompressiblen Strömung um ein räumliches Profil wird in einem Würfelgitter die der Potentialgleichung entsprechende Differenzengleichung mit Relaxationsmethoden behandelt, wobei auch eine Modifizierung der Differenzengleichungen bei gekrümmten Oberflächen erwähnt wird. Verf. führt zwei ausführliche numerische Beispiele, eine unter einem Winkel von 2° angeströmte endliche Rechtecksplatte und ein winkelförmiges Profil. In der Nähe der Profile wird mit kleineren Maschenweiten gerechnet. L. Collatz.

Flax, A. H.: Integral relations in the linearized theory of wing-body interference. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 483—490 (1953).

Verf. verallgemeinert seine Theorie der Umkehrströmung (dies. Zbl. **46**, 426) auf Flügel-Rumpf-Kombinationen, bei denen der Rumpf ein Zylinder beliebigen Querschnitts ist. Bezeichnet α_B den Anstellwinkel des Rumpfes, $\alpha_B(x, y)$ den lokalen Anstellwinkel am Flügel, π die Druckdifferenz zwischen Flügel-Ober- und -Unterseite, L_B (L_w) den Auftriebsanteil des Rumpfes (Flügels) und werden die entsprechenden Größen für die Umkehrströmung durch einen Querstrich gekennzeichnet, so lautet die grundlegende Formel

$$\iint \pi \alpha_w dx dy + \bar{L}_B \alpha_B = \iint \pi \bar{\alpha}_w dx dy + L_B \bar{\alpha}_B,$$

in der die Flächenintegrale über dem Flügelgrundriß zu erstrecken sind. Sie wird aus einer entsprechenden Formel für den Spezialfall $\alpha_B = \alpha_B = 0$ und einer Anwendung der Greenschen Formeln auf das Geschwindigkeitspotential in der Trefftzchen Ebene ($x = \infty$) gewonnen. Ist θ_w der Winkel zwischen Flügel und xy -Ebene (V-Stellung), so liefert Einsetzen von $\alpha_w = 0$, $\alpha_B = 1$, $\alpha_w = \cos \theta_w$, $\alpha_B = 0$ die Reziprozitätsbeziehung $L_w = L_B$ und von $\alpha_w = \cos \theta_w$, $\alpha_B = 1$ bei beliebigem $\alpha_B(x, y)$, α_B die Formel $L_w \cdot L_B = \iint \pi \alpha_w dx dy + L_B \alpha_B$, nach der α_B die Rolle einer Einflußfunktion für den Gesamtauftrieb $L_w = L_B$ spielt. Ähnliche Formeln gelten für das Rollmoment. Weitere Anwendungsmöglichkeiten werden angedeutet. — Die Betrachtungen sind gültig für linearisierte Unter- und Überschallströmung. *J. Weissinger.*

Söhne, W.: Die Seitenstabilität eines geschleppten Flugzeuges. *Ingenieur-Arch.* **21**, 245—265 (1953).

In Anlehnung an die klassischen Untersuchungen der Stabilität des Flugzeuges nach der Methode der kleinen Schwingungen untersucht Verf. die Seitenstabilität eines mit einem Seil geschleppten Flugzeuges. Dabei wird in herkömmlicher Weise die gestörte Seitenbewegung als von der Längsbewegung unabhängig betrachtet. Ferner wird angenommen, daß das Flugzeug starr und die Ruder blockiert seien und daß die Flugbewegung des schleppenden Flugzeuges vom geschleppten Flugzeug ungestört bleibe. Das System der Bewegungsgleichungen führt auf eine Frequenzgleichung 6. Grades, durch deren Wurzeln die Seitenbewegung beschrieben wird. Wie das freilegende Flugzeug führt auch das geschleppte Flugzeug nach einer Störung eine gedämpfte, aperiodische Rollbewegung und eine Gierschwingung aus. Hinzu kommen eine seitliche Schwerpunktsbahnschwingung, die gewöhnlich angefacht ist, und eine weitere aperiodische Bewegung, die an die Stelle der Spiralbewegung des freilegenden Flugzeuges tritt. Das Bestreben, durch Reduktion der Freiheitsgrade zu einer einfachen, brauchbaren Näherungslösung zu gelangen, führt zu keinem Erfolg, dagegen ist näherungsweise eine Aufspaltung der Frequenzgleichung in 2 kubische Gleichungen zulässig. Die numerische Durchrechnung von Beispielen zeigt den Einfluß der Seillänge, der Lage des Fesselpunktes und von Änderungen konstruktiver und aerodynamischer Größen. *J. Rotta.*

Söhngen, Heinz: Luftkräfte an einem schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung. *Z. angew. Math. Phys.* **4**, 267—297 (1953).

Die Arbeit gibt einen theoretischen Beitrag zum Schwingungsverhalten axial durchströmter Maschinen und behandelt speziell die Luftkräfte an einem schwingenden, ebenen Streckengitter, wobei sich das Verhalten der Blätter mit bestimmter Blattzahl periodisch wiederholt. Dies System entspricht einem Schaufelkranz, der sich in einem Ringkanal geringer Höhe befindet. Die Schwingungsamplituden seien klein. Das entwickelte Verfahren ermöglicht die Berechnung der Luftkräfte bei beliebig vorgegebener Schwingungsform des Gitters. Für die praktisch wichtigsten Fälle der Schlagschwingung normal und tangential zur Schaufel und der Drehschwingung um die Vorderkante werden Formeln der Luftkräfte und des Luftkraftmoments explizit angegeben. An einem durchgerechneten Beispiel wird gezeigt, daß ein belasteter Schaufelkranz allein mit dem Freiheitsgrad Biegung flattern kann. *J. Rotta.*

Levy, Samuel: Structural analysis and influence coefficients for delta wings. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 449—454 (1953).

Spielberg, Irvin N.: The two-dimensional incompressible aerodynamic coefficients for oscillatory changes in airfoil camber. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 432—434 (1953).

Witting, Hermann: Über zwei Differenzenverfahren der Grenzschichttheorie. *Arch. der Math.* **4**, 247—256 (1953).

Die von K. Schröder und H. Görtler angegebenen Differenzenverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten werden im Hinblick auf ihre Genauigkeit miteinander verglichen. Dabei zeigt sich, daß das Schrödersche Iterationsver-

fahren bei wesentlich größerem Zeitaufwand gegen das einfachere Görtlersche Verfahren konvergiert. Es stellt daher das erste Verfahren gegenüber dem zweiten Verfahren keine bessere Annäherung der Grenzschichtdifferentialgleichungen durch Differenzengleichungen dar. Beide Verfahren sind also mit den gleichen besonders in der Nähe des Ablösungspunktes hervortretenden ungünstigen Fehlerfortpflanzungen behaftet.

E. Truckenbrodt.

Murphy, James S.: Some effects of surface curvature on laminar boundary-layer flow. J. aeronaut. Sci. 20, 338—344 (1953).

Während man in der Grenzschichttheorie voraussetzen pflegt, daß der Krümmungsradius der umströmten Kontur groß ist gegenüber der Grenzschichtdicke, wird in der vorliegenden Arbeit der Einfluß eines mäßigen oder kleinen (dies nur an konvexen Wänden) Krümmungsradius untersucht. Die Überprüfung der dann noch zulässigen Grenzschichtvernachlässigungen nach dem Muster der Prandtl'schen Größenordnungsbetrachtungen führt zu den für mäßige und große Wandkrümmung geltenden verallgemeinerten Grenzschichtgleichungen. Berücksichtigt wird ferner der Einfluß der Wandkrümmung in der Modifikation der äußeren Randbedingung. Um an einem konkreten Fall zu prüfen, welchen Einfluß die Wandkrümmung auf die Wandschubspannung ausübt, wird ein idealisierter Fall durchgerechnet: Krümmungsradius proportional $x^{1/2}$ (mit x als Wandbogenlänge) und Druck konstant. Dies gestattet den Vergleich mit der Blasius'schen Lösung für die ebene Platte. Zur Integration wird, wie bei Blasius, eine Reihenentwicklung angesetzt, und es wird der Einfluß der Krümmung in erster Ordnung berücksichtigt. Leider wird das asymptotische Verhalten des Korrekturgliedes (gegenüber der Blasius'schen Lösung), dessen Kenntnis zur Erfüllung der modifizierten äußeren Randbedingung erforderlich ist, nur unzulänglich bestimmt (aus der Reihenentwicklung von der Wand her). Das Ergebnis der Rechnung zeigt eine Verminderung der Wandschubspannung an konvexen und eine Vergrößerung an konkaven Wänden gegenüber dem Fall der Blasius'schen Platte bei gleicher Reynoldsscher Zahl. Es wäre zu begrüßen, wenn die vorliegende Untersuchung (Diss., University of Michigan) durch eine sorgfältigere — etwa numerische — Integration vervollkommen würde.

H. Görtler.

Nigam, Swami Dayal und Kumandur Srinivasa Iyengar Rangasami: Growth of boundary layer on a rotating sphere. Z. angew. Math. Phys. 4, 221—223 (1953).

Die Grenzschichtströmung an einer in der ruhenden Flüssigkeit rotierenden Kugel ist für den stationären Fall schon früher von L. Howarth behandelt worden (dies. Zbl. 43, 401). Hier wird der zeitliche Anlauf dieser Strömung berechnet bei plötzlichem Beginn der Rotation der Kugel. Es ergibt sich — in einiger Abweichung von der Howarth'schen Lösung — eine Grenzschicht, die von den Polen zum Äquator anwächst mit Einstürmen in der Umgebung der Pole und Auströmen in der Umgebung der Äquatorebene.

H. Schlichting.

• **Detra, Ralph W.: The secondary flow in curved pipes.** Diss. (Mitteilungen a. d. Institut f. Aerodynamik a. d. E. T. H. Zürich, Nr. 20.) Zürich: Verlag Leemann 1953. 50 S. Fr. 15,60.

Für die Sekundärströmungen in einem schwach gekrümmten Kanal von kreisförmigem Querschnitt wird eine Näherungstheorie unter folgenden Vereinfachungen abgeleitet: 1. Die Gleichungen werden für einen geraden Kanal angeschrieben, und die Krümmung wird dadurch berücksichtigt, daß zusätzlich eine Kräftefunktion entsprechend der Zentrifugalkraft eingeführt wird; dabei wird näherungsweise mit einem konstanten Krümmungsradius über den ganzen Querschnitt gerechnet. 2. Die Gleichungen werden dadurch linearisiert, daß die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Hauptströmungsrichtung als klein gegenüber der Geschwindigkeit in dieser Richtung angenommen werden. 3. Die Reibung wird vernachlässigt; jedoch wird die Ausgangsströmung bei Eintritt in den Krümmer als wirbelbehaftet entsprechend der ausgebildeten Rohrströmung angenommen. Man gewinnt dadurch eine partielle Differentialgleichung für die Stromfunktion ψ der Sekundärströmung nach den Querschnittskordinaten r, φ . Diese Gleichung kann nach dem Relaxationsverfahren oder anderen numerischen Verfahren behandelt werden. Durch Meßergebnisse wird jedoch der spezielle Lösungsansatz $\psi \sim \sigma(r) \cos \varphi$ nahegelegt, durch den man eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $\sigma(r)$ mit einer außerwesentlichen Singularität in Rohrmitte erhält. Die Lösung ergibt sich durch Reihenansatz. Die Anwendung der Theorie auf die im ersten Teil der Arbeit geschilderten Messungen der Strömung durch zwei schwach gekrümmte Rohre (Rohrdurchmesser 10 cm, Krümmungshalbmesser 273 bzw. 137 cm) zeigt befriedigende Übereinstimmung, läßt aber auch gleichzeitig die Grenzen der Näherungstheorie erkennen, die nur für verhältnismäßig kurze Krümmerstücke brauchbar ist. Die Theorie wird auch in ganz entsprechender Weise auf elliptische Rohrquerschnitte übertragen, wobei man dann zwei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung erhält. Eine Betrachtung des Energieverlustes im Krümmer zeigt, daß die kinetische

Energie der Sekundärströmung nur etwa 15% des Gesamtverlustes ausmacht. Die wesentlichen Verluste müssen also durch die erhöhte Reibung zustande kommen, die durch die stärkeren Geschwindigkeitsgradienten im gekrümmten Rohr gegenüber dem geraden Rohr verursacht wird.
W. Wuest.

Burgers, J. M.: Some considerations on turbulent flow with shear. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 56, 125—147 (1953).

Zondek, B. and L. H. Thomas: Stability of a limiting case of plane Couette flow. Phys. Review, II. Ser. 90, 738—743 (1953).

Nach der Methode der kleinen Schwingungen wird im Anschluß an L. Hopf [Ann. der Physik. IV. F. 44, 1—60 (1940)] die Stabilität der ebenen Couette-Strömung bewiesen, indem alle Wurzeln der auf eine transzendente Gleichung zurückgeführten Wandbedingung untersucht werden.
J. Pretsch.

Drake Jr., Robert M.: Calculation method for three-dimensional rotationally symmetrical laminar boundary layers with arbitrary free-stream velocity and arbitrary wall-temperature variation. J. aeronaut. Sci. 20, 309—316 (1953).

Betrachtet werden rotationssymmetrische laminare Grenzschichten bei beliebigen Druck- und Temperaturverteilungen an der Körperoberfläche. Es wird inkompressible Flüssigkeit bei konstanten Stoffwerten vorausgesetzt. Nach bekanntem Muster der Parameter-Verfahren (Integralverfahren) wird ein approximatives Berechnungsverfahren für die charakteristischen Grenzschichtgrößen entwickelt, wobei die einparametrische Familie der „ähnlichen“ Kegelströmungen (Hartree-Profilen, wie im ebenen Fall der Keilströmungen) dem Näherungsverfahren zugrunde gelegt werden. Durch Anwendung der Mangler-Transformation kann Verf. Resultate des ebenen Falls von R. A. Seban (Univ. of Californ., Inst. Engineer. Research Report 2—12, Mai 1950) unmittelbar übernehmen. Die eng verwandten Arbeiten von A. Walz [Ber. Lilienthal-Ges. Luftfahrtforsch. 141, 8 (1941), Dt. Luftfahrtforsch., ZWB u. M 3060 (1943)] waren dem Verf. offenbar nicht bekannt. Das Verfahren wird angewandt auf die Grenzschicht am räumlichen Halbkörper. Vergleiche mit den Ergebnissen von F. W. Scholkemeier (Diss. Braunschweig 1943) nach dem P4-Verfahren zeigen Abweichungen, die teilweise erheblich sind. Da für keines der beiden Verfahren Fehlerabschätzungen möglich sind, läßt sich über die Brauchbarkeit der Resultate unmittelbar nichts aussagen.
H. Görtler.

Gran Olsson, R.: Some remarks on Reynolds number. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 25, 7—12 (1953).

Verf. geht von der Definition der Reynolds-Zahl als Verhältnis von Trägheitskraft und Schubkraft aus und drückt die Reynolds-Zahl als Verhältnis der Quadrate einer charakteristischen Geschwindigkeit und einer Schubspannungsgeschwindigkeit $v^* = \frac{1}{2} \tau / \rho$ (τ = Schubspannung, ρ = Dichte des Strömungsmediums) aus. Im Fall turbulenter Strömung soll nun nicht nur der von der Viskosität der Flüssigkeit unmittelbar erzeugte Anteil der Schubspannung, sondern auch der durch turbulenten Impulsaustausch entstandene, eingesetzt werden. Hierdurch ergibt sich bei Rohrströmung ein einheitlicher, für laminare und turbulente Strömung geltender Zusammenhang zwischen der Rohrwiderstandszahl und der so gebildeten Reynolds-Zahl. Man muß jetzt aber zwischen einer Reynolds-Zahl für turbulente Strömung, die dem erwähnten Ausdruck entspricht, und einer solchen für laminare Strömung, die in üblicher Weise aus Geschwindigkeit, Rohrdurchmesser und kinematischer Zähigkeit errechnet wird, unterscheiden. Die Abhängigkeit zwischen diesen beiden Reynolds-Zahlen wird auf Grund der Nikuradseschen Messungen an glatten Röhren untersucht.
J. Rotta.

Sidrak, Sobhy: The drag on an elliptic cylinder, of small eccentricity, in a stream of viscous liquid, at small Reynolds numbers. Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, Nr. 4, 17—27 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 37, 114), in welcher die zähe Strömung um einen Kreiszylinder bei kleinen Reynoldszahlen behandelt worden war, wird die Oseensche Nachlaufströmung für schwach exzentrische elliptische Zylinder bis zur 3. Näherung berechnet; die zweite Näherung stimmt befriedigend mit Rechnungen von Piercy, Winny [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 140, 543—561 (1933)] und Davies [Philos. Mag., VII. Ser. 31, 283—313 (1941)] überein.
J. Pretsch.

Berman, Abraham S.: Laminar flow in channels with porous walls. J. appl. Phys. **24**, 1232—1235 (1953).

Es wird die ebene inkompressible laminare Strömung durch einen Kanal mit ebenen Wänden mit kontinuierlicher homogener Absaugung an beiden Wänden auf Grund der Navier-Stokesschen Gleichungen berechnet. Für die Geschwindigkeitsverteilung wird eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung erhalten, die für geringe Absaugung durch eine Reihenentwicklung nach dem Absaugeparameter gelöst wird. Das Geschwindigkeitsprofil in Richtung der Kanalachse wird durch die Absaugung gegenüber dem Poiseuilleschen Parabelprofil in der Weise geändert, daß es in der Mitte flacher und an den Wänden steiler verläuft. Der Druckabfall längs der Kanalachse ist im Kanal mit Absaugung erheblich geringer als bei undurchlässigen Wänden.

H. Schlichting.

Macagno, Oscar Enzo: Sur les effets de passage des houles planes sous un obstacle. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 660—661 (1953).

Basch, A.: Zur Geometrie der ebenen Strömung von Gasen. Österreich. Ingenieur-Arch. **7**, 139—143 (1953).

Die Arbeit gibt einige geometrische Beziehungen der ebenen, kompressiblen Strömung wie beispielsweise den Zusammenhang von Stromlinien- und Potentiallinien-Krümmung oder von Geschwindigkeits- und Dichtegradient.

K. Oswatitsch.

Sauer, R.: Hyperbolische Probleme der Gasdynamik mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. Z. angew. Math. Mech. **33**, 331—336 (1953).

Es wird ein kurzgefaßter systematischer Überblick über die z. Z. im Mittelpunkt des Interesses stehenden hyperbolischen Probleme der Gasdynamik mit 3 unabhängigen Veränderlichen gegeben. Die Systematik bezieht sich hierbei vornehmlich auf die mathematischen Methoden, mit denen derartige Probleme behandelt werden. Den breitesten Raum nehmen naturgemäß die linearen Methoden ein. Das Anfangs- und Randwertproblem der Strömung um einen schlanken Körper wird zunächst eingehend präzisiert und als Lösungsansätze einerseits Lösungen mit bekannten Singularitäten (Quellen, Senken, Dipole), andererseits homogene Lösungen (z. B. konische Strömungen) angegeben. Auch die Operatorenmethode sowie die Korrekturen der linearen Lösungen werden erwähnt. An nichtlinearen Methoden wird die „halblineare Methode“ (Störungsrechnung) sowie die strenge Charakteristikenmethode angeführt. Hinweise auf die Grenzfälle $M \rightarrow 1$, $M \rightarrow \infty$ und Konvergenzfragen beschließen die Arbeit. Zu jeder Methode ist zur genaueren Information wenigstens ein Werk der einschlägigen Literatur zitiert.

C. Heinz.

Van Le, Nguyen: Transformation between compressible and incompressible boundary-layer equations. J. aeronaut. Sci. **20**, 583—584 (1953).

Moore, Franklin K.: Threedimensional laminar boundary-layer flow. J. aeronaut. Sci. **20**, 525—534 (1953).

Es wird die laminare Grenzschicht in kompressibler Strömung an einem angeordneten Kegel bei Überschallgeschwindigkeit berechnet. Da eine allgemeine Lösung dieser dreidimensionalen Grenzschichtströmung auf unüberwindliche Schwierigkeiten stößt, werden verschiedene vereinfachende Annahmen eingeführt: 1. der Anstellwinkel ist klein im Vergleich zum Öffnungswinkel des Kegels. Hierbei ergibt sich auf der Leeseite des Kegels eine dickere Grenzschicht als auf der Luvseite, aber noch keine Ablösung. Mit wachsendem Anstellwinkel stellen sich hier Anzeichen einer beginnenden Ablösung ein. 2. Ist der Anstellwinkel erheblich größer als der Öffnungswinkel des Kegels, so ist die Umfangskomponente der Strömung nahezu dieselbe wie bei der ebenen Strömung um einen Zylinder. Es bildet sich eine Kármán'sche Wirbelstraße aus. 3. Bei Beschränkung auf die Symmetrieebene läßt sich die Diskussion der Lösung ohne Beschränkung des Anstellwinkelbereiches durchführen.

H. Schlichting.

Li, Ting-Yi and Henry T. Nagamatsu: Similar solutions of compressible boundary-layer equations. *J. aeronaut. Sci.* **20**, 653--655 (1953).

Für die kompressible laminare Grenzschicht mit und ohne Wärmeübergang ist — durch Verallgemeinerung einer entsprechenden Fragestellung für inkompressible Grenzschichten — untersucht worden, für welche Außenströmung die Lösungen der Grenzschichtgleichungen ähnlich sind. In solchen Fällen reduzieren sich die partiellen Differentialgleichungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Einige Fälle werden soweit numerisch gelöst, daß das Verhältnis der örtlichen Wärmeübergangszahl zum örtlichen Reibungswert ermittelt wird. *H. Schlichting.*

Davies, H. J.: The two-dimensional irrotational flow of a compressible fluid around a corner. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **6**, 71--80 (1953).

Nach der Hodographenmethode von Tschapligin erfüllt die Stromfunktion einer adiabatischen Strömung eine hypergeometrische Differentialgleichung. Nachdem Williams die eine Lösung untersucht hatte, welche durch einen singulären Punkt in der Hodographenebene gekennzeichnet ist, untersucht Verf. die zweite Lösung, die in der natürlichen Ebene keine Singularitäten enthält und ebenfalls eine kompressible Strömung um eine Ecke darstellt. Berechnet wird der geometrische Ort der Rückkehranten und die Schallgrenze in der natürlichen Ebene sowie die Grenzlinie und die kritische Stromlinie in der Hodographenebene. *J. Pretsch.*

Krzywoblocki, M. Z. v.: On the stability of Bénard-Kármán vortex street in compressible fluids. I. *Acta phys. Austr.* **7**, 283--298 (1953).

Mit Hilfe klassischer Resultate von H. v. Helmholtz untersucht Verf. den Einfluß der Kompressibilität auf die Stabilität von geradlinigen Wirbelstraßen. Alle Wirbelfäden seien unendlich lang, geradlinig und senkrecht zu einer Ebene (ebenes Problem). Im Falle der einreihigen Straße haben sie alle die gleiche Stärke, im Falle der zweireihigen Straße haben sie beiderseits der Straße entgegengesetzte Stärken. Dabei kann ihr Abstand auch zeitabhängig sein. Der Stabilitätsbegriff wird im ursprünglichen v. Kármánschen Sinne verwendet (Stabilität gegen kleine Störungen bei Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen der Auslenkungen). Schon bei diesem (eingeeengten) Stabilitätsbegriff findet Verf. Instabilität aller Konfigurationen. Der Kompressibilitätseinfluß auf das Stabilitätsphänomen geht also eindeutig in destabilisierender Richtung. *H. Behrbohm.*

Munk, Max M.: The gas flow past slender bodies. *J. appl. Phys.* **24**, 584--589 (1953).

Die Arbeit handelt von schlanken Störkörpern, die sich in einem unendlich ausgedehnten, reibungsfreien und der barotropen Expansion folgenden Gas mit Unterschallgeschwindigkeit bewegen, und bringt damit eine Verallgemeinerung der Luftschiffkörpertheorie, die Verf. bereits 1922 in seiner bekannten Arbeit (*N. A. C. A. Rep.* 184) für den Fall eines inkompressiblen Mediums gegeben hat. (Diese Theorie hat neuerdings durch die Wendung, die ihr R. T. Jones [*N. A. C. A. Rep.* 835 (1946)] gegeben hat, in der aerodynamischen Praxis große Bedeutung erlangt für die rechnerische Behandlung von schlanken Störkörpern und von Flügeln kleinen Seitenverhältnisses — und ist für Ingenieurzwecke das besthandliche Werkzeug zur näherungsweisen Berechnung im Überschallgebiet geworden.) — Während im inkompressiblen Fall die ganze vom bewegten Körper dem Medium übertragene Energie sich als dessen kinetische

Energie K äußert, die durch das Integral $K = \int \frac{\rho}{2} V^2 dS$ (ρ = Dichte, V Geschwindigkeitsbetrag, dS Volumenelement des Mediums) eindeutig und ohne Konvergenzschwierigkeiten als endlicher Wert darstellen läßt, ist dies im kompressiblen Medium nicht mehr der Fall. Denn nunmehr hat man sowohl die kinetische Energie K als auch die elastische Energie W in Betracht zu ziehen, letztere gegeben durch das Integral $W = \int \frac{(\rho)}{2} dS \int \frac{(\rho)}{p} p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ (p = lokaler Druck).

Aber hier bekommt nun das Integral erst durch nähere Angaben über den Integrationsprozeß eine Bedeutung, die ihr nur durch Berücksichtigung der Vorgeschichte des erreichten Bewegungszustandes gegeben werden kann. Dies ist (hier für die Energie) also ganz analog wie bei dem

Raumintegral über die Komponente des (mittels der scheinbaren Masse definierten) scheinbaren Impulses in Bewegungsrichtung für symmetrische Drehkörper im inkompressiblen Fall. Beide Raumintegrale werden vom Verf. in prinzipiell gleicher Weise behandelt. Sie werden als Flächenintegrale über die Körperkontur dargestellt, nachdem die Existenz einer äußeren Kontrollfläche herausphilosophiert worden ist, deren Beitrag zur Integration nichts bringt. — Energieintegral im kompressiblen, Impulsintegral im inkompressiblen Fall stehen also in keiner so einfachen Relation zur Bewegung des Körpers wie die Energie im inkompressiblen Fall. Daher ist es überraschend, daß der Impuls im kompressiblen Fall weit einfacher mit der Bewegung des Körpers zusammenhängt als die Energie, wie Verf. durch Betrachtung quasistationärer Zwischenphasen des schließlichen Bewegungszustandes zeigt: Der übertragene Impuls hängt nunmehr nicht von der Vorgeschichte des Bewegungsablaufes ab. Er könnte daher durch die Bewegung einer scheinbaren Zusatzmasse definiert werden. Da dann aber diese Masse selbst von der Geschwindigkeit des Körpers abhängen würde, wird der Impuls besser durch das Energieminimum definiert, das zu den sukzessiven stationären Zwischenzuständen gehört. — Auf diese Weise läßt sich z. B. für sehr kleine Machzahlen ($\neq 0$) zeigen, daß für instantan aus der Ruhe erzeugte Bewegungen mit konstanter geradliniger Geschwindigkeit die übertragene Energie gegenüber dem inkompressiblen Fall verdoppelt ist, wie dies Longhorn (dies. Zbl. 46, 192) bereits für die Kugel durch detaillierte Rechnungen gezeigt hat.

H. Behrbohm.

Byrd, Paul F. and Mary T. Huggins: Zur Berechnung von Wirbelverteilung und Auftrieb eines dünnen Unterschallprofils in zwei hintereinander angeordneten Flügeltünnern bei kompressiblen Strömungen. Ingenieur-Arch. 21, 191—193 (1953).

In Ausdehnung der Arbeiten von Dörr (dies. Zbl. 42, 188) und Nickl (dies. Zbl. 46, 186) wird die Integralgleichung der Zirkulationsverteilung zweier ungestaffelter Gitter aufgestellt und explizit gelöst. Das Verfahren läßt sich auf mehr als zwei Gitter und auf schlanke symmetrische, nicht angestellte Profilformen erweitern.

J. Weissinger.

Tomotika, S., T. Aoi and H. Yosinobu: On the forces acting on a circular cylinder set obliquely in a uniform stream at low values of Reynolds number. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 219, 233—244 (1953).

Sir Geoffrey Taylor (dies. Zbl. 47, 439) hatte das Verhältnis von Longitudinal- zu Tangentialkraft an langen, glatten, schräg zur Strömung angestellten Kreiszyllindern für große Reynoldszahlen berechnet und vermutet, daß dieses Verhältnis für kleiner werdende Reynoldszahl abnimmt. Diese Vermutung wird durch exakte Berechnung der Kraftkomponenten aus den Oseenschen Bewegungsgleichungen bewiesen.

J. Pretsch.

Carstoiu, Ion: Sur la déformation d'une particule dans le mouvement d'un fluide. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2209—2211 (1953).

Unter Benutzung der Lagrangeschen Koordinaten werden Formeln abgeleitet, welche den Tensor der von der Geschwindigkeit hervorgerufenen Deformation durch Ableitungen der Eulerschen Koordinaten nach den Lagrangeschen ausdrücken.

G. Hamel.

Dzung, L. S.: The medium in fluid mechanics. J. aeronaut. Sci. 20, 650—651 (1953).

Anschließend an eine Arbeit von Traupel (dies. Zbl. 46, 231) wird eine Verallgemeinerung des idealen Gases behandelt mit formal-mathematisch gleichen Formeln wie bei diesem. Dieser durch Einführen neuer Variablen gewonnene Vorteil geht bei Wärmeübergangsproblemen im allgemeinen, aber nicht immer verloren.

K. Oswatitsch.

Ludford, G. S. S.: D'Alembert's paradox and the moment formula in three-dimensional subsonic flow. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 18, 1—13 (1953).

Das D'Alembertsche Paradoxon besteht bekanntlich darin, daß in Potentialströmungen die Kraft auf einen in die Strömung getauchten Körper verschwindet. Verf. beweist nun, daß dasselbe Ergebnis auch für die isentropische kompressible Unterschallströmung erhalten wird. Dieses Resultat wurde zwar schon viel früher von Theodorsen abgeleitet [J. aeronaut. Sci. 4, 239—240 (1937)], doch kann Verf. darüber hinaus zeigen, daß das Drehmoment senkrecht auf dem Geschwindigkeits-

vektor der ungestörten Strömung steht. Die stark mathematische Fragen betonende Arbeit liefert noch außerdem eine Reihenentwicklung des Potentials der dreidimensionalen stationären Strömung und neben einem Beweis für diese Entwicklung noch Aussagen über ihr Verhalten in großer Entfernung (welches dem Verhalten des Potentials der inkompressiblen Strömung analog ist). *F. Cap.*

Schäfer, Manfred: Eine einheitliche Charakteristikenmethode zur Behandlung gemischter Unterschall-Überschallströmungen. J. rat. Mech. Analysis 2, 383—412 (1953).

Während eine ebene Überschallströmung ein Paar reeller Charakteristiken besitzt, werden diese in einer Unterschallströmung konjugiert komplex. Die neue Methode besteht nun darin, den Real- und Imaginär-Teil der konjugiert komplexen Charakteristiken als neue Koordinaten einzuführen. Dementsprechend werden im Überschall nicht die charakteristischen Grundkurven selbst, sondern die halbe Summe und halbe Differenz dieser Funktionen (als „Nebencharakteristiken“ bezeichnet) als Koordinaten verwendet. In diesen neuen Koordinaten erscheint die ebene gasdynamische Gleichung in einfachster Form: Im Unterschall als Laplace-, im Überschall als Wellengleichung. Auf der Schalllinie werden die beiderseitigen Koordinaten identisch, was der Formulierung der Übergangsbedingungen dort sehr zustatten kommt. Wie bei der Hodographenmethode erfordert die Ermittlung der Ortskoordinaten den entscheidenden Aufwand. Dazu ist ein Paar linearer partieller Differentialgleichungen zu lösen, in welche die spezielle Lösung des Problems eingeht. Die außerordentlich klare Darstellung verzichtet bewußt auf ein Eingehen auf Randbedingungen, Stöße sowie Existenz oder Eindeutigkeitsprobleme. Den Rechnungen wird als Abhängige eine geeignete Geschwindigkeitsfunktion und die Geschwindigkeitsrichtung zugrunde gelegt. Auf Potential und Stromfunktion wird abschließend eingegangen. Die Anwendung der Methode ist einer gesonderten Veröffentlichung vorbehalten. Der Ref. kann sich den Zweifeln, des Verf. bezüglich der bekannten Vereinfachung der gasdynamischen Gleichung nicht anschließen. Auch die einleitende Behauptung, daß bislang nur die Hodographenmethode zur Berechnung gemischter Strömungsfelder in Betracht kommt, erscheint angesichts der Lösungen mittels der Integralgleichungsmethode des Ref. oder mittels Relaxationsmethoden unbegründet. Dem Mißtrauen mehr mathematisch eingestellter Verf. gegen physikalisch vereinfachte Modelle ist entgegenzuhalten, daß alle Theorie ausschließlich aus vereinfachten Modellen besteht.

K. Oswatitsch.

Fraenkel, L. E.: On the operational form of the linearized equation of supersonic flow. J. aeronaut. Sci. 20, 647—648 (1953).

Es wird eine saubere Herleitung der Differentialgleichung $B^2 p^2 q - q_{vv} - \bar{q}_{zz} = 0$ für die Laplace-Transformierte $q(p, y, z) = p \int_{f_0(y,z)}^{\infty} e^{-p^2 x} q(x, y, z) dx$ des Geschwindigkeitspotentials $q(x, y, z)$ der linearisierten Überschalltragflügeltheorie gegeben, das seinerseits der Differentialgleichung $B^2 q_{xx} - q_{vv} - q_{zz} = 0$ genügt [$B^2 = M^2 - 1$, M = Machzahl der Anströmung, $x = f_0(y, z)$ (Gleichung der charakteristischen Fläche durch die Flügelvorderkante (oder des Machkegels durch die Flügelspitze, je nach Fall)]. Die möglichen Unstetigkeiten der Ableitungen erster Ordnung von q längs entsprechender charakteristischer Unstetigkeitsflächen des Feldes werden bei der partiellen Integration abgesondert, und es wird gezeigt, daß ihr Beitrag zur transformierten Gleichung infolge der Longitudinalität der Geschwindigkeitssprünge verschwindet.

H. Behrbohm.

Robinson, A.: Non-uniform supersonic flow. Quart. appl. Math. 10, 307—319 (1953).

Verf. behandelt im Rahmen der linearisierten Theorie die Überschallströmung um einen zweidimensionalen Tragflügel, der sich in einem in Tiefenrichtung des Flügels (x -Richtung) gleichförmig beschleunigten Überschallanströmungsfeld befindet. Unter (bei den Linearisierungsannahmen möglicher) Voraussetzung von Drehungsfreiheit sowohl der Anströmung als auch der gestörten Strömung handelt es sich dann um die Lösung des zu $(\partial q / \partial y)_{y=0} = U'(x) \cdot \alpha(x)$ ($\alpha(x)$ lokaler Anstellwinkel) gehörigen Randwertproblems der Differentialgleichung $(U^2/a^2 - 1) \partial^2 q / \partial x^2 + 2U/a^2 (dU/dx) \partial q / \partial x - \partial^2 q / \partial y^2 = 0$ für das Störgeschwindigkeitspotential q . Die Schallgeschwindigkeit a wird dabei als konstant im ganzen Feld angesehen, für die x -Komponente U der Anströmungsgeschwindigkeit wird mit konstantem λ der Ansatz $U^2 = U_0^2 + \lambda x$ (nach der Bernoullischen Gleichung also in x linearer statischer Druck der Anströmung: $p = p_0 + q$, q konstant) getroffen [Index 0 bezieht sich dabei auf den Anströmzustand (im Ursprung)]. Als Lösung dieses Problems wird auf dem Flügel für den Fall der beschleunigten

Strömung ($\lambda > 0$) $q(x, 0) = \frac{4a^3}{\pi\lambda} \int_{M_0}^M \frac{\alpha}{\sqrt{M^2-1}} K \left(\sqrt{\frac{M^2-m^2}{M^2-1}} \right) m^2 dm$, für den Fall verzögerter Strömung ($\lambda < 0$) $q(x, 0) = -\frac{4a^3}{\pi\lambda} \int_M^{M_0} \frac{\alpha}{\sqrt{M^2-1}} K \left(\sqrt{\frac{m^2-M^2}{m^2-1}} \right) \frac{m^2 dm}{\sqrt{m^2-1}}$ gefunden. Dabei ist

$M = U(x)/a$, $M_0 = U(0)/a$ die entsprechende Machzahl, K das vollständige elliptische Normalintegral 2. Gattung des jeweils in der Klammer dahinter angegebenen Moduls. Unter Benutzung nur des konstanten und des linearen Gliedes der hypergeometrischen Reihe für K werden hieraus Näherungsformeln für Auftrieb und Wellenwiderstand im Fall eines konstanten α (keilförmiges Flügelprofil) und eines stückweise konstanten α (rhombisches Flügelprofil) hergeleitet. Sie gelten nur für nicht zu nahe an 1 gelegene Überschallmachzahlen. — Vor einigen Druckfehlern sei der Leser gewarnt.

H. Behrbohm.

Ferri, Antonio, Nathan Ness and Thaddeus T. Kaplita: Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry. J. aeronaut. Sci. 20, 563—571 (1953).

Rott, N.: Minimum drag cambered rectangular wing for supersonic speeds. J. aeronaut. Sci. 20, 642—643 (1953).

Ludloff, H. F. and M. B. Friedman: Mach-reflexion of shocks at arbitrary incidence. J. appl. Phys. 24, 1247—1248 (1953).

Bruniak, R.: Zur Struktur des Verdichtungsstoßes. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 128—134 (1953).

Die bereits allgemeiner behandelte Theorie der Stoßstruktur wird hier nochmals für den Fall: Zähigkeit ohne Wärmeleitung wiedergegeben. K. Oswatitsch.

Kofink, W. und Th. Vollmer: Der gegabelte Verdichtungsstoß in Luft. Herrn Professor Dr. E. Fues zum 60. Geburtstag am 17. 1. 1953 gewidmet. Z. angew. Math. Mech. 33, 73—88 (1953).

Zu der von Weise, Eggink und Chandrasekhar begründeten mathematischen Theorie des gegabelten Verdichtungsstoßes wird ein neuer Beitrag geliefert. Ausgehend von der von Kofink (dies. Zbl. 42, 439) aufgestellten algebraischen Gleichung und von der graphischen „Herzkurvenmethode“ werden teils allgemeine Aussagen für beliebiges κ , teils genaue quantitative Angaben für Luft ($\kappa = 1,405$) gemacht. Besonderes Gewicht wird auf Grenzfälle, ausgezeichnete Gabelkonfigurationen und auf die jeweilige Zahl der Schnittpunkte von Haupt- und Nebenherzkurve gelegt. Die Darstellung des Ref. (dies. Zbl. 33, 33) wird erweitert und im Quantitativen präzisiert. Die Ergebnisse für Luft werden in vier Tabellen und 13 Diagrammen dargeboten.

F. Wecken.

Bernard, Jean-J.: Application des distributions polynomiales à la détermination de l'épaisseur des ondes de choc. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 130—132 (1953).

Mott-Smith (dies. Zbl. 43, 407) hat für die Berechnung der Stoßwellendicke eine aus zwei Maxwell'schen Termen zusammengesetzte „bimodale“ Verteilungsfunktion eingeführt. Die physikalische Deutung liegt hier nahe, indem jeder Term den Einfluß des Über- bzw. Unterschallfeldes auf den Stoßwellenbereich zum Ausdruck bringt. Verf. erweitert nun diesen Ansatz auf vieltermige („polynomiale“) Verteilungsfunktionen, wobei die ersten beiden Terme die eben genannte Bedeutung haben. Eine physikalische Deutung der übrigen Terme wird nicht gegeben, sondern es wird vielmehr gezeigt, daß mindestens fünf Terme („pentanomiale Verteilung“) notwendig sind, um neue Aussagen zu gewinnen. Die polynomiale Verteilungsfunktion wird nun in die eindimensionale und stationäre „Transportgleichung“ eingeführt, welche die Umformung einer beliebigen Funktion Φ zum Ausdruck bringt. Setzt man nacheinander für Φ Masse, Impuls und Energie ein, so ist offenbar wegen der Erhaltungssätze die Umformung Null, und man gewinnt drei lineare Gleichungen für die Koeffizienten der polynomialen Verteilungsfunktion. Für eine pentanomiale Verteilung werden zusätzlich noch Druck und Wärmefluß in die Transportgleichung eingeführt und dadurch zwei weitere, jedoch nichtlineare Gleichungen für die Koeffizienten der Verteilungsfunktion gewonnen. Der Rechnungsgang wird nicht im einzelnen angegeben, sondern ohne Diskussion als Ergebnis eine Kurve mitgeteilt, welche das Verhältnis von freier Weglänge zu Stoßwellendicke in Abhängigkeit von der Machschen Zahl darstellt. Während nach bisher bekannten Berechnungen die Stoßwellendicke, ausgedrückt in freien Weglängen, mit wachsender Machzahl einer Asymptote zustrebt, erhält Verf. ein Minimum bei $M = 3$ und wachsende Stoßwellendicke bei großen Machzahlen. Auch die numerischen Werte unterscheiden sich ganz wesentlich, denn für $M = 3$ beträgt die Stoßwellendicke etwa sieben freie Weglängen, also erheblich mehr als bisherige Berechnungen.

W. Wuest.

Lighthill, M. J.: Oscillating airfoils at high Mach number. *J. aeronat. Sci.* **20**, 402—406 (1953).

Dmitriev, A. A. und T. V. Bončkovskaja: Zur Frage der Turbulenz in einer Welle. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **91**, 31—33 (1953) [Russisch].

Parker, Eugene N.: Extension of Heisenberg's model of turbulence to critical Reynolds numbers. *Phys. Review, II. Ser.* **90**, 221—223 (1953).

Sedov, L. I.: Über die Integration der Gleichungen der eindimensionalen Bewegung eines Gases. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **90**, 735 (1953) [Russisch].

Schenk, J. and J. M. Dumoré: Heat transfer in laminar flow through cylindrical tubes. *Appl. Sci. Research, A* **4**, 39—51 (1953).

Berry jr., V. J.: Non-uniform heat transfer to fluids flowing in conduits. *Appl. Sci. Research, A* **4**, 61—75 (1953).

Boreli, Mladen: Sur une solution rigoureuse d'un problème d'écoulement plan des nappes souterraines. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 132—135 (1953).

Oldroyd, J. G.: The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **218**, 122—132 (1953).

Es wird eine homogene Flüssigkeit L^* betrachtet mit denselben makroskopischen Eigenschaften wie eine Emulsion, die aus Tropfen einer Newtonschen Flüssigkeit L' (Zähigkeit η') besteht, die in eine andere Newtonsche Flüssigkeit L (mit η) eingebettet ist. Dann können die Eigenschaften von L^* durch die Forderung bestimmt werden, daß bei Ersatz eines kleinen Teiles von L^* durch die Komponenten der Emulsion durch makroskopische Beobachtungen kein Unterschied in dem rheologischen Verhalten festgestellt werden kann. Die Aufgabe besteht dann darin, die Zähigkeit η^* von L^* durch die von L und die Volumenkonzentration c der dispersen Phase der Emulsion auszudrücken. Das Ergebnis unterscheidet sich von den Ergebnissen anderer Forscher, die sich mit demselben Problem beschäftigt haben. *Th. Pöschl.*

Storchi, Edoardo: Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **2**, 568—572 (1953).

McNown, John et Julien Kravtchenko: Sur la théorie des ports rectangulaires à profondeur constante. *C. r. Acad. Sci., Paris* **236**, 1531—1533 (1953).

Kitkin, P. A.: Das Anwachsen der Flutamplitude in den Tiefen geschlossener Meere. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **91**, 237—240 (1953) [Russisch].

Elektrodynamik. Optik:

Lampariello, Giovanni: Progressi recenti di elettrodinamica relativistica. *Atti IV. Congr. Un. mat. Ital.* **1**, 232—251 (1953).

L'A. giustifica dapprima l'espressione $B^2/2\mu_0$ (B induzione magnetica, μ_0 permeabilità del vuoto) per la densità di energia magnetica, e la conseguente formula per il tensore degli sforzi. Considera poi un corpo a forma di ellissoide molto allungato, soggetto ad una magnetizzazione uniforme M_0 e tale che nel suo interno la relazione fra B e il campo magnetico H sia della forma $B = \mu_r H + M_0$ dove μ_r (permeabilità reversibile) è costante. Supposto il corpo immerso in un fluido magnetico, in cui preesisteva un campo magnetico uniforme, l'A., estendendo calcoli di Sommerfeld e Ramberg, determina la coppia agente sul corpo, ottenendo così una formula che permette la verifica sperimentale dell'espressione assunta per il tensore degli sforzi.

D. Graffi.

Ashour, A. A.: Electromagnetic induction in shells and disks having special distributions of conductivity. *Proc. math. phys. Soc. Egypt* **4**, Nr. 4, 9—16 (1953).

Die allgemeinen von Price (dies. Zbl. **41**, 123) aufgestellten Gleichungen für die elektromagnetische Induktion von äußeren Feldern in einer sehr dünnen leitenden Schicht werden hier in krummlinigen, orthogonalen Koordinaten angegeben. Es wird gezeigt, daß sie für gewisse örtliche Verteilungen der Leitfähigkeit eine einfache

Integration erlauben. Es wird der Fall eines Sphäroids, das eine solche spezielle Verteilung der Leitfähigkeit aufweist, durchgerechnet und diskutiert. Die Resultate stehen in Übereinstimmung mit älteren Arbeiten von H. Lamb. Der zweite der nach dieser Methode gelösten Fälle betrifft eine Kreisscheibe mit einer axialen Symmetrie in der Verteilung der Leitfähigkeit. Die Methode erweist sich als besonders vorteilhaft, wenn die Leitfähigkeit eine ungerade Funktion von $(1 - r^2/a^2)^{1/2}$ ist, worin r die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt und a der Radius der Scheibe ist.

H. Buchholz.

Bedsin, D. J., J. R. Shewell and Ernest Ikenberry: The motion of a conducting sphere in a uniform magnetic field. Amer. J. Phys. 21, 418—421 (1953).

Gli Aa., in base a diverse approssimazioni, calcolano la forza e la coppia agente su una sfera conduttrice mobile in un campo magnetico uniforme. Determinano poi la velocità del baricentro e la velocità angolare della sfera, questi vettori decrescono esponenzialmente col tempo, salvo la componente della velocità del baricentro lungo il campo magnetico.

D. Graffi.

Sloovere, H. De: Le stabilité, au sens de Th. De Donder, des lois électromagnétiques de Maxwell. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 183—185 (1953).

Loinger, A.: Un esempio elettrodinamico di teorema di ortogonalità alla Van Hove. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 498—499 (1953).

Watt, James R.: A conducting permeable sphere in the presence of a coil carrying an oscillating current. Canadian J. Phys. 31, 670—678 (1953).

Zadeh, L. A.: Comment on nonlinear filters. J. appl. Phys. 24, 1412—1413 (1953).

● Carson, J. R.: Electric circuit theory and the operational calculus. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company 1953. X, 197 p. \$ 3,95.

Evans, Walter H.: Electrical transients in wave guides. (Abstract of a thesis.) Iowa State College, J. Sci. 27, 166—168 (1953).

Caprioli, Luigi: Onde e. m. di tipo trasversale nelle guide d'onda rettilinee e con dielettrico eterogeneo. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 478—483 (1953).

Verf. beweist, daß in einem Wellenleiter, der von einem inhomogenen Dielektrikum erfüllt ist, keine TEM-Welle besteht, auch wenn der Leiterschnitt nicht einfach zusammenhängend ist (wie es dagegen etwa in einem Kabel der Fall ist). Selbstverständlich wird das Dielektrikum auf jeder der Ausbreitungsrichtung parallelen Geraden als gleich angenommen.

D. Graffi.

Kales, M. L.: Modes in wave guides containing ferrites. J. appl. Phys. 24, 604—608 (1953).

Verf. berechnet die elektromagnetischen Feldtypen, die in einem mit Ferrit erfüllten beliebigen zylindrischen Hohlrohre auftreten. Die sehr aktuelle Arbeit dient der quantitativen Klärung eines Effektes, welcher in der Änderung der Phase und Polarisation einer elektromagnetischen Welle besteht, die einen Ferrit durchsetzt, wenn in der Achsenrichtung des Hohlrohres ein statisches magnetisches Feld angelegt wird. In diesem Falle verhält sich der Ferrit anisotrop, und es gilt der folgende Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} :

$$B_x = \mu H_x - i \mu' H_y; \quad B_y = i \mu' H_x + \mu H_y; \quad B_z = \mu_z H_z; \quad i = (-1)^{1/2}.$$

Mit der Verwendung des angeführten Anisotropiegesetzes gelingt es Verf., unter Annahme der üblichen Randbedingung $\mathcal{E}_t = 0$ die Maxwell'schen Gleichungen auf ein simultanes System von zwei skalaren Differentialgleichungen vom Typus der Wellengleichung zurückzuführen, welche durch die sich aus $\mathcal{E}_t = 0$ ergebende Randbedingung untereinander gekoppelt sind. Zunächst werden die Feldgrößen in Richtung der Querschnittfläche durch die Komponenten E_z, H_z in der z -Richtung dargestellt. Zur Bestimmung der letzteren ergibt sich dann ein System, bestehend aus zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in welchen E_z und H_z verschränkt auftreten. Mittels einer linearen Transformation werden Normalkoordinaten eingeführt, welche das System, nicht aber die Randbedingungen, entkoppeln. Allgemein wird gezeigt, daß ein E - bzw. H -Typ nicht auftreten kann, mit Ausnahme der den Grenzwellenlängen zugeordneten Feldkonfigurationen. Im Besonderen wird die Integration für das kreiszylindrische Hohlrohr durchgeführt, wobei das Medium das eine Mal den Leiter gänzlich erfüllt, das andere Mal koaxial angeordnet ist. Die zugeordneten Eigenwertgleichungen sind in geschlossener Form mittels Zylinderfunktionen von ganzzahligem Index dargestellt und können durch numerische Verfahren gelöst werden.

P. Urban.

Kacnelenbaum, B. Z.: Wellenleiter mit nicht-idealen Wänden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 37—40 (1953) [Russisch].

Es wird das Problem der Bestimmung der Geschwindigkeit, Dämpfung und Konfiguration des Feldes elektromagnetischer Wellen in einem Hohlleiter von beliebigem Querschnitt behandelt, dessen Wandungen gute Leiter sind. Statt Zugrundelegung energetischer Überlegungen wird hier die Lösung durch Potenzreihenansatz durchgeführt, wobei als Entwicklungsparameter der komplexe Wellenwiderstand des Materials der Wandungen verwendet wird. Durch Anwendung dieser Methode kann der Verf. die Grenzbedingung von M. A. Leontovič zugrunde legen und sich auf die Betrachtungen des inneren Gebietes des Wellenleiters beschränken. Um die Methode der sukzessiven Approximation anwenden zu können, bedient sich der Verf. eines sehr originellen Kunstgriffs, indem er so Hilfsfunktionen einführt, daß in die Grenzbedingungen nur das Quadrat der Wellenzahl explizit eingeht. Alle Rechnungen lassen sich ohne weiteres verallgemeinern. *P. Urban.*

Felsen, L. B. and N. Marcuvitz: Slot coupling of rectangular and spherical wave guides. J. appl. Phys. 24, 755—770 (1953).

Ein Hohlleiter, der in einer einzigen Wellenform erregt ist und durch einen Schlitz in den Halbraum ausstrahlt, kann als ein Netzwerk betrachtet werden. Dabei spielt der Halbraum die Rolle einer (kugelförmigen) Übertragungsleitung, der Hohlleiter die einer einfachen gleichförmigen Übertragungsleitung und der Schlitz die Rolle des koppelnden Netzwerks. In der Arbeit wird untersucht, wie viele kugelförmige Übertragungsleitungen angenommen werden müssen, um bei gleicher Wirkung das Fernfeld der Schlitzantenne wiederzugeben. Überdies werden durch Rechnungen auf der Grundlage der Variationsrechnung diejenigen Netzwerkparameter bestimmt, die dem Verbindungsstück zwischen einem rechteckigen Hohlleiter und einem sphärischen Wellenleiter äquivalent sind. Die Ergebnisse haben sich als sehr nützlich erwiesen, um die zerstreuernde Wirkung von Hindernissen auf elektromagnetische Wellen kennenzulernen. *H. Buchholz.*

● **Toraldo di Francia, Giuliano: Onde elettromagnetiche.** Bologna: Nicola Zanichelli Editore 1953. XIII, 286 p. Lire 3000.

This text, based on the author's lectures, offers a clear introduction to the physical and mathematical bases of wave propagation and boundary problems. It follows a middle course between physical and engineering accounts on the one hand and purely mathematical presentations on the other. While full use is made of mathematical methods, these are not allowed to obscure the experimental bases. Developments thought to be primarily mathematical are excluded; this applies to problems involving spherical, Bessel or spheroidal functions. While the work is in the main expository (there are no references to original papers) the sections on parageometric optics and cavity resonators have research interest. Summary of contents: Mathematical introduction (vectors and tensors, Fourier series, stationary phase principle in one and two dimensions). Basic field theory (units, field equations, propagation, potentials, four-dimensional theory) (Chs. I—V). Simple circuits and transmission lines (Ch. VI); the analogy between these and spatial propagation is well brought out in the sequel. Plane and other wave forms, reflection refraction and diffraction (Chs. VII—X). Guided propagation and cavity resonators (Chs. XI—XIII); in accordance with the mathematical limitations the treatment is mainly devoted to general principles and rectangular cases, a full treatment of cylindrical cases being precluded. *F. V. Atkinson.*

● **Zuhrt, Harry: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Eine Einführung in die Theorie der Strahlungsfelder in dispersionfreien Medien.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. 170 Abb., XIV, 473 S. Ganzleinen DM 53,50.

Das Buch soll „die theoretischen Grundlagen der elektromagnetischen Strahlungsfelder und die wesentlichen Ergebnisse der neueren Rechnungen systematisch und vollständig ableiten“ und „durch die Ableitung und Anwendung der verschiedenen Berechnungsmethoden und die vollständig durchgerechneten Beispiele“ die „Wege zur selbständigen Lösung ähnlicher Probleme zeigen“ (Einleitung). Man darf feststellen, daß dieses Ziel sehr wohl erreicht wird. Das Kernstück des Buches ist die ausführliche Darstellung der Antennenstrahlung; die Berechnung aller erdenklichen Antennenausstrahlungen vom Hertzsehen Dipol bis zu den komplizierten Einzelantennen und Antennengruppen wird hier ausführlich abgeleitet und durch zahlreiche sorgfältige und anschauliche Figuren und Diagramme erläutert. Die verständliche Einführung

in die Maxwellsche Theorie zu Anfang des Buches weicht dadurch vom Konventionellen ab, daß die Kirchhoffsche Theorie unmittelbar als Kottlersches Sprungwertproblem eingeführt wird; dies erweist sich als bequem und ist nicht unphysikalischer als die sonst übliche Ableitung. Neben einer kürzeren Darstellung der Drahtwellen und der Wellenleiter enthält das Buch, als Abschluß, die recht vollständige Wiedergabe der Theorie der Wellenausbreitung über ebener und gekrümmter Erde.

Walter Franz.

Twerssky, V.: Reflection coefficients for certain rough surfaces. J. appl. Phys. **24**, 659—660 (1953).

Verf. gibt einen relativ kurz gefaßten Bericht über die Ergebnisse von Untersuchungen, die er 1942 (?) für die U. S. Air-Force durchgeführt hat — und die sich auf die formelmäßige Bestimmung der Koeffizienten der Reflexion elektrisch-magnetischer Wellen an vollkommen leitenden Flächen beziehen, die nicht „glatt“ sind, sondern eine Vielzahl von halbzylindrischen oder halbkugelförmigen Erhebungen besitzen. Diese „Reflexionskoeffizienten“ werden dabei erhalten, indem die pro Flächeneinheit der einfallenden Welle gestreute Energie gleichgesetzt wird dem pro Flächeneinheit der gespiegelten Welle verlorenen Teil der Energie, also der in Richtung des Reflexionswinkels vorhandenen Energie noch hinzugefügt gedacht wird. Sind α und θ Einfallswinkel und Beobachtungswinkel gegen die Flächennormale, so ergibt sich bei halbzylindrischen Unebenheiten der Fläche mit Radien $a \ll \lambda/2\pi$ und Amplitude 1 der einfallenden Welle für die Amplitude der reflektierten Welle

$$E_{\perp} = \gamma e^{ikr} 2 \cos \alpha \cos \theta, \quad E_{\parallel} = \gamma e^{ikr} (-1 - 2 \sin \alpha \sin \theta) \quad \text{mit} \quad \gamma = (\pi i/2 k r)^{1/2} (k a)^2.$$

Es wird ein „Streuquerschnitt“ σ der Fläche pro Flächeneinheit der einfallenden Welle „definiert“ und bestimmt und der „Reflexionskoeffizient“ $R = 1 - \sigma = e^{-\sigma}$ ($\sigma < 1$) definiert und berechnet. Entsprechend für halbkugelförmige Unebenheiten der streuenden Fläche. Außer für elektromagnetische Wellen werden die Verhältnisse auch für akustische Wellen behandelt, wobei für zylindrische Unebenheiten die Größen E_{\perp} und E_{\parallel} den Geschwindigkeitspotentialen für eine freie bzw. eine starre Fläche analog sind. Bei halbkugelförmigen Unebenheiten ist die Analogie nicht vorhanden, doch werden auch hierfür die Formeln für die betreffenden Potentiale sowie die Reflexionskoeffizienten angegeben. Es wird dann noch gezeigt bzw. darauf hingewiesen, daß diese mehr intuitive Behandlung für eine Gruppe von nicht absorbierenden Oberflächen auch analytisch durchgeführt werden kann.

J. Picht.

Pao, Chia-Shan: Modified paraboloid reflectors for shaped beams. Chinese J. Phys. **9**, 45—54 u. engl. Zusammenfass. 55—56 (1953) [Chinesisch].

Clemmow, P. C.: Radio propagation over a flat earth across a boundary separating two different media. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **246**, 1—55 (1953).

Die Ausbreitung einer vertikal polarisierten elektromagnetischen Welle über der Erdoberfläche wird für den Fall untersucht, daß sich Sender und Empfänger über verschiedenartigem Grund befinden, z. B. Festland und Meer. Folgende Idealisierung des Problems wird angenommen: Die Erdoberfläche ist eben; die Grenzlinie auf der Erdoberfläche, an der die beiden Medien zusammenstoßen, ist gerade; der Sender ist eine zur Grenzlinie parallele, unendlich lange und vertikal polarisierte Linienquelle. — Im ersten Teil der Arbeit wird durchweg homogenes Erdreich zugrunde gelegt, das mit einer vollkommen leitenden unendlich dünnen Halbebene bedeckt ist. Das Beugungsproblem für eine aus beliebiger Richtung einfallende ebene Welle wird behandelt, indem die Streuwellen nach ebenen Wellen zerlegt wird, für die Amplitude des im leeren Raum laufenden Teils dieser ebenen Wellen zwei duale Integralgleichungen hergeleitet und diese mit komplexer Integration streng gelöst werden. Aus geeigneter Überlagerung von ebenen Wellen und den zugehörigen Beugungswellen wird die Beugungswelle für die von der Linienquelle ausgehende Zylinderwelle ermittelt. — Der zweite Teil behandelt als Erde zwei in einer vertikalen Halbebene aneinanderstoßende homogene Medien, die beide großen Betrag der komplexen Dielektrizitätskonstante haben. Diese häufig erfüllte Voraussetzung erlaubt die näherungsweise Ersetzung der Erde durch Grenzbedingungen an ihrer Oberfläche. Die weitere Behandlung dieses Problems läßt sich analog zu dem im ersten Teil gelösten Problem durchführen. Wegen vieler Einzelheiten und eingehend diskutierter Spezial- und Grenzfälle muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

J. Meixner.

Wait, James R.: Radiation resistance of a small circular loop in the presence of a conducting ground. J. appl. Phys. **24**, 646—649 (1953).

Für einen schwingenden Dipol, der oberhalb eines homogenen leitenden Halbraums vertikal zu dessen Grenzflächen angeordnet ist, wird der gesamte abgegebene Leistungsfluß berechnet. Dieses Ergebnis wird dazu benutzt, einen Ausdruck für den Strahlungswiderstand einer kleinen Drahtschleife mit einer zur Grenzfläche senkrecht stehenden Achse aufzustellen. Der Strahlungswiderstand wird sehr groß, wenn

die Höhe des Dipols über der Grenzfläche nur ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge ist.

H. Buchholz.

Harrington, Roger F.: Current element near the edge of a conducting half-plane. J. appl. Phys. **24**, 547—550 (1953).

Eine leuchtende Linie mit der stationären Kreisfrequenz ω verläuft parallel zur Kante einer leitenden Halbebene. Die in der leitenden Platte induzierten Wirbelströme verändern das Strahlungsfeld der leuchtenden Linie. Das resultierende Magnetfeld ist ein ebenes Feld, und die Lösung der Aufgabe kann als bewerkstelligt angesehen werden, sobald die Verteilung der Wirbelströme in der Halbebene bekannt ist. Diese Auffassung von dem Zustandekommen des gesamten Feldes legt es von vornherein nahe, die Aufgabe als eine Integralgleichung zu formulieren. Sie ist vom Wiener-Hopschen Typus. Ihre Auflösung wird in der Arbeit kurz beschrieben. Im übrigen wird hierzu auf eine später erscheinende Arbeit hingewiesen.

H. Buchholz.

Chatterjee, J. S.: Radiation field of a conical helix. J. appl. Phys. **24**, 550—559 (1953).

Es wird das Strahlungsfeld einer von einem hochfrequenten Strom durchflossenen Schraubenlinie berechnet, die jedoch nicht einen überall gleichen Durchmesser, sondern wie der Mantel eines Kegels einen linear anwachsenden Durchmesser hat. Der elektrische Feldanteil wird für die Zwecke der Berechnung in die Felder der einzelnen Windungen aufgelöst, und späterhin werden dann die Einzelfelder wieder zusammengesetzt. Dies ist natürlich erst möglich, wenn die Verteilung der Phasengeschwindigkeit entlang den Windungen der Schraubenlinie bekannt ist. Die darüber gemachten Annahmen erscheinen durch die Versuche gerechtfertigt.

H. Buchholz.

Chaney, Jesse Gerald: Free space radiation impedance of rhombic antenna. J. appl. Phys. **24**, 536—540 (1953).

Der Ausdruck für die Eingangsimpedanz eines verallgemeinerten elektrischen Netzwerks, wie es der Verf. betrachtet (vgl. folgend. Ref.), wird partiell integriert und die physikalische Bedeutung gewisser Glieder der Gleichung in Verbindung mit ihrer Anwendung auf Antennenprobleme diskutiert. Unter der Annahme ungedämpft fortschreitender Wellen als erste Annäherung für die Art der Stromausbreitung wird eine Formel für die Strahlungsimpedanz einer rhombischen Antenne aufgestellt. Dabei wird unter der Strahlungsimpedanz derjenige Anteil der Eingangsimpedanz verstanden, der sich aus der komplexen, an das äußere Feld abgegebenen Leistung bestimmt.

H. Buchholz.

Chaney, Jesse Gerald: Simplification for mutual impedance of certain antennas. J. appl. Phys. **24**, 747—750 (1953).

Die Formel für die gegenseitige Impedanz auf Grund einer vom Verf. aufgestellten verallgemeinerten Netzwerktheorie, in der außer den gewöhnlichen Stromkreisgrößen wie Widerstand, Induktivität und Kapazität auch strahlende Leitungsgebilde wie Antennen und Leitungen selbst vorkommen können, wird in der Arbeit durch eine durchsichtigere Formel ersetzt. Dadurch wird die Zahl der erforderlichen Integrationen stark reduziert. Die Anwendung der Formel wird an dem technisch wichtigen Beispiel einer X-Antenne erläutert.

H. Buchholz.

Chaney, Jesse Gerald: Mutual impedance of rhombic antennas spaced in tandem. J. appl. Phys. **24**, 751—755 (1953).

Bei der Prüfung der Formeln für die Selbst- und Gegenimpedanzen von Antennen zeigt sich, daß die gegenseitigen Impedanzen für einzeln betriebene, kollineare Antennen mit stehenden Wellen unmittelbar nach diesen Formeln berechnet werden können, wenn die Antennen in Reihe geschaltet sind. Dagegen müssen unter sonst gleichen Umständen gewisse Änderungen vorgenommen werden, wenn es sich auf

den Antennendrähten um laufende Wellen handelt. Die diesen Fällen angepaßten Formeln werden in der Arbeit entwickelt.

H. Buchholz.

Senior, T. B. A.: The diffraction of a dipole field by a perfectly conducting half-plane. Quart. J. Mech. appl. Math. 6, 101—114 (1953).

Die Beugungsprobleme für eine skalare Kugelwelle an der Halbebene mit der Randbedingung verschwindender Wellenfunktion oder verschwindender Normalableitung und für eine ebene elektromagnetische Welle an der vollkommen leitenden Halbebene sind seit langem gelöst. Als Ausgangspunkt für die Behandlung der Beugung einer elektromagnetischen Dipolwelle mit beliebigem Ort und beliebiger Schwingungsrichtung des Dipols erweist sich das zweite der genannten Beugungsprobleme zweckmäßig: Das Dipolfeld wird in eine Überlagerung von ebenen Wellen aufgelöst; die bekannten Beugungswellen zu diesen ebenen Wellen werden dann wieder zusammengesetzt. Für einen elektrischen Dipol, dessen Achse senkrecht zur Halbebene ist, werden die Rechnungen im einzelnen durchgeführt, und es wird gezeigt, daß die Kantenbedingung erfüllt ist.

J. Meixner.

Jones, D. S.: Diffraction by a thick semi-infinite plate. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 217, 153—175 (1953).

Verf. behandelt die Beugung (zweidimensional) einer harmonischen ebenen Welle an einer halbusendlichen vollkommen leitenden Platte der Dicke d . Ist $d \ll \lambda$, so lassen sich die in der allgemeinen Lösung auftretenden Konstanten, die einem System unendlich vieler Gleichungen genügen, angeben. In der Nähe der Schattengrenze entspricht das Feld dem einer einzigen halbusendlichen Ebene, die mit der näher gelegenen Fläche der Platte zusammenfällt, sofern Terme der $O(R^{-1/2})$ vernachlässigt werden, wenn R den Abstand des Aufpunktes von Plattenrand angibt. Ist $d < 0,1\lambda$, so verhält sich die Platte wie ein halbusendlicher Wellenführer, dessen Seiten über das Ende der Platten um $0,11d$ versetzt sind und dem noch, wenn die Polarisationssebene der einfallenden Welle zur Platte senkrecht liegt, ein zweidimensionaler magnetischer Dipol an seinem Ende hinzugefügt ist. Können Terme $O(kd)$ vernachlässigt werden, so scheint es auf die genaue Form des Plattenrandes nicht anzukommen. Die Platte verhält sich dann wie ein halbusendlicher Wellenführer. Verf. diskutiert anschließend kurz die Ausdehnung seiner Überlegungen auf eine dicke Platte endlicher Länge. Ferner: Ausdehnung der Theorie auf skalare einfallende Wellen, deren Ausbreitungsrichtung nicht in der Ebene senkrecht zur Platte liegt.

J. Picht.

Flammer, Carson: The vector wave function solution of the diffraction of electromagnetic waves by circular disks and apertures. I. Oblate spheroidal vector wave functions. II. The diffraction problems. J. appl. Phys. 24, 1218—1223, 1224—1231 (1953).

In Teil I werden die Sphäroid-Funktionen für das abgeplattete Ellipsoid eingeführt und eine ebene polarisierte Welle nach ihnen entwickelt. Mit ihrer Hilfe wird in Teil II die Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an kreisförmigen Scheiben und Öffnungen streng behandelt. Der Schirm wird dabei als unendlich dünn und ideal leitend angenommen. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten über denselben Gegenstand geht Verf. direkt von den elektromagnetischen Feldstärken aus, und nicht von Potentialfunktionen. An Stelle der üblichen Kantenbedingung wird die Forderung gesetzt, daß am Schirmrand die zum Rand parallele Komponente der elektrischen Feldstärke verschwinden muß, und gezeigt, daß dies im vorliegenden Fall mit der Kantenbedingung identisch ist. Zunächst wird der Fall senkrechten Einfalls behandelt und eine Lösung erhalten, deren Entwicklung in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von Radius/Wellenlänge mit einer früher von Bonkamp angegebenen Reihe identisch ist. Die Lösung für schrägen Einfall wird formal angegeben.

Walter Franz.

Stevenson, A. F.: Solution of electromagnetic scattering problems as power series in the ratio (dimension of scatterer)/wavelength. *J. appl. Phys.* **24**, 1134—1142 (1953).

Durch Entwicklung der elektromagnetischen Feldstärken in eine Reihe nach steigenden Potenzen der Wellenzahl erhält Verf. eine sukzessive Folge von Aufgaben der Potentialtheorie, welche sich lösen lassen, wenn auch die Lösung in den höheren Ordnungen immer komplizierter wird. Allerdings sind die erhaltenen Reihen nur in der nächsten Umgebung des Streuers brauchbar; deshalb wird eine weitere Entwicklung angegeben, welche im Fernfeld gültig ist.

Walter Franz.

Stevenson, A. F.: Electromagnetic scattering by an ellipsoid in the third approximation. *J. appl. Phys.* **24**, 1143—1151 (1953).

Die in der vorangegangenen Arbeit entwickelte Methode wird auf die Beugung am Ellipsoid angewandt, und die zum Quadrat und der vierten Potenz der Wellenzahl proportionalen Glieder berechnet. Dabei werden Richtung und Polarisation der einfallenden Welle sowie die elektrischen und magnetischen Konstanten des Ellipsoids beliebig gelassen. Das Ergebnis läßt sich durch elliptische Integrale ausdrücken, welche im Falle des Rotationsellipsoids in elementare Funktionen ausarten. Die Formeln werden spezialisiert auf die Fälle des Rotationsellipsoids, der Kugel, des ideal leitenden Ellipsoids, der ideal leitenden elliptischen Scheibe und des dazu komplementären Problems einer elliptischen Öffnung im ideal leitenden Schirm; hierbei ergibt sich bei senkrechtem Einfall Übereinstimmung mit den von Bonkamp angegebenen Reihen.

Walter Franz.

Hufford, George A.: A note on wave propagation through an inhomogeneous medium. *J. appl. Phys.* **24**, 268—271 (1953).

Um eine Näherungslösung für die Ausbreitung (skalarer) Wellen durch die die Erde umgebende inhomogene Atmosphäre zu korrigieren, wird auf Näherungslösung und exakte Lösung der Greensche Satz angewandt, was zu einer Integralgleichung für die exakte Lösung führt. Durch sukzessive Lösung dieser Integralgleichung kann man Korrekturen der Näherungslösung gewinnen. Als Anwendung wird die Berechnung des äquivalenten Erdradius und der Ausbreitung über der ebenen Erde behandelt.

Walter Franz.

Verzaux, P.: Transmission des ondes Hertiennes par les gaz fortement ionisés. *J. Phys. Radium* **14**, 310—316 (1953).

Hauptzweck der vorliegenden Untersuchung ist es, die theoretischen Voraussetzungen zu schaffen, um aus optischen Erscheinungen Rückschlüsse auf den Ionisationszustand eines Gases ziehen zu können; gedacht ist dabei vor allem an die aus einem Düsenantrieb austretenden Gase, welche unter dem Einfluß von Stoßwellen so stark ionisiert werden, daß sie Radarwellen reflektieren. Zunächst wird abgeschätzt, daß bei den dort auftretenden Drucken von Tausenden von Atmosphären Temperaturen von einigen 10^4 Grad Kelvin herrschen, welche zu einer mittleren Ionisation von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} führen. Im zweiten Teil der Arbeit wird sodann die Dämpfung und Brechung elektromagnetischer Wellen beim Durchgang durch das ionisierte Medium berechnet.

Walter Franz.

Canals Frau, Damián: Les poles de la matrice S d'un filtre interferentiel. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **25**, 61—63 (1953).

Die Durchlässigkeitsfunktion eines einfachen Interferenzfilters aus einer Anzahl von Platten in gleichen Abständen wird bei senkrechtem Einfall untersucht. Speziell diskutiert wird das analytische Verhalten (die Pole) in einigen Grenzfällen. Die Verhältnisse sind äquivalent zur S-Matrix des entsprechenden eindimensionalen quantenmechanischen Streuproblems.

G. Leibfried.

Bennett, Herbert S.: The electromagnetic transmission characteristics of the two-dimensional lattice medium. *J. appl. Phys.* **24**, 785—810 (1953).

Die Arbeit behandelt das elektromagnetische Verhalten von „Gittermedien“, bestehend aus unendlich langen, parallelen kongruenten Drähten beliebigen Querschnitts, welche in der Ebene senkrecht zu den Zylinderachsen ein regelmäßiges Flächengitter bilden. Um die Eigenschaften einer senkrecht zu den Zylinderachsen sich fortpflanzenden elektromagnetischen Welle zu errechnen, werden die in der Theorie der Festkörper gebräuchlichen Bloch'schen Wellenfunktionen mittels der Wigner-Seitz'schen Zellularmethode ermittelt. Als eine für viele Fälle brauchbare Näherungslösung wird ein elliptischer Drahtquerschnitt behandelt, dementsprechend die Lösung mittels Mathie'scher Funktionen ausgedrückt, deren Koeffizienten aus den Randbedingungen an zwei oder mehr Punktepaaren der Zelloberfläche sich ergeben. Als numerisches Beispiel wird der Kreiszyylinder behandelt und für verschiedene Verhältnisse von Wellenlänge, Gitterkonstante und Zylinderradius die Frequenzgebiete angegeben, für welche das Medium durchlässig oder undurchlässig ist (entsprechend den erlaubten oder verbotenen Energiebändern im Festkörper), sowie der Verlauf des Brechungsindex im Gebiet der Durchlässigkeit aufgezeichnet. — Der Vorzug der hier verwendeten Methode gegenüber anderen Näherungsverfahren besteht darin, daß über das Verhältnis von Wellenlänge, Zellengröße und Durchmesser der Objekte keine Voraussetzungen gemacht werden müssen.

Walter Franz.

Poincelot, Paul: Extension du principe de Fermat au temps de propagation de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 382—384 (1953).

Indem das Fermat'sche Prinzip für eine monochromatische Welle mit der Frequenz multipliziert und dann nach der Frequenz differenziert wird, ergibt sich, daß es auch für die Gruppengeschwindigkeit einer Wellengruppe gilt, daß also auch die Laufzeit der Gruppe auf dem Lichtweg ein Minimum ist.

Walter Franz.

Budden, K. G.: A note on the Airy-integral function. Proc. Cambridge philos. Soc. 49, 574—577 (1953).

Bestimmt man unter Benutzung des Huygen'schen Prinzips die Intensitätsverteilung in der Nähe der Kaustik, die man bei Abbildung eines leuchtenden Punktes durch eine Linse erhält, so erhält man einen Ausdruck, der als Airy'sches Integral bekannt ist. Man hat dabei zu beachten, ob die sich in einem Punkt treffenden verschiedenen Strahlen bereits vor Erreichen dieses Punktes die Kaustikfläche berührt haben oder ob sie erst nach Erreichen des Punktes berühren, da die Strahlen beim Durchgang durch den auf ihnen liegenden Brennpunkt ja einen „Phasensprung“ erleiden. Verf. führt dies für verschiedene Punkte in der Nachbarschaft der Kaustik durch und erhält so für die einzelnen Punkte kurvenmäßige Darstellungen der Phase, mit der die einzelnen Strahlen (nach dem Huygen'schen Prinzip) in dem betreffenden Punkt ankommen. Er zeigt, daß sich für Amplitude und Phase Kurven ergeben, die eine gewisse Verwandtschaft mit der Cornu'schen Spirale besitzen.

J. Picht.

Poincelot, Paul: Sur la propagation de la lumière blanche dans le vide. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 184—185 (1953).

Fragstein, C. v. und Cl. Schafer: Zur Strahlversetzung bei Reflexion (Erweiterung an Herrn Artmann). Ann. der Physik, VI. F. 12, 84—88 (1953).

Berezina, L. Ja.: Die Brechung einer Kongruenz mit reellen Fokalflächen durch ein optisches System. Uspechi mat. Nauk 8, Nr. 1 (53), 111—113 (1953) [Russisch].

Die Arbeit bezieht sich auf die Brechung einer astigmatischen Welle an einer beliebigen Stelle einer beliebigen, also — im allgemeinen Fall — einer nicht kugelförmigen Fläche, die zwei homogene Medien voneinander trennt. Die Arbeit ist dem Referenten leider nicht in allen Punkten verständlich gewesen, da ihm die Literatur, auf die sich Verf. bezieht, unbekannt und die vom Verf. benutzte Nomenklatur daher z. T. unverständlich ist. Es wird eine „Anomalität“ des astigmatischen Strahlenbündels definiert (= Produkt aus Abstand der beiden Brennpunkte und dem \cot des Winkels zwischen den „Brennebenen“). Es werden 4 Theoreme bez. der Änderung der Anomalität bei der Brechung des Strahlenbündels aufgestellt.

J. Picht.

Colombo, Giuseppe: Sopra una questione di ottica geometrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 14, 627—631 (1953).

Verf. zeigt, daß es unter den isotropen (inhomogenen) Medien kein Medium gibt, in dem die Lichtstrahlen längs ihres ganzen Verlaufes konstante Krümmung besitzen, ohne daß diese den Wert „Null“ hat. Es wird darauf hingewiesen, daß

diese Aussage ein Analogon in der Dynamik besitzt, nämlich, daß kein konservatives Kraftfeld möglich sei, für das ein Bündel dynamischer Trajektorien, die einem vorgegebenen festen Wert der Gesamtenergie entsprechen, Kurven konstanter Krümmung sind, wenn diese nicht alle ebene Kurven darstellen. *J. Picht.*

● **Klemperer, O.: Electron optics.** 2nd ed. (Cambridge Monographs on Physics.) Cambridge: At the University Press 1953. XIII, 471 p. 50 s. net.

Das Buch ist eine stark erweiterte Neuauflage des im Jahre 1938 unter demselben Titel in der gleichen Reihe erschienenen Bändchens. Die ersten acht Kapitel geben einen Überblick über die Grundtatsachen, die Bildfehler und die Raumladungseinflüsse. Das neunte Kapitel behandelt die Strahlerzeugung, das nächste Linsen und Strahlerzeuger mit Strichfokus, das elfte Kapitel Ablenkfehler und das letzte Kapitel gibt einen Überblick über Anwendungen der Elektronenoptik in Industrie und Forschung. Das Buch, welches in erster Linie von experimentellen Gesichtspunkten ausgeht, überrascht beim ersten Durchblättern durch die Fülle des dargestellten Materials und die Zahl der erwähnten Arbeiten. Leider hat eine genauere Durchsicht gezeigt, daß manches oft nur flüchtig, manchmal wohl nur aus zweiter Hand, dargestellt ist. So wird der Ref. bei einigen Stellen in die leidige Rolle des Mörkers gedrängt. Auf S. 91 wird z. B. eine Arbeit über das Kreisstromfeld aus dem Jahre 1935 als Vorläuferin der Behandlung des magnetischen Glockenfeldes hingestellt, und später wird öfter darauf zurückverwiesen. Im Jahre 1936 haben aber bereits E. Brüche und W. Henneberg in ihrem zusammenfassenden Bericht über Elektronenoptik (Geometrische Elektronenoptik, *Ergebn. exakt. Naturwiss.* 15, Berlin 1936, S. 381; dies. Zbl. 15, 430) im Einvernehmen mit den beiden Autoren der erwähnten Arbeit von 1935 darauf hingewiesen, daß die Schlüsse dieser Arbeit irrig sind, da die verwendete Reihenentwicklung, auf der sie beruhen, nicht konvergiert. Im vorliegenden Buch wird diese Arbeit als eine detaillierte elektronenoptische Theorie des Kreisstromfeldes bezeichnet. Weiter werde erwähnt, daß die auf S. 7 in Gl. (1. 15) zitierte Formel nicht bei S. Schwarzschild steht, daß die auf S. 164 angeführte Formel nicht von dem zweiten, sondern von dem ersten der auf S. 163 zitierten Autoren angegeben wurde und in der auf S. 151 erwähnten Arbeit (1941a) der Autor nicht eine approximative Formel eines anderen Autors, sondern eine eigene strenge Formel für den Öffnungsfehler 3.0. ausgewertet hat. Ferner scheint uns die Verwendung der sogenannten Spulenformfaktoren, die trotz ihrer suggestiven Bezeichnung im allgemeinen keine physikalische Bedeutung haben, bei Dimensionierungsfragen (S. 88) heute nicht mehr gerechtfertigt zu sein. Überhaupt möchte man wünschen, daß in der Darstellung der Geltungsbereich mancher approximativer Formeln nicht angegeben wird. Bei der Diskussion des Auflösungsvermögens (S. 197) wird die irrige Auffassung von D. Gabor (*The Electron Microscope*, London 1948, S. 43) wiederholt, daß man nach M. Born (1933) den resultierenden Fehler in erster Näherung durch lineare Superposition berechnen könne. Da eine zusammenfassende Darstellung eines so umfangreichen Gebietes wie die Elektronenoptik nicht überall gleich gut sein kann, ist der Ref. der Ansicht, daß das schön ausgestattete Buch wegen der anderen gelungenen Kapitel von vielen Lesern mit Gewinn gelesen werden kann. *W. Glaser.*

Glaser, W.: Über die Bewegung eines „Wellenpakets“ in einer Elektronenlinse. Österreich. Ingenieur-Arch. 7, 144–152 (1953).

Verf. bringt zunächst die bekannten, für die paraxiale Bewegung eines Elektrons in rotationssymmetrischen elektrischen und elektrisch-magnetischen Feldern geltenden Abbildungsgleichungen unter Zugrundelegung von zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen, von denen die eine $(t(z))$ einen vom Achsenpunkt des Objektes mit der Neigung 1, die andere $(s(z))$ einen vom Objektpunkt im Achsenabstand 1 parallel zur Achse ausgesandten Elektronenstrahl darstellt. Anschließend wird in bekannter Weise die elektronenoptische Abbildung vom Standpunkt der Wellenmechanik behandelt, ausgehend von der Euler-Lagrangesehen Gleichungen, wobei sich mit $J_z = p \psi \psi^* =$ Elektronenstromdichte senkrecht zur Einstellenebene $z = \text{const}$ — die Erhaltung der Teilchenzahl in der Formel $\int J_z dx dy = \text{const}$ ergibt. Mit dem aus der Lichtoptik her bekannten Ansatz $\psi = a(z) e^{i \int p(x, y, z) dz}$ spaltet man die Schrödinger-Gleichung durch Trennung von Real- und Imaginärteil in zwei Gleichungen auf. Als allgemeine Lösung ergibt sich wieder der Debyesche Ausdruck — Darstellung einer Kugelwelle durch Überlagerung von ebenen Wellen —, der ausgedrückt die Beziehung zwischen ψ an der Stelle des Bildes und Amplitudenfunktion A („Belegungsfaktor“ nach Picht) ergibt, nämlich $\psi(x, y, z_0) = 2\pi i \hbar p_0^{-3/2} A(x, y)$, wo $p_0 = p(s' - s' t)$ und $p = |2em\Phi(z)|$. Es ergibt sich $J_z(x_1, y_1, z_1) = s_1^{-2} J_z(x_1, y_1, z_0)$, also eine Stromdichteverteilung in der Bildebene, die der der Objektebene unter Berücksichtigung des Bildvergrößerungsfaktors gleich ist. Es folgt Diskussion der Abbildung eines elliptischen Dingfleckes mit Stromdichteverteilung bezüglich der beiden Achsen nach einer Gaußschen Glockenkurve. Es wird gezeigt, daß in jeder Einstellenebene die Stromdichteverteilung gleichfalls die einer Gaußschen Glockenkurve ist, wobei die Streuungen von der Einstellenebene abhängen und in der Bildebene proportional dem Quadrat des Vergrößerungsfaktors vergrößert sind. Ferner wird auf den Zusammenhang mit der Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelation eingegangen. *J. Picht.*

Glaser, Walter und Peter Schiske: Elektronenoptische Abbildungen auf Grund der Wellenmechanik. I, II. Ann. der Physik, VI. F. 12, 240—266, 267—280 (1953).

Teil I: Anwendung der Schrödingergleichung des Elektrons im rotations-symmetrischen elektrisch-magnetischen Felde. Beziehung zwischen der Wellenfunktion (des paraxialen Bereiches) in beliebiger achsensenkrechter Einstellebene und der der Objektebene zeigt, daß eine als „Bildebene“ zu bezeichnende Einstellebene existiert, in der — von einer Maßstabsänderung abgesehen — gleiche Verteilung der Elektronenstromdichte besteht, wie in der Objektebene. Durchrechnung (nach dieser Art) der Abbildung eines Spaltes und einer Kreislochblende. Die in beliebiger (achsensenkrechter) Einstellebene vorhandenen (Fresnelschen) Beugungserscheinungen verschwinden zu einem scharfen Bildrande in der Bildebene. Betrachtung des Blendeneinflusses auf die Abbildung. Behandlung der Abbildung eines Objektes mit periodischer Struktur. — In Teil II wird die Wellenfunktion in einer beliebigen Einstellebene aus ihrem funktionalen Verlauf in der Objektebene abgeleitet, und zwar mittels der Greenschen Formel für ein vorgegebenes elektrisch-magnetisches Abbildungsfeld. Kirchhoffsche Beugungsformel für den felderfüllten Raum. Behandlung der Bildfehler elektrostatischer und magnetischer Elektronenlinsen in wellenmechanischer Weise.

J. Picht.

Burfoot, J. C.: Correction of electrostatic lenses by departure from rotational symmetry. Proc. phys. Soc., Sect. B 66, 775—792 (1953).

Die Korrektur des Öffnungsfehlers durch ein orthogonales, aus nur vier Elektroden bestehendes Abbildungssystem wird untersucht, indem nach der üblichen Störungstheorie die Bildaberrationen, die durch das Astigmatismusglied $\Phi_2(z) = D(z)$ und die Abweichungsfunktion $\Phi_4(z)$ in der Feldentwicklung bedingt sind, berechnet werden. Die Korrekturbedingungen, welche sich durch Nullsetzen dieser Aberrationen ergeben, werden für bestimmte Annahmen über Φ_2 und Φ_4 diskutiert. Die Durchrechnung eines speziellen Beispiels zeigt, daß in diesem Falle die erforderlichen Genauigkeitsansprüche an die Herstellung der Elektrodenformen die praktischen Realisierungsmöglichkeiten weit überschreiten. So werden für eine Reduktion des Öffnungsfehlers auf 10% Toleranzen von $1/5 \mu$ bzw. 40—100 Å in der Herstellungsgenauigkeit angeführt.

W. Glaser.

Iwata, Giiti: Realization of special contact transformations with static electromagnetic fields in vacuo. II. Progress theor. Phys. 9, 97—107 (1953).

Im Anschluß an die früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 48, 214) wird hier zunächst eine sogenannte „Eikonalmatrix“ $S = (c_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) mit $c_{11} = \partial x_r / \partial a_s$, $c_{12} = \partial x_r / \partial b_s$, $c_{21} = \partial y_r / \partial a_s$, $c_{22} = \partial y_r / \partial b_s$ definiert, in der $x_r(t, a_s, b_s)$, $y_r(t, a_s, b_s)$ Lösungen der kanonischen Gleichungen $dx_r/dt = \partial H / \partial y_r$, $dy_r/dt = -\partial H / \partial x_r$ und a_s, b_s die Anfangswerte der kanonischen Variablen x_s, y_s bezeichnen, für die, wenn δ die Variation der betreffenden Größe bezeichnet, $\begin{pmatrix} \delta x_r \\ \delta y_r \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \delta a_s \\ \delta b_s \end{pmatrix}$

gilt. Mit $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ folgt $S^* J S = J$. Mit der Hamiltonschen Funktion wird die Matrix $K = (d_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) mit $d_{11} = \partial^2 H / \partial y_r \partial x_s$, $d_{12} = \partial^2 H / \partial y_r \partial y_s$, $d_{21} = -\partial^2 H / \partial x_r \partial x_s$, $d_{22} = -\partial^2 H / \partial x_r \partial y_s$ gebildet und gezeigt, daß $S(t) = e^{Kt}$ ist. Anschließend wird die Impuls-Koordinaten-Transformation behandelt sowie die Koordinaten-Koordinaten-Transformation. Ferner wird eine isoenergetische stigmatische Transformation angegeben und darauf hingewiesen, daß gewisse notwendige Bedingungen, die der Verf. erhalten hat, sowohl für die Koordinaten-Koordinaten-Transformation als auch für die stigmatische Transformation unabhängig davon sind, ob ein dynamisches System isoenergetisch ist oder nicht. Der nächste Paragraph beschäftigt sich mit einem integrierten Energiespektrometer. Ein solcher Apparat entspricht einem ellipsoidalen Rotationsspiegel, in dem alle von einem Fokus ausgehenden Strahlen sich in dem anderen Fokus

treffen. Endlich behandelt der Verf. noch die relativistische stigmatische Transformation. J. Picht.

Bertein, François: Sur une représentation des lentilles optiques ou électroniques par des quadripôles formés de résistances pures. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2494—2496 (1953).

Ausgehend von den für rotationssymmetrische elektrostatische Linsen geltenden Gleichungen der Elektronenstrahlen

$$d^2\varrho/dz^2 + 3T^2\varrho/16 = 0; \quad T(z) = \Phi'(z)/\Phi(z)$$

wird gefragt, ob und wie es möglich ist, eine Äquivalenz zwischen einer Linse und einem elektrischen Vierpol, der aus reinen Widerständen in einem stetigen Stromkreis besteht, zu schaffen. Dabei wird an eine äquivalente Kette von Zellen gedacht, von denen jede 2 Widerstände (R_0 und $R(z)$) darstellt, wobei $R_0 = \text{const}$ für Reihenschaltung, $R(z)$ für Parallelschaltung (als shunt) gilt. Jede Zelle besitzt eine Länge d . Da die Spannungsgleichung an aufeinanderfolgenden Enden $d^2v/dz^2 - R_0 v/Rd^2 = 0$ ist, wo v die Spannung bezeichnet, so ist — des Vorzeichens wegen — die Äquivalenz nicht unmittelbar gegeben. Durch Transformation $z = f(\zeta)$ und $r = (df/d\zeta)\varrho\Phi^{-1/4}$ findet man für $\varrho(\zeta)$ die Gleichungen

$$d^2\varrho/d\zeta^2 + G\varrho = 0 \quad \text{und} \quad G(\zeta) = \frac{3}{16}T^2f'^2 - (2ff'' - 3f'^2)4f'^2.$$

Es wird weiter auf die Bestimmung von $G(\zeta)$ bzw. $f(\zeta)$ eingegangen: $z = a \operatorname{arctg} \zeta$; $G(\zeta) = (1 + \zeta^2 a^2)^{-2} (\frac{3}{16} a^2 T^2 - 1)$, wo — damit $G(\zeta) < 0$ wird — noch $a = 4 \int_0^{T_m} T_m$ zu setzen ist mit $T_m = T_{\max}$. Weiter folgt Diskussion, unter welchen Bedingungen bez. Linsendicke usw. die Äquivalenz anwendbar ist und welche Modifikationen erforderlich sind, wenn es sich um magnetische Linsen handelt. J. Picht.

Rauch, S. E.: Cycloidal motion of electrons. Math. Mag. 26, 255—262 (1953).

Herleitung der bekannten Cycloiden-Bahnkurven von Elektronen im überlagerten homogenen elektrischen und magnetischen Feld. W. Glaser.

Gautier, Pierre: Calcul numérique des trajectoires dans les systèmes centrés de l'optique électronique. J. Phys. Radium 14, 524—532 (1953).

Die Differentialgleichungen der Elektronenbahnen werden numerisch integriert, indem der zweite Differentialquotient durch den entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt wird. Prüfung am streng integrierbaren Glockenfeld. W. Glaser.

Quantentheorie:

Grawert, Gerald: Eine Theorie der physikalischen Aussagen. Z. Phys. 136, 206—220 (1953).

Die Arbeit enthält in erster Linie eine Darstellung der Birkhoff-Neumannschen „Quanten-Logik“. Die möglichen Messungsergebnisse an einem quantenmechanischen System Σ , das wir uns vereinfachend als durch eine Matrix-Algebra \mathfrak{E} endlichen Grades beschreibbar vorstellen wollen, können gekennzeichnet werden vermittelt der hermiteschen Idempotenten: Die Normalform eines Meßergebnisses ist die Aussage: „Das Idempotent $a^2 = a$ hat im vorliegenden Falle seinen Eigenwert 1 angenommen“. Da diese hermiteschen Idempotenten umkehrbar eindeutig den Rechtsidealen des Schieftringes \mathfrak{E} entsprechen, bilden sie in bekannter Weise einen modularen Verband; die an ihnen auszuführenden Verbands-Operationen sind nach Birkhoff-Neumann analog den logischen Aussagen-Verknüpfungen, jedoch mit dem Unterschied, daß statt des distributiven Aussagen-Verbandes der klassischen Logik hier ein nur noch modularer Verband auftritt. Verf. studiert auch (im Anschluß an eine Arbeit des Ref., dies. Zbl. 36, 296) die Rolle vertauschbarer Idempotenten (für die er die etwas verwirrende Bezeichnung „kom-mensurabel“ gebraucht). Über die genannten Arbeiten anderer Verf. geht die Untersuchung hinaus durch Erörterung auch der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten, deren Betrachtung von diesem Standpunkt aus eine bislang noch unangegriffene Aufgabe war, die hier beachtlich gefördert wird. Dabei beschränkt sich Verf. nicht auf die für den „reinen Fall“ geltenden eigentlich quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten, sondern bezeichnet z. B. die (entsprechend normierte) Dimension eines Idempotents a als Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei Messung von a der Eigenwert 1 gefunden wird, nachdem man lediglich weiß, daß Σ existiert. Dabei wird (wie in älteren Arbeiten v. Neumanns) verkannt, daß dies nur unter speziellen Voraussetzungen über das untersuchte Kollektiv von Systemen Σ richtig ist (thermodynamische Gleichverteilung unendlich hoher Temperatur), wie Lüders neuerdings klar gestellt hat. — Überraschenderweise meint Verf., daß die von ihm dargestellte Theorie der Quantentheorie nur ähnlich, aber nicht mit ihr gleichbedeutend sei; in Wirklichkeit besteht Äquivalenz bis auf den soeben kritisch hervorgehobenen Punkt und bis auf den von Neumann studierten Tatbestand, daß die linearen Unterräume des Hilbertraumes einen nicht mehr modularen Ver-

band bilden, sondern sich in dieser Hinsicht „pathologisch“ verhalten. — Die kritischen Bemerkungen des Ref. sollen nicht verdunkeln, daß es sich um eine verdienstvolle Untersuchung handelt.

P. Jordan.

Sloovere, H. De: Sur la stabilité, au sens de Th. De Donder, des lois de la mécanique ondulatoire. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 39, 336—339 (1953).

Waldmann, Ludwig: Die Erhaltungsgrößen der klassischen Feldmechanik. Z. Naturforsch. 8a, 417—428 (1953).

Für das allgemeine, durch das Bopp-Feynmansche Wirkungsprinzip beschriebene Teilchen werden die Erhaltungssätze diskutiert und Ausdrücke für Impuls, Energie und Drehimpuls abgeleitet. Die Kreisbewegung bei Abwesenheit von äußeren Kräften wird durchgerechnet. Schließlich wird der Spezialfall einer rechteckigen Strukturfunktion behandelt.

A. Papapetrou.

Mitler, Henri: On the linearization of a relativistic Hamiltonian. Amer. J. Phys. 21, 473—474 (1953).

Kothari, L. S.: Motion of a particle across a potential jump. Amer. J. Phys. 21, 468—469 (1953).

Sasakawa, Tatuya: A note on many particle problems. Progress theor. Phys. 9, 182—184 (1953).

Fabre de la Ripelle, Michel: Résolution des équations de perturbation. II. Forme des probabilités. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 459—461 (1953).

Laurikainen, Kalervo V. und Erkki K. Euranto: Beiträge zur numerischen Behandlung der Schrödinger-Gleichung im Falle des Yukawa-Potentials. Z. angew. Math. Phys. 4, 155—158 (1953).

Rahman, A.: Accuracy of perturbation calculated from inaccurate unperturbed wave function. (With special reference to electric polarizability of molecules.) Physica 19, 377—384 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 50, 444) wird der Zusammenhang zwischen den Ungenauigkeiten einer ungestörten Wellenfunktion ψ und den sich daraus ergebenden Ungenauigkeiten der unter Zugrundelegung dieser Funktion ψ als Ausgangsfunktion berechneten Energie der Störung untersucht. *E. Kreyszig.*

Morette De Witt, C. und J. Hans D. Jensen: Über den Drehimpuls der Multipolstrahlung. Z. Naturforsch. 8a, 267—270 (1953).

Die Verff. untersuchen das folgende scheinbare Paradoxon: Nach der klassischen Elektrodynamik steht für einen Multipol der Ordnung LM der Drehimpuls J zur Energie W im Verhältnis M/ω , wo ω die Frequenz ist; die Quantentheorie dagegen verlangt, daß für jedes Quant $J^2/W^2 = L(L+1)/\omega^2$. Verff. zeigen, daß auch die Quantenelektrodynamik bei einer großen Anzahl beteiligter Quanten zu dem klassischen Resultat führt, da sich die Drehimpulskomponenten der Einzelquanten parallel zur Polarachse addieren, die dazu senkrechten Komponenten dagegen herausinterferieren.

W. Franz.

Murai, Yasuhisa: On the group of transformations in sixdimensional space. Progress theor. Phys. 9, 147—168 (1953).

Verf. untersucht die Darstellungen der Gruppe konformer Transformationen in Raum-Zeit, die durch die invariante quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2$ als Gruppe sechsdimensionaler orthogonaler Transformationen vom Trägheitsindex 2 gekennzeichnet ist (Liesche Kugelgeometrie). Gewisse Anzeichen, so die konforme Invarianz der Maxwell'schen Gleichungen, haben die Vermutung aufkommen lassen (Schouten, Bopp), daß die Theorie der Elementarteilchen mit den Transformationen dieser Gruppe bzw. mit den Darstellungen der zugehörigen Lie-Algebra zusammenhängt. Der Standpunkt des Verf. ist dabei derjenige von E. P. Wigner (dies. Zbl. 20, 296), der die unitären Darstellungen unter Zugrundelegung der gegebenen indefiniten Metrik aufsucht. Man kommt damit notwendig zu unendlichen Darstellungen, im Gegensatz zur sechsdimensionalen Theorie von Bopp und dem Ref. (F. Bopp und F. L. Bauer, dies. Zbl. 35, 273), wo zwangsläufig dem besonderen Vorzeichen der Metrik durch einen speziellen Operator η_4 Rechnung getragen wird. — Der Ort wird durch einen Operator dargestellt, es ergibt sich also eine nicht-lokale Theorie. Für die physikalische Deutung ist auf eine spätere Arbeit verwiesen. — Das mathematische Vorgehen ist analog dem elementaren

von L. H. Thomas (dies. Zbl. 24, 300) und führt unglücklicherweise zu sehr unübersichtlichen Darstellungen. Bemerkenswert ist die Angabe von zwei Operatoren, die neben dem Casimir'schen Operator das Zentrum der Matrixalgebra aufspannen. *F. L. Bauer.*

Michel, L.: Selection rules imposed by charge conjugation. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 319—339 und ital. Zusammenfassg. 339 (1953).

Gruppentheoretische Ableitung der auf Ladungskonjugation, Ladungsunabhängigkeit (in des Autors Sprechweise: Vertauschung von Protonen und Neutronen) und Ladungssymmetrie (Invarianz gegen Drehung im Ladungsraum) beruhenden Auswahlregeln durch Ausreduktion von Produktdarstellungen. *G. Lüders.*

Biswas, S. N.: Approximate solution of Heitler's integral equation. Phys. Review, II. Ser. 91, 1026—1027 (1953).

Marx, G.: Die Wechselwirkung der Elementarteilchen und die Erhaltungssätze. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 3, 55—58 (1953).

Hoffmann, Banesh: The similarity theory of relativity and the Dirac-Schrödinger theory of electrons. II. Phys. Review, II. Ser. 91, 751—752 (1953).

Die Lagrangefunktion der früher vom Verf. vorgeschlagenen 6-dimensionalen Verallgemeinerung der Relativitätstheorie (dies. Zbl. 50, 216) wird modifiziert, und die Folgerungen werden kurz diskutiert. *A. Papapetrou.*

Havas, Peter: The classical equations of motion of point particles. II. Phys. Review, II. Ser. 91, 997—1007 (1953).

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 47, 213), in welcher die Bewegungsgleichungen von neutralen Mesonen abgeleitet wurden, zunächst aus der feldtheoretischen Beschreibung ihrer Wechselwirkung und dann entsprechend einer Fernwirkungshypothese. In der vorliegenden Arbeit wird dasselbe Problem für den Fall von geladenen Mesonen untersucht unter der Annahme, daß sie aufeinander entsprechend der ladungssymmetrischen Mesontheorie einwirken. *A. Papapetrou.*

Mehl, Clarence R. and Peter Havas: The classical scattering of neutral mesons. Phys. Review, II. Ser. 91, 393—397 (1953).

Die Verff. wenden die klassischen Bewegungsgleichungen der Partikeltheorie (s. P. Havas, dies. Zbl. 47, 213) auf die Streuung einer ebenen Welle (die in der Fernwirkungstheorie ein spezielles Zusammenwirken aller übrigen Teilchen bedeutet) an neutralen skalaren und vektoriellen Mesonen an. Die Wirkungsquerschnitte unterscheiden sich etwas von denen der Feldtheorie, jedoch zu wenig, um gegenwärtig einer experimentellen Überprüfung zugänglich zu sein. *H. Kummel.*

Rayski, Jerzy: On a regular field theory. I. (Classical.) Acta phys. Polon. 11, 314—327 (1953).

Der Verf. studiert eine klassische (d. h. nicht-quantisierte) Feldtheorie mit einem Formfaktor. Die Bewegungsgleichungen werden zusammen mit Erhaltungssätzen für Ladung, Energie und Impuls aus einem Variationsprinzip erhalten, wobei das Wirkungsintegral nur über ein endliches Raum-Zeitgebiet Ω erstreckt ist. Die in dieser Weise definierten Erhaltungsgrößen (Ladung, Energie, Impuls) sind im allgemeinen von Ω abhängig. In einem Anhang wird gezeigt, daß, wenn der Formfaktor und die Anfangsbedingungen hinreichend regulär sind und wenn die Kopplungskonstante g hinreichend klein ist, die Feldfunktionen sich in eine konvergente Potenzreihe von g entwickeln lassen. *G. Källén.*

Barker, W. A. and Z. V. Chraplyvy: Conversion of an amplified Dirac equation to an approximately relativistic form. Phys. Review, II. Ser. 89, 446—451 (1953).

Die allgemeinste Feldgleichung eines Diraceteilchens, das in einer ableitungsfreien Wechselwirkung mit (fünf verschiedenen) äußeren Feldern steht, wird mit Hilfe der sog. Foldy-Wouthuysen-Transformation (dies. Zbl. 30, 284; 39, 226) bis zur zweiten Näherung in die anschaulichere nichtrelativistische Form gebracht. Die Ergebnisse findet man in einer umfangreichen Tabelle. Dazu ist als Anwendungs-

beispiel der Lamb-Retherford-Effekt durchgerechnet, und zwar mit Hilfe der (phänomenologisch eingeführten) dafür verantwortlichen quantenelektrodynamischen Korrekturterme (anomales magnetisches Moment u. a.). *G. Süßmann.*

Bergmann, Peter G. and Ralph Schiller: Classical and quantum field theories in the Lagrangian formalism. Phys. Review, II. Ser. 89, 4—16 (1953).

Allgemeine Merkmale einer Feldtheorie, insbesondere die als Erhaltungssätze zu deutenden Identitäten, werden unmittelbar aus den Invarianzeigenschaften der Theorie abgeleitet. Anschließend wird die der klassischen Theorie entsprechende quantisierte Feldtheorie sowohl vom Standpunkt des Lagrangeschen, wie auch des Hamiltonschen Formalismus diskutiert. *A. Papapetrou.*

Ma, S. T.: Power-series expansion of the unitary operator $U(t, t_0)$. Phys. Review, II. Ser. 91, 392 (1953).

Für ein eindimensionales Partikel, das sich in einem delta-artigen Potential befindet, wird gezeigt, daß der unitäre Operator $U(t, t_0)$, der durch die Gleichung $i \hbar dU(t, t_0)/dt = H_1(t) U(t, t_0)$; $U(t_0, t_0) = 1$; t_0 endlich (H_1 ist die Wechselwirkungsenergie) definiert ist, eine ganze Funktion der Kopplungskonstanten ist. Der Operator U läßt sich also hier (wo auch gebundene Zustände vorhanden sind) in eine konvergente Potenzreihe der Kopplungskonstanten entwickeln. *G. Källén.*

Power, E. A.: A new proof of the perturbation expansions in quantum mechanics. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 384—391 (1953).

Durch explizites Rechnen wird gezeigt, daß sowohl die Ergebnisse der älteren Störungstheorie wie die der Störungstheorie von Schwinger durch Entwicklung des Operators $\exp[-i(H_0 + H_1)(t - t_0)/\hbar]$ in Potenzen von H_1 erhalten werden können. *G. Källén.*

Utiyama, Ryôyû and Tsutomu Imamura: Difficulty of divergence of the perturbation method in the quantum field theory. Progress theor. Phys. 9, 431—454 (1953).

Die Verff. studieren ein vereinfachtes Modell einer Feldtheorie und zeigen, daß für ihr Modell die Entwicklung der S -Matrix in Potenzen der Kopplungskonstanten eine divergente Reihe gibt. Eine ähnliche Fragestellung ist schon früher von Hurst (dies. Zbl. 48, 447), Thirring [Helvet. phys. Acta 26, 33—52 (1953)] und Petermann [Phys. Review, II. Ser. 89, 1160 (1953), Arch. Sci., Genève 6, 5 (1953)] behandelt worden. Alle vier Autoren haben dasselbe Ergebnis bekommen. Die vorliegende Arbeit unterscheidet sich von den anderen u. a. dadurch, daß die feldtheoretischen Divergenzen mit Hilfe eines Formfaktors behandelt werden. *G. Källén.*

Coester, F.: The symmetry of the S matrix. Phys. Review, II. Ser. 89, 619—620 (1953).

Die aus der Invarianz gegen Zeitumkehr folgende Symmetrie der S -Matrix läßt sich in eine einfachere (keine zeitinversen Zustände enthaltende) Form bringen, falls das die Zustände kennzeichnende vollständige System von Operatoren außer dem Drehimpulsoperator nur solche Operatoren enthält, die invariant gegen Zeitumkehr sind, und falls die Phasen der Wellenfunktionen geeignet gewählt werden. Anwendung unter Zusatzhypothesen auf Kernreaktionen. *G. Lüders.*

Baumann, Kurt: Die Infrarotkatastrophen der Quantenelektrodynamik. Acta phys. Austr. 7, 248—250 (1953).

F. Bloch und A. Nordsieck (dies. Zbl. 17, 235) zeigten als erste durch eine Methode, welche keine Reihenentwicklung nach der Feinstrukturkonstanten enthält, daß die sog. Ultrarotkatastrophe der Quantenelektrodynamik nur durch unzulässige Anwendung jener Entwicklung zustande kommt. In der Tat zeigt es sich, daß sich die Ultrarotdivergenzen der strahlungstheoretischen Korrekturen in jeder Ordnung der Störungstheorie stets gegen die Divergenzen im Wirkungsquerschnitt von entsprechenden Prozessen mit Strahlungsverlust kompensieren. Für diese

Tatsache wird hier eine allgemeine, in beliebiger Näherung der Störungstheorie und für alle Prozesse gültige Verifikation gegeben. *M. R. Schafroth.*

Källén, Gunnar: On the magnitude of the renormalization constants in quantum electrodynamics. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **27**, Nr. 12, 18 S. (1953).

The divergent integrals in quantum electrodynamics appeared heretofore always when applying the perturbation theory, i. e. a power series expansion in the coupling constant e . Thus, what we know is only that the physical quantities are not analytic at the point $e = 0$ so that the perturbation theory is not applicable. The important question is whether the divergences are merely a result of the faulty application of the power expansion method, or whether they are inherent in the formalism of the present electrodynamics itself. To answer this question the author has given a new formulation of quantum electrodynamics in terms of the renormalized operators with explicit use of experimental (renormalized) mass and charge of the electron. The renormalization is performed without any reference to the perturbation theory. It is shown that some of the integrals involved in the renormalization procedure are infinite. The author concludes that the divergences are not merely a result of a power series expansion, but are inherent in the present electrodynamics itself. *J. Rayski.*

Namiki, Mikio and Yosio Suzuki: New formulation of onebody problem in quantum electrodynamics. Progress theor. Phys. **9**, 223—237 (1953).

Die Verf. wollen die Eielektronenzustände der Quantenelektrodynamik streng definieren und ihre Eigenschaften untersuchen. Sie geben vier Bedingungen an, die ein solcher Zustand erfüllen muß: „(i) It is the eigenstate of the total charge operator Q belonging to the eigenvalue $-e$. (ii) It admits some intuitive interpretation of existence at \vec{x} . (iii) The concept of this state vector should not contradict with the uniformity of space-time. (iv) The state must include the electromagnetic effect in such a manner that when the charge constant is zero it reduces to $\psi_{\vec{x}}^*(\vec{x}, t) \Phi_0$ (Φ_0 ist das Vakuum der freien Partikeln und $\psi_{\vec{x}}$ der Feldoperator des Diracfeldes in der Wechselwirkungsdarstellung). Es wird gezeigt, daß die Zustände $\psi_{\vec{x}}^*(\vec{x}, t) \Psi_0$ diese Bedingungen erfüllen. (Ψ_0 das „physikalische“ Vakuum, $\psi_{\vec{x}}$ der Feldoperator in der Heisenbergdarstellung.) Nach der Meinung des Ref. muß man auch fordern, daß die Eielektronenzustände Eigenzustände der Verschiebungsoperatoren P_{μ} sind, und zwar in solcher Weise, daß die Eigenwerte die Bedingung $p^2 + m^2 = 0$ erfüllen. Rechnet man mit Hilfe der Störungstheorie die oben angegebenen Zustände aus, zeigt es sich, daß sie freilich Eigenzustände der Verschiebungsoperatoren sind, aber daß die Eigenwerte (nach Renormalisation) ein Vierenquadrat haben, das alle Werte zwischen $-m^2$ und $-\infty$ annehmen kann. Die gegebene Definition ist deshalb — immer noch nach der Meinung des Ref. — nicht zweckmäßig, und weitere Einschränkungen sind nötig, damit die angegebene Klasse nur Eielektronenzustände enthält. *G. Källén.*

Hamilton, J.: Steady states and the S-matrix. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 97—102 (1953).

Verf. untersucht die Beziehung zwischen dem Dysonschen S-Operator und der Salpeter-Betheschen Gleichung gebundener Zustände, die von Gell-Mann und Low auf die Feynmannschen Form der Elektrodynamik zurückgeführt worden ist. Die interessierenden S-Matrixelemente werden als unendliches Produkt geschrieben, und mit dessen Hilfe kann die Eigenwertgleichung $S\Phi = \lambda\Phi$ in die Nambusche Gleichung (die mit der Bethe-Salpeterschen identisch ist) umgeformt werden. Anschließend werden Einfang- und Emissionsprozesse diskutiert. *G. Sußmann.*

Zimmermann, Wolfhart: Yang-Feldman-Formalismus und gebundene Zustände. Z. Phys. **135**, 473—482 (1953).

Der Verf. studiert unabhängige Elektronen in einem äußeren, zeitunabhängigen Feld. Das Problem wird als Modell einer Feldtheorie verwendet und mit Hilfe des sogenannten Yang-Feldman-Formalismus behandelt. Die Grundgleichungen der Methode enthalten ein Zeitintegral, dessen untere Grenze minus unendlich ist. Dies Integral ist nicht konvergent, aber wird als Abelscher Grenzwert gedeutet. Unter diesen Voraussetzungen wird gezeigt, daß die gebundenen Zustände des Systems nicht im Hilbertraum des freien Feldes enthalten sind, sondern explizit in die Theorie eingeführt werden müssen. *G. Källén.*

Eden, R. J.: Quantum field theory of bound states. IV. Relativistic theory of the excited states of hydrogen. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **219**, 516—526 (1953).

Der Verf. setzt seine früheren Arbeiten [dies. Zbl. **47**, 219, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **217**, 390—408 (1953) und dies. Zbl. **50**, 224] über die Bindungs-

zustände der Quantenfeldtheorie fort. Zur Untersuchung der angeregten Zustände (speziell des Wasserstoffatoms) reicht die Bethe-Salpeter-Gleichung für die Fortpflanzungsfunktion $K(1, 2, 3, 4)$ nicht mehr aus, wenn die virtuellen Übergänge in andere Bindungszustände berücksichtigt werden sollen. Es müssen auch kompliziertere Fortpflanzungsfunktionen benutzt werden, die aus Systemen von Integralgleichungen zu bestimmen sind. Dies führt der Verf. in der ϵ^4 -Näherung durch und findet die von anderen Autoren auf anderem Wege bestimmten Beiträge zum Lamb-shift.

H. Kümmler.

Bhabha, H. J.: Production of mesons and the localization of field energy. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **219**, 293—303 (1953).

Verf. verallgemeinert die Betrachtungen von Fermi und Heisenberg über die Vielfacherzeugung von Mesonen beim Zusammenstoß hochenergetischer Nukleonen, indem er eine Aufteilung der Ruhmasse M des Nukleons derart vornimmt, daß der Anteil $(1 - \epsilon)M$ innerhalb einer Kugel vom Radius $\zeta \leq \hbar/M$ konzentriert ist, während für den Bruchteil ϵM ($0 \leq \epsilon \leq 1$) das zugeordnete Mesonenfeld verantwortlich gemacht wird. Dieser Anteil klingt nach einer zunächst beliebigen Funktion f vom Zentrum des Nukleons nach außen hin ab. Der Fall $\epsilon = 1$; $\zeta = 0$ führt auf die Fermi-Heisenbergschen Ergebnisse. Der Fall $\epsilon \ll 1$; $\zeta = \hbar/M$ (Comptonwellenlänge) ergibt wesentlich kleinere Werte für die Schauerintensitäten als die Heisenbergschen Werte. Ein experimentelles Studium der Mesonenerzeugung beim Zusammenstoß hochenergetischer Nukleonen sollte daher Aussagen über die Lokalisation der Feldenergie bzw. der räumlichen Verteilung der Masse der Nukleonen ermöglichen.

Th. Sexl.

Jordan, Hermann L.: Begrenzung der Lokalisierbarkeit von Wechselwirkungen in der Quantentheorie der Elementarteilchen und Felder. Z. Naturforsch. **8a**, 341—352 (1952).

Der Verf. studiert eine Feldtheorie, die in großen Zügen der schon früher von Wataghin, Yukawa, Møller-Kristensen u. a. verwendeten „nichtlokalen“ Theorie mit einem Formfaktor gleichwertig ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie von einem neuen Gesichtspunkt aus entwickelt und ein spezieller Formfaktor vorgeschlagen. Die Eigenschaften des Formfaktors werden nicht in Einzelheiten studiert. Zum Beispiel ist die wichtige Frage der Konvergenz der höheren Näherung der Selbstenergie nicht diskutiert worden. — Zum Anhang läßt sich bemerken, daß ein Zeichenfehler das erstaunliche Ergebnis liefert, daß das Integral

$$\int g(k^2) \theta(-k^2) e^{ikx} dk = (2\pi)^3 \int_0^\infty da g(-a) \Delta^{(1)}(x, a)$$

für raumartiges x verschwindet. $\left[\Delta^{(1)}(x, a) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk e^{ikx} \delta(k^2 + a) \right]$. Diese Eigenschaft hat bekanntlich das Integral

$$\int g(k^2) \theta(-k^2) \frac{k_0}{|k_0|} e^{ikx} dk = i(2\pi)^3 \int_0^\infty da g(-a) \Delta(x, a),$$

das sich nur in einem Vorzeichen im k -Raum von dem oben erwähnten Integral unterscheidet (cf. z. B. J. Schwinger, dies. Zbl. **33**, 234).

G. Källén.

Hara, Osamu and Haruo Shimazu: On Yukawa's theory of non-local field. II. Progress theor. Phys. **9**, 137—146 (1953).

Part I, this Zbl. **47**, 219. The authors show that the S -matrix postulated by Yukawa (this Zbl. **41**, 572) for his non-local theory reduces to the usual S -matrix of Dyson in the limit when the particle radius tends to zero (contrary to the opinion expressed by Yukawa). The results are compared with other forms of the non-local S -matrix introduced by Yennie and Rayski. The behaviour of Green functions (involved in several non-local variants of the S -matrix) at the light cone is discussed.

J. Rayski.

Ascoli, R.: Interazioni non localizzabili. Confronto fra varie formulazioni. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 745—753 (1953).

Es wird eine Lagrange-Dichte für ein Spinor-Boson-Feld mit dem Wechselwirkungsterm der nichtlokalen Form eingeführt. Die Methode besteht in einer Verallgemeinerung der Kristensen-Møller-Methode [Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 27, Nr. 7 (1952)]. Verf. diskutiert die Beziehung dieser Behandlung zu einigen der früher bekannten (Wataghin, Bopp, Uhlenbeck und Pais, Mac Manus u. a.) und zeigt einige der gemeinsamen Eigenschaften. *P. Budini.*

Budini, P. e C. Villi: Teoria non locale dell'interazione tra particello di Fermi. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1172—1186 (1953).

The non-local quantum field formalism with relativistically invariant form factors [developed first by the reviewer (Rayski, this Zbl. 44, 440) and misquoted by the authors as the formalism of Kristensen & Møller, Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 27, Nr. 7 (1952)] is applied to the case of interacting nucleons, μ mesons and neutrinos. It is shown that the effect of the capture of a μ meson in the process $\mu^- + P \rightarrow N + \nu$ becomes equivalent (owing to a special choice of the form factor) to a two step process $\mu^- + P \rightarrow \mu^- + \pi^- + N \rightarrow N + \nu$ where μ^- denotes a negatively charged μ -meson, P a proton, N a neutron, π^+ a positively charged pion (π -meson), and ν a neutrino. *J. Rayski.*

Wataghin, G.: On the non local interaction and on the statistical interpretation of the cut-off operators. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 500—503 (1953).

Achiezer, A. und R. Polovin: Strahlungskorrekturen zur Streuung eines Elektrons durch ein Elektron. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 55—57 (1953) [Russisch].

Die Strahlungskorrekturen zur Møllerstreuung werden mit Hilfe des Feynman-Dyson-Formalismus untersucht. Zuerst werden Graphen und Matricelemente angegeben, dann wird der differentielle Wirkungsquerschnitt ermittelt und für den extrem- und nichtrelativistischen Fall kurz diskutiert. Die Infrarot-Divergenzen werden, analog wie bei der Potentialstreuung, vermieden, indem auch die unelastische Streuung mituntersucht wird. In der Schlußformel tritt dadurch noch die Maximalenergie des abgestrahlten Photons auf, die dem Experiment angepaßt werden kann. Die Abhandlung ist wohlthuend knapp gehalten, formalistisches und mathematisches Beiwerk ist vermieden, nur Graphen, Matricelemente und Wirkungsquerschnitte werden angeschrieben. — Der gegenständliche Prozeß wurde bereits früher von Lomanitz (Thesis: Second order effects in the electron-electron-interactions, Cornell 1950) behandelt. (Diese Arbeit war dem Ref. nicht zugänglich, Hinweis darauf bei Brown and Feynman, dies. Zbl. 46, 438, Fußnote 7 dieser Arbeit.) Außerdem untersuchte diesen Prozeß auch K. Baumann, Diss. Wien 1950 und dies. Zbl. 46, 438, der jedoch die unelastische Streuung nicht behandelt.

P. Urban.

Bloom, Stanley and Henry Margenau: Quantum theory of spectral line broadening. Phys. Review, II. Ser. 90, 791—794 (1953).

Mit einer sehr bemerkenswerten Methode wird eine quantenmechanische Verallgemeinerung der klassischen Fourier-Formel für die Linienkontur bei Druckverbreiterung unter Verwendung der halbklassischen Strahlungstheorie (Dämpfungsbreite \gg natürliche Linienbreite) erhalten. In der üblicherweise verwendeten quantenmechanischen Störungstheorie wird die Lösung der Schrödingergleichung mit Störung durch das Feld der Störatome C und das Lichtwellenfeld F nach den ungestörten stationären Eigenfunktionen entwickelt. Die Koeffizienten dieser Entwicklung liefern die Intensitätsverteilung dann nur in der adiabatischen Näherung. Hier erfolgt die Entwicklung nach den Lösungen der Wellengleichung mit C , aber ohne F . Dann geben die Koeffizienten die Wahrscheinlichkeit für einen Quantensprung, induziert durch das Feld der Lichtwelle allein, zwischen Zuständen, die durch die störenden Atome zeitabhängig „verschmiert“ sind, und man erhält so auch nichtadiabatische Störungen. Das gleiche Resultat wird noch einmal erhalten auf Grund der Berechnung der Arbeit, die das Lichtwellenfeld am Molekül leistet.

G. Burkhardt.

Weber, J.: Quantum theory of a damped electrical oscillator and noise. *Phys. Review*, II. Ser. **90**, 977—982 (1953).

Le système oscillant est supposé non rayonnant, mais amorti par une résistance, ou par un „moteur ayant une impédance interne infinie“. La théorie quantique montre alors l'équivalence entre la résistance et le bruit de fond plus l'émission spontanée en ce qui concerne l'amortissement. On retrouve une formule de Callen et Welton, et l'on discute les expériences de haute fréquence à basse température qui mettraient en évidence les effets quantiques.

O. Costa de Beauregard.

Sredniawa, Bronislaw: A remark on the dependence of the cross section for pair production by photons on the atomic number. *Acta phys. Polon.* **11**, 331—333 (1953).

Glauber, R. J.: On the gauge invariance of the neutral vector meson theory. *Progress theor. Phys.* **9**, 295—298 (1953).

Die Theorie des Vektormesons wird in solcher Weise behandelt, daß der Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ sich explizit ausführen läßt. (μ ist die Masse des Mesons.) Es wird gezeigt, daß man durch diesen Grenzübergang die Quantenelektrodynamik erhält. Eine ähnliche Fragestellung ist auch von Coester behandelt worden (dies. Zbl. **42**, 455).

G. Källén.

Géhéniau, Jules et Claudine Liesse: Couplage spin-orbite dans des espaces riemanniens. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 303—304 (1953).

Les AA. généralisent l'équation d'ondes de Dirac pour les corpuscules de spin $\hbar/2$ au cas d'un espace-temps riemannien. Dans le cas d'un espace-temps à symétrie spatiale sphérique, le passage à l'approximation non relativiste à partir des équations d'ondes du second ordre fait apparaître un terme de couplage spin-orbite. Les AA. considèrent la possibilité d'utiliser cette propriété dans la théorie des couches nucléaires en reliant la métrique de l'espace-temps dans le noyau et dans son voisinage à la distribution de matière nucléaire par des équations analogues à celles utilisés en théorie de la relativité générale.

G. Petiau.

Fowler, G. N. and G. M. D. B. Jones: On the ionization loss of a fast particle in a dielectric medium. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 597—600 (1953).

Verff. diskutieren die von Huybrechts und Schönberg (dies. Zbl. **48**, 228) vorgeschlagene Modifizierung der Fermischen Theorie des Ionisations-Verlustes, und gelangen zur Schlußfolgerung, daß es keinen Grund gibt, die Fermische Theorie aufzugeben. Sie beweisen, daß man auch für Ionisation den relativistischen Anstieg erhält, wenn man den imaginären Teil der Dielektrizität $\varepsilon(w)$ richtig behandelt. Dies wird durch Anwendung der Kallman-Mark-Formel für $\varepsilon(w)$ erreicht. Das Resultat wird zur Berechnung des Energie-Verlustes durch Ionisation in Sauerstoff angewandt.

P. Budini.

Lenard, A.: Inner Bremsstrahlung in μ -meson decay. *Phys. Review*, II. Ser. **90**, 968—973 (1953).

Unter innerer Bremsstrahlung versteht Verf. die Photonen, die beim Zerfall geladener Partikel entstehen. Während die bisherigen Berechnungen der inneren Bremsstrahlung beim μ -Meson-Zerfall sich auf das nun verlassene Neutrino-Modell dieses Teilchenzerfalls stützten, betrachtet Verf. das Problem auf Grund der heutigen Ansichten über diesen Zerfall [z. B. L. Michel, *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 814 (1952)]. Während Abragam und Horowitz [*J. Phys. Radium* **12**, 952 (1951)] nur die rein skalare Kopplung der Spinoren in Betracht ziehen, berücksichtigt Verf. die Emission von 2 Neutrinos und untersucht allgemein die Abhängigkeit der inneren Bremsstrahlung vom Kopplungstypus. Die Ergebnisse werden diskutiert; es zeigt sich, daß eine Mesonenquelle von 10^8 Teilchen/sec nötig ist, um Koinzidenzen zwischen Bremsstrahlungsphotonen und Zerfallselektronen experimentell nachweisen zu können.

F. Cap.

Elton, L. R. B.: Elastic scattering of electrons. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 66, 806—812 (1953).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit von Feshbach (dies. Zbl. 43, 420) wird gezeigt, daß man auch für hohe Energien aus Elektronenstreuexperimenten keine Bestimmung von Kernradius und Ladungsverteilung erwarten darf. Feshbach zeigte, daß die Ergebnisse der Streuversuche in Energiebereichen, die wesentlich kleiner als 50 me^2 sind, weitgehend unabhängig vom zugrunde gelegten Modell für die Ladungsverteilung im Kern sind. Für diese Bereiche ist nur die Streuwelle mit $l=0$ für Abweichungen von der Coulombstreuung maßgebend. Elton zeigt nun, daß auch für Energiebereiche, in denen die nächsten Partialwellen hinzugenommen werden müssen, dieselbe Unabhängigkeit vom Modell besteht. Er untersucht zunächst halbklassisch, für welche Energiebereiche eine Betrachtung der nächsten Kugelwellen notwendig ist. Dann wird mit einer ähnlichen Schlußweise wie bei Feshbach, aber mit einem anderen Approximationsverfahren untersucht, wann die Phasenverschiebung modellunabhängig wird. Dabei wird insbesondere für zwei wichtige Spezialfälle (homogen geladene Kugel, Kugelschale) dasselbe Resultat erhalten wie bei Feshbach. Die Abweichungen bei sehr hohen Energien sind so gering, daß sie infolge anderer vorhandener Fehler (Strahlungskorrektur, ungenaue Kenntnis des Kernradius) nicht ins Gewicht fallen.

P. Urban.

Christian, R. S. and J. L. Gammel: Elastic scattering of protons and neutrons by deuterons. *Phys. Review, II. Ser.* 91, 100—121 (1953).

Die Verf. berechnen die Phasenverschiebungen für die $(p-d)$ - und $(n-d)$ -Streuung für den Fall von Partialwellen mit $l=1$ nach der Bornschen Methode. Die Berechnungen werden ausgeführt unter Zugrundelegung eines allgemeinen zentralen Kernpotentials mit radialer Abhängigkeit nach Yukawa und Gauß, wobei dieselben nach Reichweite und Tiefe so gewählt werden, daß die experimentellen Daten bei tiefer Energie für die $n-p$ und $p-p$ und im Falle des Yukawa-Potentials die $n-p$ Daten bei hoher Energie erklärt werden. Tensorkräfte werden nicht in Betracht gezogen. Diese Annahmen werden als Ausgangspunkt einer Analyse der Phasenverschiebungen der $p-d$ Daten im Energiebereich $0-10 \text{ MeV}$ genommen. Hierbei ergibt sich, daß die Phasenverschiebungen, die sich aus der Analyse ergeben, mit jenen, berechnet nach der Bornschen Näherung, übereinstimmen. Die ^4S - und ^2S -Phasenverschiebungen zeigen eine vernünftige Energieabhängigkeit; Die korrekte Folge der $n-d$ Streulängen ergibt sich zu

$$a_4 = 6,2 \pm 0,2 \times 10^{-13} \text{ cm}, \quad a_2 = 0,8 \pm 0,3 \times 10^{-13} \text{ cm}.$$

Da diese Größe mit einigen früheren theoretischen Annahmen nicht übereinstimmen, wurden die Streulängen und die S -Phasenverschiebungen für den Energiebereich $0-10 \text{ MeV}$ unter Benutzung eines Variationsverfahrens berechnet, unter Vernachlässigung der Polarisation. Außerdem wurden $n-d$ Winkelverteilungen berechnet und mit den Experimenten verglichen. Die Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten liefert eine starke Rechtfertigung für die Schlüsse, welche aus der Theorie der Kernpotentiale für die $(p-d)$ - und $(n-d)$ -Streuung bei niedriger Energie gezogen werden können. Die Streuung ist fast unabhängig von den Kräften zwischen gleichen Partikeln und den $n-p$ Potentialen ungerader Parität. Außerdem ist sie fast unabhängig von der Form der ^3S und ^1S - $n-p$ Potentiale. Die ^2S -Streulänge ist jedoch gegenüber dem Singulettpotential $n-n$ gerader Parität empfindlich und wird als Funktion der Tiefe dieses Potentials ermittelt. Sie ist gegenüber $n-n$ Potentialen unempfindlich.

P. Urban.

Halpern, O. and G. L. Appleton: The scattering of slow neutrons by O_2 molecules. *Phys. Review, II. Ser.* 90, 869—879 (1953).

Die Streuung langsamer Neutronen an O_2 -Molekülen enthält zwei wesentliche, nicht interferierende Anteile: Kernstreuung und magnetische Streuung. Beide Anteile werden für verschiedene Wellenlängen numerisch berechnet, wobei die thermische Bewegung der O_2 -Moleküle berücksichtigt wird. Dies führt z. B. dazu, daß mit sinkender Neutronenenergie der Querschnitt für hyperelastische Streuung anwächst. Für die magnetische Streuung wird eine Verteilungsfunktion der magnetisch aktiven Elektronen von der Form $\delta(r-r')$ angenommen und damit der Formfaktor bestimmt. Diese Darstellung läßt die Möglichkeit offen, mehrere solche „Schalen“ zu überlagern und damit genauere Experimente zu beschreiben. Die Verf. hoffen, daß man so die Verteilung der magnetisch aktiven Elektronen wird messen können. Die totalen Wirkungsquerschnitte werden angegeben für $T = 300^\circ\text{K}$ und $\lambda_N = 5,1 \text{ \AA}; 7,5 \text{ \AA}; 10 \text{ \AA}$.

R. Hagedorn.

Fröman, Per Olof: On the influence of spin and isotopes in the kinematical theory of neutron diffraction. *Ark. Fys.* 6, 113—117 (1953).

Es wird die Streuung von Neutronen an Einkristallen untersucht, wobei Temperatur-, Spin- und Isotopeneffekte berücksichtigt, dagegen die magnetische Wechselwirkung zwischen Neutron und Atomkernen außer Betracht gelassen werden. Das Potential wird aus den Beiträgen der einzelnen Atomkerne, welche punktförmig und

spinabhängig angenommen werden, aufsummiert. In üblicher Weise wird das Matrixelement für den Übergang des Neutrons aus einem bestimmten Anfangszustand in einen bestimmten Endzustand aufgestellt, daraus der Wirkungsquerschnitt bestimmt und in allgemeiner Weise eine Mittelung über die bei gegebener Temperatur vorliegenden Schwingungszustände des Gitters vorgenommen. Für die weitere Behandlung wird auf eine frühere Arbeit [P. O. Fröman, Ark. Fys. 4, 191—202 (1952)] hingewiesen.

H. Volz.

Sawada, Katurō: On the scattering problem in pseudoscalar meson in pseudovector coupling. Progress theor. Phys. 9, 455—467 (1953).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Meson-Nukleon-Streuung und verwendet folgende Annahmen: 1. Pseudoskalare Mesonen in pseudovektorieller Kopplung, 2. Schwache Kopplung, 3. Ruhendes punktförmiges Nukleon und nicht relativistische Näherung, 4. Beschränkung auf den Hamilton-Operator zweiter Ordnung in der Kopplungskonstanten, 5. Keine Renormalisierung, dafür Verwendung „effektiver Kopplungskonstanten“. Mit dem gewonnenen Hamilton-Operator wird die Schrödingergleichung aufgestellt und daraus ein effektives Meson-Nukleon-Potential abgelesen; schließlich wird der Streuwirkungsquerschnitt berechnet. Die auftretenden Divergenzen werden in die Kopplungskonstante hineingesteckt. Die Ergebnisse stimmen — abgesehen von denen für S -Wellen — mit denen von Brueckner (dies. Zbl. 46, 218) überein.

F. Cap.

Blair, J. S. and G. F. Chew: Fourth-order corrections to the scattering of pions by non-relativistic nucleons. Phys. Review, II. Ser. 90, 1065—1067 (1953).

Wie Blair und Chew zeigten [Annual Review of Nuclear Science 2, 162 ff. (1952)], dürfte die Pion-Nukleon-Wechselwirkung im Pionfeld linear und nicht sehr stark sein, so daß die übliche, auf einer schwachen Wechselwirkung basierende Störungstheorie ihrer Meinung nach richtig sein dürfte. In der vorliegenden Arbeit berechnen die Verff. die Beiträge bis zur vierten Ordnung in der Kopplungskonstanten zur Phase bei der Pion-Nukleon-Streuung für Energien < 1 BeV. Die Nukleonen werden als unendlich schwer angesehen, so daß (s. Blair und Chew, l. c.) die Pionen nur in p -Zuständen mit den Nukleonen in Wechselwirkung treten. Als Wechselwirkungspotential wird das statische Potential der pseudoskalaren ladungssymmetrischen Mesonentheorie in reiner Gradientenkopplung verwendet mit der Annahme eines ausgedehnten Nukleons. Es zeigt sich, daß die Ergebnisse die Dancoffsche Näherungsmethode dann stützen, wenn nicht intermediäre virtuelle Pionen bei hohen Energien die Streuung vorwiegend bestimmen, also wenn sich das Nukleon nicht über ein Gebiet von der Größe seiner eigenen Comptonwellenlänge hinaus erstreckt.

F. Cap.

Deser, Stanley und Paul C. Martin: A covariant meson-nucleon equation. Phys. Review, II. Ser. 90, 1075—1078 (1953).

Die Verff. leiten eine relativistisch invariante Zweikörpergleichung für das System Meson-Nukleon ab in einer Form, die eine Renormalisierung gestattet, Diese Gleichung wird für einen Spezialfall auf eine dreidimensionale Form reduziert [Salpeter, dies. Zbl. 48, 225; Lévy, dies. Zbl. 48, 224, 226; Leaf, Phys. Review, II. Ser. 91, 1090—1101 (1953)] und diskutiert. Die sich ergebende Gleichung entspricht Ergebnissen, die nach der Tamm-Dancoff-Methode gewonnen werden können [vgl. Phys. Review, II. Ser. 90, 372 (1953) (abstract)]. S. auch folgendes Ref. *F. Cap.*

Karplus, Robert, Margaret Kivelson, and Paul C. Martin: A note on meson-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. 90, 1072—1075 (1953).

Die Verff. verwenden die Bethe-Salpeter-Gleichung (Salpeter and Bethe, dies. Zbl. 44, 431) zur näherungsweisen Lösung des relativistischen π^- , p -Streuproblems. Um die Selbstenergieterme leicht erkennen zu können, wird die Rechnung auf die elastische, von Austauschkräften freie Streuung beschränkt. Die Renormalisierung wird in üblicher Weise vorgenommen. Verff. berechnen aus der (unitären) Streu-

matrix den totalen Streuwirkungsquerschnitt und zeigen, daß dieser von der Größe der Kopplungskonstanten praktisch unabhängig ist; seine Energieabhängigkeit wird berechnet und diskutiert. *F. Cap.*

Fermi, E.: Nucleon polarization in pion proton scattering. Phys. Review, II. Ser. 91, 947—948 (1953).

O'Rourke, R. C.: Multiple Compton scattering of low energy gamma-radiation. Phys. Review, II. Ser. 89, 999—1003 (1953).

Ein monochromatischer γ -Strahl ($E \ll 0.5$ MeV) fällt senkrecht auf eine unendlich ausgedehnte planparallele Platte. Als Funktion der Schichtdicke wird die Aufweitung des Energiespektrums durch „Compton-Vielfachstreuung“ berechnet. Zugrunde liegt die exakte Transportgleichung von L. Foldy (dies. Zbl. 43, 434). Sie wird durch Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Kugelfunktionen gelöst. Für den isotropen Fall wird das Ergebnis mit älteren Überlegungen des Verf. [Phys. Review, II. Ser. 85, 881—887 (1952)] verglichen. *W. Klose.*

Rose, M. E.: The analysis of angular correlation and angular distribution data. Phys. Review, II. Ser. 91, 610—615 (1953).

Es werden statistische Fragen untersucht, die beim Messen von Winkelverteilungen und -korrelationen sowie beim Messen von Zählraten auftreten: 1. Bei Winkelverteilungsmessungen mißt man immer nur die Zahl von Ereignissen in einem, endlichen Raumwinkel, während die Verteilungsfunktionen sich auf verschwindenden Raumwinkel beziehen. Die Korrektur wird angegeben. 2. Bei derartigen Messungen die auf Grund von 1. korrigiert gedacht werden, kann man nur für endlich viele Winkel je endlich viele Ereignisse zählen. Dabei hält man für jeden Winkel entweder die Zählzeit oder die Zahl der Ereignisse fest, die jeweils andere dieser beiden Größen wird dann eine Funktion des Winkels. Für beide Fälle werden wahrscheinlichste Zählrate und Gewicht bestimmt. — 3. Die Ergebnisse werden nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Folge von z. B. Kugelfunktionen dargestellt und dabei die Gewichte benutzt. Der mittlere quadratische Fehler der Koeffizienten wird angegeben a) soweit durch die Statistik bedingt und b) soweit durch nicht-systematische Fehler hervorgerufen. Ein Kriterium für die notwendige Zahl von Entwicklungsgliedern wird aufgestellt. 4. Für den Fall während der Meßzeit merklich abklingender radioaktiver Quellen wird eine implizite Formel für die Zählrate berechnet. *R. Hagedorn.*

Fano, U.: Geometrical characterization of nuclear states and the theory of angular correlations. Phys. Review, II. Ser. 90, 577—579 (1953).

Verf. gibt für die geometrische Seite der Theorie der Winkelkorrelation bei sukzessiven Prozessen eine Graphendarstellung, die eine übersichtliche Deutung des bekannten Vorgehens von Racah liefert und zu einer Technik für den geometrischen Teil des Auswertungsprozesses ausgebaut werden kann. *F. L. Bauer.*

Cox, J. A. M. and S. R. de Groot: Angular distribution of radiation emitted by arbitrary ensembles of nuclei. Physica 19, 683—688 (1953).

Eine beliebige Gesamtheit von Kernen kann entweder durch eine Dichtematrix oder durch die kürzlich von Fano [Nat. Bur. Stand., Washington DC, Report No 1214 (1951)] angegebenen statistischen Tensoren beschrieben werden. Mit Hilfe letzterer kann eine geschlossene Formel für die Winkelverteilung der Kernstrahlung der Gesamtheit der Kerne angegeben werden. Einige Anwendungsmöglichkeiten derselben, z. B. auf die Winkelkorrelation des Neutrons und der γ -Strahlung bei der Reaktion ${}^7_3\text{Li} (d, n){}_4^8\text{Be}^* (\gamma)$ werden diskutiert. *Th. Seel.*

Tolhoek, H. A. and J. A. M. Cox: Angular distribution and polarization of gamma radiation emitted by oriented nuclei. Physica 19, 101—119 (1953).

Unter der Annahme reiner Multipolübergänge werden die Winkelverteilung und die Polarisation der von orientierten Kernen emittierten γ -Strahlung berechnet. Zur Beschreibung des orientierten Kernes werden $2j + 1$ unabhängige Parameter

benützt, entsprechend der Spinquantenzahl j des Kerns. Der Polarisationszustand der γ -Strahlung wird durch den Polarisationsgrad P und einen reellen dreidimensionalen Vektor charakterisiert. Für den Spezialfall der Dipol- und Quadrupolübergänge werden Formeln angegeben, die zur numerischen Auswertung geeignet sind.

Th. Seel.

Cox, J. A. M. and H. A. Tolhoek: Gamma radiation emitted by oriented nuclei. The influence of preceding radiations; the evaluation of experimental data. *Physica* **19**, 673—682 (1953).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **46**, 224) untersuchten die Verff. die Winkelverteilung und die Polarisation der γ -Strahlung, welche von orientierten Kernen emittiert wird, und konnten sie mit Hilfe von Parametern f_k behandeln, welche die Orientierung der emittierenden Kerne charakterisieren. Geht der γ -Strahlung jedoch ein β - oder γ -Übergang voraus, so ändern sich die Parameter f_k . Dafür werden explizite Formeln angegeben. Es schließt sich eine Diskussion über die Möglichkeiten an, aus der experimentellen Untersuchung der γ -Strahlung von orientierten Kernen Rückschlüsse auf die physikalischen Eigenschaften der emittierenden Kerne ziehen zu können.

Th. Seel.

Breitenberger, E.: On the geometry of angular correlation experiments. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 846—847 (1953).

Królikowski, W.: Directional correlations for simultaneous two-quanta processes. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **1**, 27—33 (1953).

Dąbrowski, J.: Angular correlations of three successive gamma quanta. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III* **1**, 14—17 (1953).

Morita, Masato: On the electron-neutrino angular correlation. *Progress theor. Phys.* **9**, 345—358 (1953).

Verf. berechnet die $(\beta - \nu)$ -Korrelationen in den Ordnungen 0 und 1 der Fermischen Theorie und der Ordnung 0 der Majoranaschen Theorie, und zwar für alle fünf Wechselwirkungstypen mit Einschluß der Interferenzglieder; es ist $m_\nu = 0$ angenommen; die Wirkung der Kernladung ist voll berücksichtigt. Im Falle $m_\nu > 0$ beschränkt sich Verf. auf die erlaubten Übergänge (Ordnung 0) und die Näherung $Z = 0$. Der größte Teil der Resultate ist in einer Tabelle zusammengestellt. Die Messungen an P^{32} sind danach (nur) mit der tensoriellen oder mit der vektoriellen Kopplung verträglich.

G. Süßmann.

Petschek, Albert G.: The absorption of slow π mesons by He^4 nuclei. *Phys. Review, II, Ser.* **90**, 959—967 (1953).

Bei der Absorption eines negativen Pions durch einen $\text{He } 4$ -Kern können die folgenden Endzustände erreicht werden: (1) $p + 3n$, (2) $d + 2n$, (3) $t + n$. Verf. berechnet das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für den Einfang aus der K -Schale und Bildung eines dieser drei Endzustände zu 1:1,3:0,7 unter den folgenden Annahmen: die Kernkräfte werden durch pseudoskalare Mesonen, die in ladungssymmetrischer Weise jeweils nur zwischen zwei Nukleonen ausgetauscht werden, hervorgerufen; es werde nur pseudovektorielle Kopplung angenommen, und mit Ausnahme der Absorption von Mesonen aus einem p -Zustand seien die Kernkräfte reine Zentralkräfte; es sei $v/c \ll 1$, so daß nichtrelativistisch gerechnet werden kann. Die Wellenfunktion des $\text{He } 4$ -Kernes wird nach der Variationsmethode bestimmt, wobei sich zeigt, daß der Ansatz des Verf. günstiger ist als Ansätze anderer Autoren (z. B. Gaußsche Wellenfunktion). Unter Annahme vernünftiger Werte für die Kopplungskonstante ergibt sich, daß 20% der Absorptionen Einfänge aus der $2p$ -Schale sind. Gammaquanten treten hierbei höchstens bei 1% der Einfänge auf, während Ladungs-Austausch-Reaktionen aus energetischen Gründen überhaupt verboten sind.

F. Cap.

Edmonds, A. R.: Nuclear binding energies and the jj -coupling shell model. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **66**, 793—799 (1953).

Hitchcock, A. J. M.: Pairing energy in the $j-j$ coupling model. *Philos. Mag., VII, Ser.* **44**, 766—771 (1953).

Bei der Berechnung der Paarungsenergien im jj -Modell (Goeppert-Mayer, dies. Zbl. **36**, 278) waren, abgesehen von grundsätzlichen, durch den Erfolg gemäßigt-

ten Bedenken, zwei Punkte verbesserungsbedürftig: 1. Statt der δ -Funktion in der Wechselwirkung sollte eine Funktion mit etwa der Reichweite der Kernkräfte stehen, 2. das Integral über die Radialeigenfunktion sollte genauer ausgewertet werden. Das zweite ist geschehen (Oszillatoreigenfunktionen), das erste in nur einem Fall ebenfalls (nur Ergebnis angegeben). Einige Diskrepanzen verschwinden. Der Mittelwert der Paarungsenergie über mehrere Gebiete des periodischen Systems als Funktion der Nukleonenzahl kommt nicht richtig heraus. *R. Hagedorn.*

King, R. W. and D. C. Peasle: Odd-odd spins and j - j coupling. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1001—1002 (1953).

Dresner, Lawrence: Spin-orbit coupling in pseudoscalar meson theory. Phys. Review, II. Ser. **91**, 201—202 (1953).

Bekanntlich hat Levy (dies. Zbl. **48**, 224) darauf hingewiesen, daß die Matrix γ_5 der pseudoskalaren Mesonentheorie bei Entwicklung der Matrixelemente nach v/c in zweiter Ordnung zu einem eine Spin-Bahn-Kopplung enthaltenden adiabatischen Nukleonpotential führen muß. Verf. untersucht nun die Beiträge verschiedener zwei, drei und vier Nukleonlinien enthaltenden Graphen zum Spin-Bahn-Kopplungsterm und findet, daß bei fast allen Graphen „eine Mesonenlinie, die an einem Vertex der i -ten Nukleonlinie beginnt und auf der j -ten Nukleonlinie endet“, für einen Term $\sigma_i (V_{ij} V) \times p_i$ verantwortlich ist. In einem Spezialfall geht dies über in $r_{ji}^{-1} (dV/dr_{ij}) \sigma_i L_i$. *F. Cap.*

Chisholm, R. and B. Touschek: Spin orbit coupling and the mesonic lamb shift. Phys. Review, II. Ser. **90**, 763—765 (1953).

Eine der möglichen Ursachen für die Spin-Bahnkopplung im Kern ist der „mesonische Lamb-shift“: Das Selbstfeld des Nukleons wird durch ein äußeres Potential geändert. Die Korrektur zweiter Ordnung liefert für die skalare und pseudoskalare Mesentheorie einen Erwartungswert der Potentialänderung eines Nukleons, der sich als Spin-Bahn-Potential schreiben läßt. Die skalare Theorie liefert das richtige Vorzeichen, aber die Korrektur ist um Größenordnungen zu klein, während im pseudoskalaren Fall bei richtiger Größenordnung das falsche Vorzeichen resultiert.

R. Hagedorn.

Glaubman, Michael J.: Spins and parities of excited states in even-even nuclei. I. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1000 (1953).

Talmi, Igal: Spins and parities of excited states in even-even nuclei. II. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1001 (1953).

Scharff-Goldhaber, Gertrude: Excited states of even-even nuclei. Phys. Review, II. Ser. **90**, 587—602 (1953).

Die Arbeit enthält eine Tabelle und eine Diskussion aller bekannten Drehmomente, Paritäten und Anregungsenergien des n -ten angeregten Zustandes mit $n = 1, 2$ und 3 für sämtliche gg -Kerne. Bemerkenswert sind folgende Regeln: (für $n = 0$ ist bekanntlich $I = 0^+$), $n = 1$ hat meistens $I = 2^+$ und $n = 2$ entweder $I = 2^+$ oder $I = 4^+$. Die niedrigste Anregungsenergie ($n = 1$) ist, von hohen Maximalwerten bei den abgeschlossenen Schalen abgesehen, eine relativ glatte, monoton abnehmende Funktion von N und Z . Diese Funktion besitzt eine eigentümliche Symmetrie in der Umgebung der Sn -Kerne. In vielen Fällen wird durch Hinzufügen eines Protonenpaares die Anregungsenergie ($n = 1$) kaum geändert. Die theoretische Erwartung, daß für $Z = g$ und $A = g$ die niedrigste Anregungsenergie von Z^A durch die von Z^{A+1} oder $(Z+1)^A$ nicht übertroffen werden kann, steht in ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Tatsachen. Die Diskussion zeigt, daß fast das gesamte gesammelte Erfahrungsmaterial entweder mit dem Schalen- oder mit dem Tropfenmodell gedeutet werden kann (z. T. sogar mit beiden Modellen). Schwierigkeiten bereiten die relativ niedrigen Anregungsenergien sowie die Seltenheit von $(Z = n)$ -Isomeren im Bereich der seltenen Erden.

G. Süßmann.

Marty, Claude, Roger Nataf et Jacques Prentik: Sur le spin de certains noyaux impairs-impairs. I. Formules générales. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2387—2389 (1953).

Marty, Claude, Roger Nataf et Jacques Prentik: Sur le spin de certains noyaux impairs-impairs. II. Calculs pratiques et résultats. III. Cas du potassium 40. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 31—33, 137—139 (1953).

Cini, M. and A. Gamba: Has the isotopic spin any sense for light particles. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 1040—1046 (1953).

Wangsness, Roald K.: Geometrical solution for a nuclear moment in a magnetic field. Amer. J. Phys. 21, 274—276 (1953).

Green, Alex E. S. and David F. Edwards: Discontinuities in the nuclear mass surface. Phys. Review, II. Ser. 91, 46—53 (1953).

Breit, G. and R. M. Thaler: Relativistic corrections to the magnetic moments of nuclear particles. Phys. Review, II. Ser. 89, 1177—1186 (1953).

Ferrari, F.: On the excitation energy of a heavy nucleus described by areal fermi gas. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 94—97 (1953).

Morpurgo, G.: Sull'energia di legame dell' ^5He e del ^6Li . Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 473—488 und engl. Zusammenfassg. 489 (1953).

Vinti, John P.: Theory of the penetration of γ -rays through thin barriers. Phys. Review, II. Ser. 91, 345—348 (1953).

Herrmann, Johann und Theodor Sexl: Zur quantitativen Theorie der radioaktiven α -Emission. Acta phys. Austr. 6, 288—305 (1953).

Die Theorie des α -Zerfalls wird für den Fall nicht-verschwindender Azimutalquantenzahlen $l \neq 0$ nach der Methode der komplexen Eigenwerte exakt durchgeführt. Die Wellengleichung für den Radialanteil im Außenraum wird auf eine Laplacesche Differentialgleichung zurückgeführt, deren Integrale zunächst in einer Integraldarstellung gegeben werden. Sie werden nach einer — im einzelnen diskutierten und durchgeführten — Sattelpunktmethode ausgewertet. Das Ergebnis ist eine Zerfallskonstante, die aus einem „Vorfaktor“ und einer Exponentialfunktion besteht, wobei die letztere im Exponenten l -abhängig ist, während der Vorfaktor davon frei ist.

H. Volz.

Eder, Gernot: Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie. Acta phys. Austr. 7, 91—95 (1953).

L'A. calcule par transformation de l'expression

$$H = \int \int \Psi^{*1}(x^1) \Psi^{*2}(x^2) f^2 \{ (\sigma^{(1)} \sigma^{(2)}) - \gamma_5^{(1)} \gamma_5^{(2)} \} \frac{e^{-\mu r}}{4 \pi r} \Psi^1(x^1) \Psi^2(x^2) dv^1 dv^2,$$

le potentiel effectif selon une formule de H. Gauss (ce Zbl. 46, 227), entre un noyau et un nucléon lié. La formule obtenue peut conduire à un accord qualitatif avec les résultats expérimentaux.

G. Petiau.

Post, H. R.: Many-particle systems. Derivation of a shell model. Proc. phys. Soc., Sect. A 66, 649—652 (1953).

Für das quantenmechanische N -Teilchenproblem wird eine exakte Lösung angegeben unter der Voraussetzung identischer Teilchen, die untereinander paarweise durch Oszillatorpotential gebunden sind. Für Fermionen ergibt sich eine „Schalenstruktur“, da die einzelnen Energieniveaus wegen der Gleichberechtigung der drei Raumrichtungen entartet sind. Daher passen (von einem mit der Teilchenzahl wachsendem Faktor abgesehen) in eine „Schale“ mehrere Teilchen gleicher Energie. Die Anzahlen der Teilchen, die in den Schalen Platz haben, und die Drehimpulse stimmen überein mit den Werten beim „independent particle model“ (ohne Spin-Bahn-Kopplung) bei Benutzung eines gemeinsamen Potentialtopfes mit Oszillatorpotential.

R. Hagedorn.

Feather, N.: A new parameter for use in discussions of the shell model of the nucleus. Philos. Mag., VII. Ser. 44, 103—105 (1953).

Davidson, J. P. and E. Feenberg: Deviations for LS coupling in the spheroidal core nuclear model. Phys. Review, II. Ser. 89, 856—864 (1953).

Die Lage der magnetischen Momente innerhalb der Schmidt-Kurven wird auf Abweichungen von der LS -Kopplung zurückgeführt. Der Grundzustand wird beschrieben durch eine Linearkombination zweier reiner LS -Komponenten, eines Zustandes mit $L = I - \frac{1}{2}$ und eines anderen mit $L' = I + \frac{1}{2}$, wobei jedoch L und L' die gleiche Parität besitzen. Zur Behandlung wird das Modell, in dem ein ungerades Nukleon sich im Felde eines nicht kugelförmigen Restkernes bewegt, benutzt. Unter der Annahme, daß eine starke Kopplung zwischen der Bewegung des Nukleons und der des Restkerns vorliegt, werden die magnetischen Momente berechnet und gute Übereinstimmung mit dem allgemeinen Verlauf der experimentell ermittelten Werte gefunden. Mit Hilfe von Projektionsoperatoren wird das statistische Gewicht der beiden LS -Kopplungsanteile aus der Bohrschen Wellenfunktion, die die starke Kopplung beschreibt, berechnet. Die numerischen Ergebnisse für die Energiezustände des Nukleons im Felde des deformierten Restkernes zeigen jedoch, daß eine Behandlung mit der Annahme einer schwachen Kopplung wahrscheinlich zu einer befriedigenderen Lösung führen würde. *B. Stech.*

Hill, David Lawrence and John Archibald Wheeler: Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena. Phys. Review, II. Ser. 89, 1102—1145 (1953).

Der Prozeß der Kernspaltung zeigt, daß die Kernteilchen Kollektivbewegungen ausführen können. Das Einteilchenmodell der Kerne kann diese nicht beschreiben. Aus diesem Grund wird der Versuch unternommen, die Gesichtspunkte des Einteilchenmodells mit denen des Tröpfchenmodells in einer neuen Modellvorstellung, dem Kollektivmodell, zu vereinen. Für eine einfache Beschreibung wird angenommen, daß das Potential, das auf ein Kernteilchen im Innern wirkt, nahezu unabhängig von den Orten der übrigen Teilchen ist (extreme Sättigung) und am Kernrand scharf abfällt. Die Grenze des Potentials ist aber abhängig von den Bewegungen der übrigen Teilchen und wird daher oszillieren. Ein Kernzustand kann also beschrieben werden durch die Angabe der besetzten Energieniveaus der einzelnen Nukleonen und der Schwingungs- und Rotationszustände des ganzen Kerns. Es besteht eine enge Analogie zur Molekülphysik: Die Kernteilchen entsprechen den Elektronen, die Oszillationen der Kernoberfläche den Schwingungen der Atomkerne im Molekül. Zu vorgegebenen Quantenzuständen der einzelnen Nukleonen gehören charakteristische Funktionen, die den Verlauf der potentiellen Energie als Funktion der Deformation der Kernoberfläche beschreiben. Wie im Falle der Moleküle ist auch hier das Frank-Condon-Prinzip von Bedeutung. Die aus dem Modellsich ergebenden Folgerungen werden im einzelnen diskutiert und besonders der Austausch der Energie zwischen Kernoszillation und Anregung der individuellen Partikel und die Kernspaltungsprozesse ausführlich behandelt. *B. Stech.*

Budini, P.: On the energy lost by a relativistic ionizing particle in a material medium and on the Cerenkov radiation. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 236—258 und ital. Zusammenfassg. 258—259 (1953).

Verf. untersucht getrennt die Energie, die in der Nähe des ionisierenden Strahles stecken bleibt (Ionisation und Anregung von Atomen), und diejenige, die durch Cerenkov-Strahlung in größere Entfernung gelangt. Es ist das Ziel dieser Arbeit, die empirisch festgestellte Zunahme des Energieverlusts jenseits des Minimums zu verstehen. Die Anregung der Atome und die Cerenkov-Strahlung werden nach dem Fermischen Vorgehen [Phys. Review, II. Ser. 56, 1242 (1939) und 57, 485 (1940)] berechnet. Dabei wird die Erfahrung richtig wiedergegeben, wenn man die Strahlungsdämpfung berücksichtigt. Man versteht auf Grund der Rechnung, daß, wenn die Materiedichte gegen Null geht, die Fermische Theorie in eine solche übergeht, die die Cerenkov-Strahlung vernachlässigt (A. Bohr). Der Energieverlust durch Ionisation wird berechnet, als käme er aus Überlagerung breiter Absorptionslinien zustande. Aus der Rechnung ergibt sich, daß in dichten Materialien ein gleichzeitiger Anstieg von Ionisation und Cerenkov-Strahlung eintreten sollte; in verdünnten Gasen dagegen sollten Ionisation und Anregung nebeneinander ansteigen. *K.-H. Höcker.*

Klein, Abraham: Convergence of the adiabatic nuclear potential. Phys. Review, II. Ser. 91, 740—748 (1953).

Ohne Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen untersucht Verf. die Potentiale 4., 8. und 12. Ordnung der symmetrischen pseudoskalaren Mesonentheorie in pseudoskalarer Kopplung. Es zeige sich, daß schon in unrelativistischer Näherung trotz der sinkenden Reichweite der Potentiale höherer Ordnung deren Koeffizienten anwachsen. Daraus folge der Zusammenbruch von Entwicklungen in μ/M für eine gegebene Ordnung. In einem Zusatz bei der Korrektur schränkt Verf. allerdings die Behauptung der Nichtkonvergenz darauf ein, daß die Entwicklungen nur in ganz bestimmten Gebieten konvergieren. Für die üblichen Werte der Kopplungskonstanten gäbe es jedoch immer Gebiete kleiner oder verschwindender Konvergenz. Verf., der die einzelnen Rechnungen nicht explizit vorführt, kündigt eine detaillierte weitere Arbeit zum Problem an.

F. Cap.

Jean, Maurice et Jean Ratier: Sur le potentiel des trois corps. C. r. Acad. Sci., Paris 237, 305—307 (1953).

Les AA. exposent des résultats obtenus dans l'étude du potentiel des trois corps calculé à partir de la matrice S au moyen du formalisme de Feynman-Dyson dans le cadre de la théorie symétrique de charge du méson pseudoscalaire. Les AA. calculent et discutent les expressions des termes $V_3^{(n)}$ à l'approximation statique classés suivant les puissances n de la constante de couplage et notamment les termes $V_3^{(4)}$ et $V_3^{(6)}$. Bien que la discussion de l'importance relative des différents termes du développement soit difficile, les AA. pensent que ces expressions peuvent être intéressantes pour comparer les contributions relatives des forces doubles et triples et pour servir de guide à une étude semi-phénoménologique du problème du triton. G. Petiau.

Elliott, J. P.: Theoretical studies in nuclear structure. V. The matrix elements of non-central forces with an application to the $2p$ -shell. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 218, 345—370 (1953).

Teil I—IV s. H. A. Jahn, dies. Zbl. 39, 236, 42, 221; W. J. Swiatecki, dies. Zbl. 42, 221; H. A. Jahn u. H. van Wieringen, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 502—524 (1951). — Verf. leitet Matrixelemente her für die Wechselwirkung von N Nukleonen unter der Annahme nicht-zentraler Kräfte. Letztere werden möglichst allgemein angesetzt. Sie umschließen Tensorkräfte und Spin-Bahn-Kräfte, wie sie bei der Diskussion des Schalenmodells benutzt werden. Für einzelne Kerne der $2p$ -Schale werden mechanische und magnetische Momente berechnet. K.-H. Höcker.

Jastrow, Robert: Note on the low-energy properties of the nucleon-nucleon interaction. Phys. Review, II. Ser. 91, 749—750 (1953).

Der Verf. setzt seine Arbeiten über das symmetrische pseudoskalare Mesonenpotential mit pseudoskalarer Kopplung: $V^{(2)} = \mu (\mu/2m)^2 (g^2/4\pi) (\tau_1 \tau_2/3) \cdot \{(\sigma_1 \sigma_2) + S_{12} (1 + 3/\mu r + 3/(\mu r)^2)\} e^{-\mu r}/\mu r$, $V^{(4)} = -\mu (\mu/2m)^2 (g^2/4\pi)^2 (6/\pi) \cdot K_1 (2\mu r)/(\mu r)^2$, und unendlich starker Abstoßung (infinitely hard core) $V = \infty$ ($r < r_0$), $V = V^{(2)} + \alpha V^{(4)}$ ($r > r_0$) fort. In der vorliegenden Arbeit wird ein willkürlicher Parameter eingeführt und untersucht, welche Werte von α (und vom Abscheideradius r_0 für Singulett und Triplett, sowie von g mit festem μ) am besten mit den bekannten Daten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung niedriger Energie übereinstimmen. Es zeigt sich, daß diese Daten gegenüber einer Variation von α sehr unempfindlich sind; Ref. hat den Eindruck, daß der Wert $\alpha = 1$, entsprechend dem Ergebnis der üblichen Störungstheorie, am günstigsten ist:

	Theorie	Experiment		Theorie	Experiment
Bindungsenergie	2,23	2,227 ± 0,003	Quadrupolmoment	2,21	2,738 ± 0,016
Singulett-Streulänge	−23,7	−23,68 ± 0,06	% D Zustand	5,1	etwa 4 (bzw. 2—8)
Effektive Reichweite			Abscheideradius		
	1,64	1,70 ± 0,03	Singulett	0,48	—
	2,53	2,60 ± 0,07	Triplett	0,53	—

F. Cap.

Iwadare, Junji: Charge independence of nuclear interaction and high energy nucleon-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* **9**, 93—94 (1953).

Salpeter, E. E.: Repulsive core and charge independence. *Phys. Review*, **II. Ser.** **91**, 994—996 (1953).

Gell-Mann, Murray and Valentine L. Telegdi: Consequences of charge independence for nuclear reactions involving photons. *Phys. Review*, **II. Ser.** **91**, 169—174 (1953).

Bei leichten Kernen ergeben sich infolge der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte einige Folgerungen für Kernphotoprozesse. Mit Hilfe der Isotopenspinoperatoren läßt sich der Hamiltonoperator in zwei Anteile zerlegen, von denen der erste die Auswahlregel $1T = 0$, der zweite die Auswahlregel $1T = \pm 1, 0$ für $T_z = 0$ bzw. $1T = \pm 1$ für $T_z = 0$ ergibt. Für elektrische Dipolstrahlung liefert der erste Anteil (bei Wellenlängen groß gegen Kerndimensionen) keinen Beitrag, so daß z. B. elektrische Dipolemission ohne Änderung des Isotopenspins für Kerne mit $T_z = 0$ verboten ist, wie an zwei Beispielen (N^{14} und O^{16}) erläutert und mit dem Experiment verglichen wird. Ebenso ergibt sich aus diesen Auswahlregeln, daß eine elektrische Dipolabsorption für Kerne mit $T_z = 0$ erst bei Energien einsetzen kann, die zu einem Niveau mit $T = 1$ und $J = 1^-$ führen. Handelt es sich dabei um (γ, n) - oder (γ, d) -Reaktionen, so muß sogar so viel Energie zur Verfügung stehen, daß der Restkern in einem $T = 1$ Zustand zurückbleiben kann. Die Prozesse werden am Beispiel von C^{12} und O^{16} mit Hilfe der experimentellen Daten eingehend diskutiert. Weiterhin werden Summenregeln für magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung angegeben.

B. Stech.

Hittmair, Otto: Die Geometrie der Winkelverteilung von Kernreaktionen. *Acta phys. Austr.* **7**, 102—109 (1953).

Es wird darauf hingewiesen, daß bei Kernreaktionen vom physikalischen Problem eine rein gruppentheoretische Seite („Geometrie“) abgetrennt werden kann, die selbstverständlich von echt physikalischen Einzelzügen, wie Annahme über Kernmodelle, Kernkräfte unabhängig ist. Die Darlegung der Lösung des gruppentheoretischen Problems mit Hilfe von Racah-Koeffizienten geht parallel und bietet eine wechselseitige Ergänzung zu der gleiche Ziele verfolgenden Arbeit von Coester und Jauch (dies. Zbl. **50**, 231).

F. L. Bauer.

Hittmair, O.: Zur Kernspinbestimmung durch inelastische Streuung. *Acta phys. Austr.* **6**, 241—245 (1953).

Die Winkelkorrelation beim Prozeß $X_1(a_1 a_2) X_2$ wird besonders einfach, wenn X_1 den Spin Null hat und in den Spin Null zurückkehrt (dies ist gerade der Fall für inelastische Streuung an doppelt-geraden Kernen, die aus dem Grundzustand in denselben oder in einen anderen Zustand vom Spin Null zurückkehren, wie bei $O^{16}(p p') O^{16*}$ oder auch in allgemeinen Fällen, wie $Be^{10}(p, n) Be^{10*}$). Die Winkelverteilungsformel wird $W(\theta) \sim \sum_{\nu} \frac{2L}{\nu+1} (c_{\nu}(L))^2 P_{\nu}(\cos \theta)$, wenn der Zwischenkern den Spin L hat; Racah-Koeffizienten und Streumatrix-Einfluß fallen (als konstanter Faktor) praktisch fort. Falls als Zwischenkern nur ein Niveau angeregt ist, kann der Vergleich mit dem Experiment zur einwandfreien Bestimmung des Spins des Zwischenkerns (in den obigen Beispielen von F^{17} -Niveaus bzw. B^{11} -Niveaus) dienen. Für den Fall, daß a_1 und a_2 beide Spin $\frac{1}{2}$ haben, hat Verf. die Koeffizienten $c_{\nu}(L)$ ausgewertet, darauf hinweisend, daß auch für andere a_1, a_2 -Kombinationen (deren Spin-Differenz ganzzahlig ist) das Verfahren gilt.

F. L. Bauer.

Gardner, J. W.: Energy selection of charged particles by a magnetic field. *Canadian J. Phys.* **31**, 459—468 (1953).

Clementel, E.: Sulla penetrazione degli elettroni. *Nuovo Cimento*, **Ser. IX** **10**, 683—685 (1953).

Espagnat, Bernard d': La diffusion π -nucléon et la réaction: nucléon (π , 2π) nucléon. *C. r. Acad. Sci., Paris* **237**, 26—28 (1953).

Der Verf. ermittelt auf Grund eines von Dyson vorgeschlagenen Approximationsverfahrens, bei welchem nicht alle, sondern nur gewisse Zwischenzustände berücksichtigt werden, das Matrixelement für zwei Probleme: Die Streuung des

π -Mesons am Nucleon und die Reaktion $\pi^+ + P \rightarrow N + \pi^+ + \pi^+$ in der Umgebung der Schwelle.

P. Urban.

Gerjuoy, E.: Theory of (d, p) and (d, n) reactions. Phys. Review, II. Ser. **91**, 645—649 (1953).

Die Theorie wird hier mittels Greenscher Funktionen aufgebaut, durch die die ursprünglich von Butler herrührende Rechnung wesentlich vereinfacht wird. Die Teilchen werden spinlos angenommen. Von der abgeleiteten Integralgleichung kommt man direkt auf das Matricelement der Bornschen Näherung, die von anderen Autoren zur Behandlung des Problems benutzt worden ist. Damit ist die Brücke zwischen zwei verschiedenen Verfahren geschlagen, die zum gleichen Ergebnis führen, aber bisher ohne Beziehung nebeneinander standen.

K.-H. Höcker.

Kothari, L. S.: The production of heavy mesons. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1087—1089 (1953).

Unter Verwendung der Fermischen Theorie der Mesonenerzeugung bei Nukleon-Nukleon-Zusammenstößen ($E < 20 \text{ Mc}^2$) [Fermi, Progress theor. Phys. **5**, 570 (1950) und Kothari, Nature **171**, 309 (1953)] leitet Verf. die Wahrscheinlichkeit für die Bildung solcher schwerer ($m > m_\pi$) Mesonen ab, die eine starke Wechselwirkung mit dem Nukleon besitzen. Es ergibt sich, daß die Erzeugung einzelner schwerer Mesonen etwa 10 mal so häufig ist, als die Bildung eines Paares. Die Betrachtung von Meson-Nukleon-Stößen lehrt, daß die Erzeugung neuer Mesonen hierbei für $E < 10 \text{ Mc}^2$ sehr unwahrscheinlich, für $E > 20 \text{ Mc}^2$ aber sehr wahrscheinlich ist. Diese Ergebnisse hängen jedoch auch von der Massenzahl der gestoßenen Kerne ab, da z. B. schwere Mesonen für schwere Kerne nur eine geringe Austrittswahrscheinlichkeit besitzen.

F. Cap.

Simon, A. and T. A. Welton: Production of polarized particles in nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. **90**, 1036—1043 (1953).

Für beliebige Kernreaktionen der Form $a + X = Y + b$ wird mittels des S-Matrix- und Racah-Formalismus ein allgemeiner Ausdruck für die sich ergebende Polarisierung der Endprodukte bei unpolarisiertem Ausgangszustand angegeben. Hierbei wurden alle Summationen über die magnetischen Quantenzahlen ausgeführt. Die Polarisierung steht stets senkrecht auf Einfall- und Streurichtung und rührt von der Interferenz verschiedener Partialwellen oder verschiedenen Spinzuständen der Endprodukte her. Als Beispiele werden die $\text{Li}^6(n, \alpha)\text{H}^3$ -Reaktion und die Neutronenstreuung an He^4 behandelt. Zur Beschreibung des Polarisationszustandes von Teilchen mit höherem Spin werden höhere Spinmomententensoren eingeführt und die obigen Resultate verallgemeinert.

B. Stech.

Masket, A. Victor: Elementary theory of neutron sources in reactors. Amer. J. Phys. **21**, 151—159 (1953).

Das Problem des Neutronenreaktors, in dessen Innerem sich eine starke Neutronenquelle befindet, wird „für didaktische Zwecke“ dargestellt. Dabei wird mit energetisch homogenen Neutronen Diffusionstheorie getrieben. Die Arbeit soll eine Grundlage zum Verständnis schwierigerer Untersuchungen auf diesem Gebiet liefern.

H. Volz.

Woodcock, E. R.: A method of calculating critical size in multi-group neutron transport theory for some simple systems. Proc. phys. Soc., Sect. A **66**, 705—709 (1953).

Es werden einige Formeln entwickelt, nach denen es im Prinzip möglich ist, die kritische Größe von Neutronenreaktoren zu bestimmen, wenn verschiedene Energiegruppen von Neutronen im Reaktor vorhanden sind.

H. Volz.

Tauber, G. E. and Ta-You Wu: The J values of states in configurations. Nuovo Cimento, Ser. IX **10**, 677—680 (1953).

Rose, M. E. and C. L. Perry: The effect of the finite de Broglie wavelength in the theory of beta-decay. Phys. Review, II. Ser. **90**, 479—482 (1953).

● Heisenberg, Werner, herausgegeben von: Kosmische Strahlung. — Vorträge, gehalten im Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1953. VIII, 620 S., 256 Abb., 1 Tafel. DM.78,—.

Auf eine kurze Übersicht von W. Heisenberg über den heutigen Stand der Kenntnisse von der kosmischen Strahlung folgt zunächst Kap. I über die Herkunft der kosmischen Strahlung. (Red. Biermann). Kap. II—IV bringen — ebenfalls jeweils von mehreren Vortragenden bearbeitet — Berichte über die drei Komponenten der kosmischen Strahlung: Nukleonen und π -Mesonen (Red. Heisenberg und Wirtz), μ -Mesonen (Red. Wirtz) sowie Elektronen-Lichtquantenkomponente (Red. Budini und Molière). Kap. V endlich behandelt das Zusammenspiel der Komponenten (Red. Budini-Molière). Das Schwergewicht der Darstellung liegt größtenteils auf dem Kontakt von Messung und Theorie; bezüglich Details wird in beider Hinsicht vielfach auf die Literatur (Verzeichnis S. 587—611) verwiesen. Den Mathematiker dürften vor allem die reizvollen Probleme der Kaskaden bzw. Schauer anziehen: Ein primäres Teilchen erzeugt die und die Sekundärteilchen, diese erzeugen weitere usw. Frage: Was erhält man nach einer bestimmten Schichtdicke? In der Theorie dieser Phänomene spielen Mellin-Transformationen eine wesentliche Rolle. Eine Reihe allgemein wichtiger, vorwiegend theoretischer Probleme sind in einen längeren Anhang (S. 456—581) verwiesen: F. Sauter (S. 456—481) behandelt die Theorie der Streuung und Bremsung geladener Teilchen; W. Paul diskutiert entsprechende Messungen energiereicher Elektronen. Dann folgen Abschnitte über die Methodik der kernphotographischen Emulsionen (U. Gottstein, S. 494—515) und Ergänzungen zur Theorie der Elektronen-Photonenkaskade sowie der großen Luftschauer (Ott und Molière, S. 515—534). C. F. v. Weizsäcker und R. Öhme behandeln (S. 535—558) in besonders übersichtlicher Weise den derzeitigen Stand der klassischen und der quantisierten Feldtheorie der Mesonen. Den Schluß bilden noch eine Reihe nützlicher (sonst explizit schwer zu findender) Formeln zur relativistischen Kinematik (Stöße!) und zur Groß-Transformation, sowie diverse Zahlenwerte und Funktionen.

A. Unsöld.

Bau der Materie:

Roger, Frédéric: Sur une image corpusculaire et un prolongement matriciel de la méthode ondulatoire des orbitales moléculaires. C. r. Acad. Sci., Paris 236, 2207—2209 (1953).

The Lagrangian equations of small vibrations are compared with the wave-mechanical equations used in the method of molecular orbitals. Expressing the classical equations in matrix form, this allows a generalisation of the molecular orbital technique: for constituent groups of a molecule can now be taken as basic contributors to the energy matrix, instead of individual atoms carrying π -electrons.

J. Jacobs.

Rahman, A.: Polarizability of the hydrogen molecular-ion. Physica 19, 145—165 (1953).

Ausgehend von der exakten Lösung der Schrödinger-Gleichung für H_2^+ wird die elektrische Polarisierbarkeit von H_2^+ nach einem Verfahren berechnet, das eine Verallgemeinerung der Methode der Variation des Parameters nach Lennard-Jones [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 129, 598—615 (1930)] darstellt. Die ersten beiden Ableitungen der Polarisierbarkeit nach dem Kernabstand werden angegeben. Für die Berechnung der Übergangsmomente ist ein anharmonisches Potential vom Morse-Typus zugrunde gelegt.

E. Kreyszig.

Long, D. A.: Intensities in Raman spectra. I. A bond polarizability theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 217, 203—221 (1953).

Ein Überblick über die Theorien der Smekal-Raman-Intensitäten zeigt, daß es keine Theorie gibt, die eine Vorhersage der Intensitäten gestattet. Nach einem der Matrizenmethode für Schwingungsprobleme ähnlichen Verfahren werden die abgeleiteten Invarianten der molekularen Polarisierbarkeit in Termen der Polarisierbarkeitsfunktion berechnet. Die dabei gemachten vereinfachenden Annahmen sind dieselben wie bei Wolkenstein [C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR 32, 185 (1941)].

E. Kreyszig.

Meshkov, Sydney: Theory of complex spectra. Phys. Review, II. Ser. **91**, 871—876 (1953).

Eine für ein System nichtäquivalenter Elektronen und für äquivalente Elektronen anwendbare Methode zur Berechnung der Energieniveaus eines Atoms in Termen der experimentell beobachtbaren Energiezustände der höheren Ionen wird entwickelt. Anwendungen auf Konfigurationen von Ti II und Ti III sind angegeben. Die Arbeit schließt teilweise an Gedankengänge von Racah [Phys. Review, II. Ser. **63**, 367 (1943)] an und benutzt dessen Tensoroperatorenmethode. *E. Kreyszig.*

Sachs, Mendel: Nuclear hyper fine structure of Mn^{++} . Phys. Review, II. Ser. **90**, 1058—1060 (1953).

Infolge der Vermutung von Abragam und Pryce (dies. Zbl. **42**, 234), daß die beobachtete Kernhyperfeinstruktur von Mn^{++} von einer Beimischung eines Zustandes, bei dem sich ein 3s-Elektron im 4s-Zustand befindet, zum Grundzustand herührt, wird die Wellenfunktion des Grundzustandes in der Form

$$\psi = (1 - \alpha^2)^{1/2} \psi(3s^2 3d^5) + \alpha \psi(3s 3d^5 4s)$$

angesetzt und die Kernhyperfeinaufspaltung von Mn^{++} berechnet. Mit dem erhaltenen Wert $\alpha^2 = 4,409 \cdot 10^{-4}$ wird $\psi = 0,999 \psi(3s 3d^5) + 0,021 \psi(3s 3d^5 4s)$. Dieses Ergebnis wird diskutiert. *E. Kreyszig.*

Russell, Henry N.: Spectra in the laboratory and the stars. Proc. math. phys. Soc. Egypt **4**, Nr. 4, 53—72 (1953).

Bericht.

Seaton, M. J.: Electron excitation of forbidden lines occurring in gaseous nebulae. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **218**, 400—416 (1953).

Berechnung der Wirkungsquerschnitte für Anregung der Nebulium-Linien durch Elektronenstoß (N_{II} , O_{II} , O_{III} , Ne_{III} , S_{II}). Die Wellenfunktionen der freien Elektronen werden nach den Drehimpulsen entwickelt, den wesentlichen Anteil zum Wirkungsquerschnitt liefern nur die p -Wellen. Ausgangspunkt ist die „exact-resonance-Näherung“ (Vernachlässigung der Energiedifferenzen in der Wellengleichung des Systems). Strenge Lösungen dieser Näherung werden mit Lösungen, die unter der Voraussetzung schwacher Kopplung erhalten wurden, verglichen. Die Verbesserungen an den Resultaten werden mit Störungsmethoden abgeschätzt. Die Endwerte des Wirkungsquerschnitts für obige Ionen in $n p^q$ Konfigurationen ($q = 2, 3, 4$) und für die Übergänge $n, n' = 1, 2$ und $1, 3$ dürften auf etwa 40% genau sein. Für andere für die Astrophysik wichtige Ionen werden durch Extrapolation Abschätzungen erhalten. *G. Burkhardt.*

Roger, Frédéric: Sur l'application de la méthode de couplage des constituants à la détermination de la première bande d'absorption des substitués alcoylés de l'éthylène. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 483—485 (1953).

Colombo, Serge: Sur la possibilité de définir la largeur de bande passante à partir de la distorsion subie par un transitoire. C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 455—457 (1953).

Reilly, Edith F.: Electrostatic energy matrices of the configuration f^4 . Phys. Review, II. Ser. **91**, 876—878 (1953).

Nach der Methode von Racah (dies. Zbl. **41**, 575) werden die Matrizen der elektrostatischen Energie der f^4 -Konfiguration berechnet; das Resultat ist in Tabellenform angegeben. Kontrolliert wurde mittels der Slaterschen Diagonalsummenregel und einer Methode von Innes (siehe folgend. Referat). *E. Kreyszig.*

Innes, Frederick R.: Matrix elements of spin-spin interaction. Phys. Review, II. Ser. **91**, 31—34 (1953).

Der von W. Heisenberg [Z. Phys. **39**, 499—518 (1926)] eingeführte Spin-Wechselwirkungsoperator wird so entwickelt, daß die Matrixelemente nach der Methode von G. Racah [Phys. Review, II. Ser. **61**, 186—197 (1942), **62**, 438—462

(1942) und 63, 367–382 (1943)] ermittelt werden können. Für Konfigurationen, die zwei nichtäquivalente Elektronen enthalten, und für solche mit n äquivalenten Elektronen werden Formeln angegeben. *E. Kreyszig.*

Ramsey, Norman F.: Electron coupled interactions between nuclear spins in molecules. Phys. Review, II. Ser. 91, 303–307 (1953).

Zur direkten magnetischen Wechselwirkung zwischen zwei Kernspins in einem Molekül kann eine magnetische Wechselwirkung zwischen jedem der Kerne und den Elektronen des Moleküls hinzutreten. Diese indirekten Wechselwirkungen sind im allgemeinen klein, verdienen jedoch insbesondere dann Beachtung, wenn häufige Zusammenstöße erfolgen, weil dann die direkte Wechselwirkung nicht in Erscheinung tritt. — Berechnet wird unter Benutzung der James-Coolidge-Wellenfunktionen und unter Berücksichtigung der verschiedenen Teileinflüsse die indirekte Wechselwirkung für den kugelsymmetrischen und den allgemeinen Fall. Numerische Rechnungen für HD zeigen Übereinstimmung mit neuen Beobachtungen *E. Kreyszig.*

Moses, Harry E.: Exchange scattering in a three-body problem. Phys. Review, II. Ser. 91, 185–192 (1953).

Es wird das Problem der Streuung eines Elektrons an einem Wasserstoffatom betrachtet, dessen Kern unendlich schwer angenommen wird. Um Konvergenzschwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, ersetzt der Verf. die Coulombwechselwirkung durch eine kurzreichweitige. Mott und Massey behandeln dieses Problem in ihrem Buch „The Theory of Atomic Collisions“ (2. ed., Oxford 1949, dies. Zbl. 39, 224) mittels der Bornschen Methode. Sie erhalten eine Gleichung für die Eigenfunktionen der totalen Hamiltonfunktion durch Entwicklung dieser nach Eigenfunktionen des Wasserstoffproblems und schreiben passende Bedingungen für die Koeffizienten dieser Entwicklung vor. In ihrer Behandlung der Austauschstreuung benutzen sie dieselbe Eigenfunktion, entwickeln neuerdings nach den Koordinaten des gestreuten Elektrons nach den gleichen Eigenfunktionen. Für diese zweite Entwicklung werden passende Bedingungen vorgeschrieben. Die vorliegende Arbeit diskutiert die Annahmen von Mott und Massey hinsichtlich ihrer Gültigkeit ausführlich. Es ergibt sich hierbei, daß der Koeffizient der Austauschstreuung sich wie eine radial nach außen laufende Welle verhält. Hierdurch werden die Annahmen von Mott und Massey verifiziert. Es wäre darauf hinzuweisen, daß K. Wildermuth in seiner Arbeit (dies. Zbl. 50, 232), an Hand eines einfachen Beispiels (eindimensional) das Problem untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß man durch dieses Verfahren in seiner ursprünglichen Formulierung die Unterscheidbarkeit gleicher Teilchen auch nicht näherungsweise berücksichtigen kann. Der Verf. behandelt den Fall bei unterscheidbaren Teilchen, entsprechend dem Bornschen Verfahren. *P. Urban.*

Dalgarno, A.: Three-body scattering problems. Phys. Review, II. Ser. 91, 198 (1953).

Der Verf. untersucht einen Ausdruck für die Amplitude der Austauschstreuung, welcher von Borowitz und Friedman (dies. Zbl. 50, 229) nach der Bornschen Näherung ermittelt wurde und der von jenem abweicht, der von Mott und Massey (Theory of Atomic Collisions, 2. ed., Oxford 1949, dies. Zbl. 39, 224) angegeben wird. Er diskutiert die Divergenz des Ausdrucks und zeigt, daß Übereinstimmung zu erzielen ist, wenn man nach dem Vorgang von Mott und Massey für direkte Streuung rechnet und eine rein symmetrische Wellenfunktion verwendet. *P. Urban.*

Frönsdal, Christian and Aadne Ore: Three-particle Coulomb problems. Physica 19, 605–610 (1953).

The various non-relativistic investigations of dynamic stability of singly charged 3-particle Coulomb systems are examined. A new choice of units is proposed, involving only relative particle coordinates and reduced masses of particle pairs. Regardless of the particular total system, dynamic stability demands that the ground state energy $E < -1$. General results can be deduced for energy and separations for all systems, with 2 equal masses, in which the wave-function depends on the mutual distances of attractive particle pairs only. *J. Jacobs.*

Nicholls, R. W., W. R. Jarman and P. A. Fraser: The calculation of vibrational transition probabilities of diatomic molecules. Canadian J. Phys. 31, 1019–1022 (1953).

Lamarche, G. and G. M. Volkoff: A theoretical investigation of the nuclear resonance absorption spectrum of Al^{27} in spodumene. *Canadian J. Phys.* **31**, 1010—1014 (1953).

Westfold, K. C.: Collisional effects and the conduction current in an ionized gas. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **44**, 712—724 (1953).

Betrachtet wird ein Gas aus Ionen und Elektronen in einem elektromagnetischen und einem Gravitations-Feld. Dafür wird die Boltzmannsche Fundamentalgleichung angesetzt, deren Lösung in 1. Näherung nach der Methode von Enskog-Chapman gefunden wird. Die Auswertung der Stoßintegrale in dieser Näherung liefert das Reibungsglied der Plasmagleichungen proportional zur Stromdichte mit dem Stoßdämpfungsfaktor gleich $4/3$ der Elektronenstoßfrequenz. Zur Definition der Stöße bedarf es einer Vorschrift, bis zu welcher Ablenkung ein Vorübergang noch als Stoß gezählt wird. Aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie folgen die üblichen magnetohydrodynamischen Gleichungen ohne Viskosität und Wärmeleitung. Die Überlegungen können auf ein nur schwach ionisiertes Gas übertragen werden.

G. Burkhardt.

Lüst, R.: Magneto-hydrodynamische Stoßwellen in einem Plasma unendlicher Leitfähigkeit. *Z. Naturforsch.* **8a**, 277—284 (1953).

Aus der Eulerschen Bewegungsgleichung für ein Plasma in der von Schlüter (dies. Zbl. **36**, 281) gegebenen Form mit äußerem Magnetfeld, der Kontinuitätsgleichung und der Energiegleichung, werden wie bei einem neutralen Gas die Erhaltungssätze für stationäre Stoßwellen abgeleitet. Diese können analog den entsprechenden Sätzen im neutralen Medium geschrieben werden, wenn man den Druck durch Hinzufügen des magnetischen Spannungstensors zu einem Drucktensor ergänzt und der inneren Energie die magnetische Feldenergie hinzufügt. Die Hugoniot-Gleichung erhält ein Zusatzglied 2. Ordnung, das nur die zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle senkrechte Feldkomponente enthält. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird für verschiedene Richtungen des Magnetfeldes berechnet. (Ob allerdings die durch die Beschleunigung der positiven und negativen Teilchen bedingte Ladungstrennung bei Stoßwellen vernachlässigt werden kann, erscheint dem Ref. fraglich.)

G. Burkhardt.

Weizel, W.: Berechnung des Ablaufs von Funken mit Widerstand und Selbstinduktion im Stromkreis. *Z. Phys.* **135**, 639—657 (1953).

Unter der Annahme, daß ein Funke keine nennenswerte Energie durch Ausstrahlung abgibt und die Leitfähigkeit im Funkenkanal der Dichte der inneren Energie proportional ist, werden drei Gleichungen aufgestellt, welche den Funkenablauf regeln, wenn er in einem Stromkreis aus einer Kapazität, einer Selbstinduktion und einem Ohmschen Widerstand vor sich geht. Letzten Endes läßt sich die Lösung zurückführen auf die einer Differentialgleichung erster Ordnung $2y + By^2 + 2^{-1}R^2(ydy/dx)^2 + 2x^2 - 2 = 0$, die elementar nicht mehr zu lösen ist und maschinell geleistet werden muß. x ist proportional der Spannung und y proportional der Gesamtenergie des Plasmas, K und B sind zwei nur noch von der Selbstinduktion und von dem Widerstand der Leitung abhängende Konstante; die D.Gl. gibt also die Abhängigkeit der Plasmaenergie von der Spannung. Den Strom in Abhängigkeit von der Spannung und den zeitlichen Ablauf kann man hieraus leicht finden. Die Integration wird durchgeführt für die Kombinationen $K = 0; 1/2; 2/2; 5/2; 10/2$ und $B = 0; 0,2; 1$ und 4 , und die Ergebnisse werden dann ausführlich diskutiert. Zum Schluß werden noch ein Vergleich mit experimentellen Daten und die Möglichkeit der Bestimmung von K und B aus den Meßdaten besprochen. *R. Seeliger.*

Geltman, Sydney: The mobility of helium molecular ions in helium. *Phys. Review*, II. Ser. **90**, 808—816 (1953).

Die Diskrepanz zwischen der von Tyndall und Powell gemessenen Beweglichkeit der Heliumionen und den theoretischen Ergebnissen von Massey und Mohr für He^+ -Ionen hat zu der Annahme geführt, daß es sich bei den beobachteten Ionen zu einem wesentlichen Teil um Helium-Molekülionen handelt. Verf. führt eine Bestimmung der Beweglichkeit von He_2^+ an Hand der Theorie von Chapman und Enskog durch. Die hierzu benötigte Wechselwirkungsenergie $\text{He}_2^+ - \text{He}$ wird mit Hilfe der bekannten quantenmechanischen Störungsrechnung unter der Voraussetzung der Quasistationarität bis zur zweiten Näherung bestimmt. Die Abweichung des Wechselwirkungspotentials von der in der Chapman-Enskog'schen Theorie zugrunde gelegten sphärischen Symmetrie kann durch eine geeignete Mittelung über alle Orientierungen eliminiert werden. Das Ergebnis der Rechnung zeigt eine Diskrepanz zu dem experimentell ermittelten Verlauf der Beweglichkeit in Abhängigkeit von der Temperatur, die außerhalb der Ungenauigkeit von Experiment und Rechnung zu liegen scheint. Der Potentialverlauf, wie er sich mit Hilfe der Langevinschen Theorie aus den experimentellen Daten entnehmen läßt, stimmt in größeren Abständen gut mit der vorliegenden Rechnung überein, dagegen ergibt sich eine größere Reichweite der

Abstoßungskräfte. Die Abweichung des Potentialverlaufes wird der genannten Mittelung, sowie der Verwendung angenäherter Wellenfunktionen zugeschrieben. *G. Ecker.*

Wannier, Gregory H.: The threshold law for single ionization of atoms or ions by electrons. Phys. Review, II. Ser. 90, 817—825 (1953).

Die Ionisierung der Atome durch Elektronenstoß ist ein für fast alle Gasentladungen fundamentaler Prozeß. Da der Vorgang endotherm verläuft, setzt die genannte Reaktion erst oberhalb einer bestimmten Grenzenenergie ein. Die Energieabhängigkeit der Ionisierungsrate in der Umgebung des genannten Schwellenwertes ist Gegenstand zahlreicher experimenteller Untersuchungen gewesen, die gezeigt haben, daß die Annahme einer linearen Abhängigkeit nicht zu Widersprüchen führt. Der Versuch einer theoretischen Beschreibung wurde von Bates und Mitarb. unter sehr vereinfachenden Annahmen durchgeführt und lieferte ebenfalls die lineare Abhängigkeit. Verf. basiert seine vorliegende theoretische Beschreibung auf den Gedanken Wigners, der gezeigt hat, daß sich beim Zweikörperproblem „Schwellengesetze“ ohne Erfassung des eigentlichen Stoßvorganges berechnen lassen. Die zusätzliche Komplikation des Dreikörperproblems beim Ionisationsvorgang reduziert Verf. unter Verwendung der Ergodenhypothese. Die hierdurch bedingte Unsicherheit wird abgeschätzt. Das Ergebnis der Untersuchung verlangt für die Ionisation neutraler Atome eine Abhängigkeit der Ionisierungsrate von der 1,127ten Potenz des Energieüberschusses. Für Ionen ergeben sich Potenzwerte zwischen 1,127 und 1. *G. Ecker.*

Kasuya, Tadao: Damped oscillation in the surface film of liquid helium II. Progress theor. Phys. 9, 89—90 (1953).

Head, A. K.: The growth of fatigue cracks. Philos. Mag., VII. Ser. 44, 925—938 (1953).

Zocher, H. and C. Török: About space-time asymmetry in the realm of classical general and crystal physics. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 681—686 (1953).

Korhonen, Unto: Die Bestimmung der Amplitude der Wärmebewegung der Ionen in Kristallen an Hand der gemessenen Strukturfaktoren. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 152, 11 S. (1953).

Bordoni, P. G.: Dipendenza delle autofrequenze di un solido dalla temperatura e dal volume, secondo la meccanica statistica. Nuovo Cimento, Ser. IX 10, 268—280 und engl. Zusammenfass. 280 (1953).

Emersleben, Otto: Über das Restglied der Gitterenergieentwicklung neutraler Ionengitter. (Georg Hamel zum 75. Geburtstag gewidmet.) Math. Nachr. 9, 221—234 (1953).

Es wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Ergebnisse der Berechnung von Selbstpotentialen von Punktgittern mit Potentialgesetzen $1/r^s$ ($s > 0$) gegeben und dabei insbesondere auf (allseitig oder teilweise) begrenzte Gitter eingegangen. In ihrem zweiten Teil befaßt sich die Arbeit mit der Darstellung der Selbstenergie eines endlichen Ionengitters (Dimensionszahl p) mit n Ionenpaaren in der

Form $\Phi(n) = \sum_{k=0}^p b_{p-k} n^{p-k} \cdot z(n)$ und mit der Abschätzung des Restgliedes $z(n)$.

Der Beweis dafür, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = 0$ ist und daß $z(n)$ monoton fällt, ist nicht trivial und wird nur in einfachen Fällen gegeben. Am Schluß der Arbeit findet sich

noch eine kurze Diskussion der Verhältnisse bei gleichnamigen Gittern. *A. Seeger.*

Seeger, Alfred, Hans Dönth und Albert Kochendörfer: Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung. Z. Phys. 134, 173—193 (1953).

(Teil I, II dies. Zbl. 37, 133, 43, 235). Es wird im eindimensionalen Modell die Wechselwirkung zwischen Versetzungen und Schallwellen behandelt. Dieses Modell liefert keine Dämpfung der Versetzungsbewegung durch Schallwellen. Erst im 3-dimensionalen Modell, dessen Theorie noch aussteht, ist eine solche Dämpfung zu erwarten. *G. Leibfried.*

Seeger, Alfred: Eigenbewegungen in Kristallen. II. Z. Naturforsch. 8a, 246—247 (1953).

(Teil I, dies. Zbl. 50, 237). Es wird gezeigt, daß es in einem einfachen atomistischen Modell mit nichtlinearen Kräften (zwei benachbarte Atomreihen) stehende Eigenschwingungen endlicher Amplitude gibt, die im wesentlichen einer Anordnung von Versetzungen entsprechen. *G. Leibfried.*

Head, A. K.: Edge dislocations in inhomogeneous media. Proc. phys. Soc., Sect. B **66**, 793—801 (1953).

Eine allgemeine Methode zur Behandlung des ebenen Verzerrungszustandes für zwei Medien mit gemeinsamer ebener Begrenzung wird entwickelt. Speziell behandelt werden Versetzungslösungen mit verschiedenen Randbedingungen an der Begrenzungsfläche (1. freie Oberfläche, 2. zwei verschiedene Medien, 3. zwei verschiedene Medien, aber keine Übertragung von Scherkräften in der Grenzfläche).

G. Leibfried.

Mott, N. F.: Bakerian lecture. Dislocations, plastic flow and creep. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **220**, 1—14 (1953).

Eine qualitative Übersicht der Versetzungstheorie der plastischen Verformung.

G. Leibfried.

Mott, N. F.: A theory of work-hardening of metals. II. Flow without slip-lines, recovery and creep. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 742—765 (1953).

[Teil I, Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 1151—1177 (1952)]. Der wesentliche Inhalt der Arbeit besteht in einer Diskussion der Vorgänge während der plastischen Verformung, die durch langsam laufende Versetzungen hervorgerufen werden. Bei kleinen Spannungen und stark behinderter Versetzungsbewegung erreichen die Versetzungen jedenfalls nur Geschwindigkeiten, die klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind. Unter diesem Gesichtspunkt werden der Anfangsteil der Verfestigungskurve, Erholung und Fließen diskutiert.

G. Leibfried.

Sørum, Harald: Remarks on the technique of least squares refinement in X-ray structure analysis. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **25**, 107—111 (1953).

Es wird ein Verfahren beschrieben, um bei der Verfeinerung der Atomkoordinaten einer zu bestimmenden Kristallstruktur u. U. die Koeffizienten der Normalgleichungen (durch Vernachlässigung der Nicht-Diagonalglieder) schneller berechnen zu können.

W. Nowacki.

Thompson, N.: Dislocation nodes in face-centred cubic lattices. Proc. phys. Soc., Sect. B **66**, 481—492 (1953).

Die Eigenschaften von Versetzungsknoten, d. s. Stellen, an denen sich mehrere Versetzungslinien treffen, werden diskutiert. Das Verhalten einer Versetzungsquelle, die aus einer Versetzungslinie zwischen zwei „unbeweglichen“ Knoten besteht, wird untersucht.

G. Leibfried.

Bilby, B. A.: On the mutual transformation of lattices. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 782—785 (1953).

Die Erzeugung von Gittertransformationen durch Versetzungsmechanismen wird allgemein diskutiert. Der Spezialfall der Kobaltumwandlung wird explizit behandelt.

G. Leibfried.

Homilius, J.: Elektronenzustände kubischer Kristalle in Brillouinscher Näherung. Z. Naturforsch. **8a**, 432—441 (1953).

Eigenfunktionen und Energieflächen für die 3 primitiven kubischen Gitter werden in Brillouinscher Näherung berechnet (speziell für das flächenzentrierte Gitter). Der Verlauf der Energiewerte an den ersten 6 Resonanzstellen und auf der Oberfläche der 1. Brillouinzone wird graphisch dargestellt.

G. Leibfried.

Kanazawa, Hideo, Shoichiro Koide and Tamazi Noguchi: On the lattice vibration and the effective mass of conduction electrons. Progress theor. Phys. **9**, 288—294 (1953).

Fröhlich hat in seiner Theorie der Supraleitung (dies. Zbl. **37**, 430) die Gesamtenergie eines entarteten Gases von freien Elektronen angegeben, dessen Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen bis zur 2. Näherung der Störungsrechnung berücksichtigt ist. Verff. entnehmen hieraus durch Weglassen einer Summation $E(f)$ für ein Elektron und berechnen auf die übliche Weise eine „effektive Masse“. Während man diesen Begriff sonst meist benutzt, um zum Ausdruck zu bringen,

daß ein Elektron im periodischen Potential sich in einem überlagerten äußeren Feld angenähert wie ein freies Elektron mit veränderter Masse bewegt, soll hier die effektive Masse die Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen ersetzen. Wegen der Entartung hängt sie von der Verteilungsfunktion der Elektronen ab. Verff. finden an der Oberfläche einer Fermikugel sehr kleine Werte ($10^{-3} m$), jedoch ist die Rechnung formal. Die physikalische Bedeutung des Ergebnisses bleibt unklar, insbesondere ist es bedenklich, nur für $T = 0$ zu rechnen. *G. Höhler.*

Kitano, Yosiharu and Huzio Nakano: On a correlation between the electron assembly and the lattice waves in the crystal. *Progress theor. Phys.* 9, 370—380 (1953).

Verff. behandeln in ähnlicher Weise wie Fröhlich (dies. Zbl. 47, 455) die „Renormierung der Schallgeschwindigkeit“ und diskutieren die Anwendung ihrer Methode auf den eindimensionalen Fall. Vgl. Wentzel, dies. Zbl. 43, 445.

G. Höhler.

● **Brillouin, L.:** Wave propagation in periodic structures. Electric filters and crystal lattices. 2. ed. New York: Dover Publications 1953. XII, 255 p. Cloth bound \$ 3,50; paper bound \$ 1,75.

Keilson, Julian: A more exact treatment of the equations describing dielectric relaxation and carrier motion in semiconductors. *J. appl. Phys.* 24, 1198—1200 (1953).

Meijer, H. J. G. and D. Polder: Note on polar scattering of conduction electrons in regular crystals. *Physica* 19, 255—264 (1953).

Dexter, D. L. and W. R. Heller: Quantum theory of the polarizability of an idealized crystal. *Phys. Review, II. Ser.* 91, 273—278 (1953).

Verff. untersuchen an einem stark vereinfachten Modell, wieweit die klassischen Vorstellungen vom Lorentzschen „inneren Feld“ auch quantenmechanisch gerechtfertigt sind, und diskutieren die wichtigsten Korrekturen. Dabei benutzen sie die Methode und einige Ergebnisse der Arbeit von Heller und Marcus (dies. Zbl. 43, 444) zur Excitonentheorie.

G. Höhler.

Howarth, D. J. and E. H. Sondheimer: The theory of electronic conduction in polar semiconductors. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 219, 53—74 (1953).

Methoden, die für die Theorie der Leitfähigkeit und des thermoelektrischen Effekts in Metallen und nichtpolaren Halbleitern entwickelt worden sind, werden auf Halbleiter übertragen, bei denen die Wechselwirkung der Elektronen mit den Polarisationswellen [Fröhlich, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 160, 230 (1937)] dominiert. Das Variationsverfahren von Köhler (dies. Zbl. 33, 332) führt für jeden Entartungsgrad und alle Temperaturen zu einer exakten Lösung, aus der brauchbare Näherungen für die interessierenden Spezialfälle hergeleitet werden. Frühere Arbeiten insbesondere von Wright und von Shifrin werden kritisiert. (Ann. des Ref. Für die Elektron-Gitterwechselwirkung wird das wegen der Stärke der Kopplung fragliche Ergebnis der Störungsrechnung angenommen.)

G. Höhler.

Koenigsberg, Ernest: Conductivity of thin films in a longitudinal magnetic field. *Phys. Review, II. Ser.* 91, 8—9 (1953).

Paranjape, B. V.: On the theory of internal friction in metals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 66, 572—575 (1953).

Ein Ausdruck für die innere Reibung in Metallen durch Wechselwirkung der Schallwellen mit den „freien“ Elektronen des Metalls wird abgeleitet. Dieser Anteil der inneren Reibung ist frequenzunabhängig und sollte für hohe Frequenzen und longitudinale Schwingungen den Hauptanteil liefern.

G. Leibfried.

Juenker, D. W., G. S. Colladay and E. A. Coomes: Surface barrier analysis for the highly refractory metals by means of Schottky deviations. *Phys. Review, II. Ser.* 90, 772—778 (1953).

Die beobachteten Abweichungen von der Schottkyschen Beziehung für die thermische Emission von Elektronen aus Metallen unter einem äußeren Feld werden erneut theoretisch unter-

sucht, und zwar unter Verwendung der von Herring und Nichols eingeführten Koeffizienten μ und λ , die das Reflexionsvermögen des an der Metalloberfläche befindlichen Potentialwalles charakterisieren. Die von Guth und Mullin entwickelte Theorie wird weiter ausgebaut. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen für Wolfram, Tantal und Molybdän läßt folgende Rückschlüsse zu: Das äußere (λ) Reflexionsgebiet des Potentialwalles verhält sich so, wie aus dem Bildkraftgesetz zu erwarten ist, während das innere (μ) Reflexionsgebiet feldunabhängig ist. Die Phasenänderung, die eine Elektronenwelle beim Durchlaufen des μ -Gebietes erfährt, ist geringer als nach dem theoretischen Kastenmodell zu erwarten wäre. Bei allen 3 Metallen ist der Potentialverlauf im μ -Gebiet ähnlich. Es scheint aber noch nicht möglich zu sein, den Reflexionskoeffizienten für den feldfreien Fall aus den Abweichungen vom Schottky-Effekt zu erschließen; das dürfte an der parabolischen Potentialapproximation im λ -Gebiet liegen.

W. Oldekop.

Johnson, V. A. and F. M. Shipley: The adiabatic Hall effect in semiconductors. Phys. Review, II. Ser. **90**, 523—529 (1953).

Der relative Unterschied zwischen dem isothermen und adiabatischen Halleffekt bei Halbleitern wird elektronentheoretisch untersucht. Während beim isothermen Halleffekt die Temperatur sowohl in der Richtung des elektrischen Stromes als auch in der Richtung des Hall-Feldes konstant ist, ist der adiabatische Halleffekt durch die Forderung gekennzeichnet, daß in Richtung des Hallfeldes nicht der Temperaturgradient, sondern der Wärmestrom verschwindet. Die relative Differenz $(R_a - R_i)/R_i$ der Hallkonstanten wird für verschiedene Halbleitertypen unter Benutzung empirischer Zahlwerte für die Elektrizitäts- und Wärmeleitfähigkeit berechnet. Die sich ergebenden Differenzen betragen nur ein Prozent oder weniger, so daß praktisch zwischen den beiden Arten des Halleffekts nicht unterschieden zu werden braucht.

W. Oldekop.

Shockley, W. and C. R. Prim: Space-charge limited emission in semiconductors. Phys. Review, II. Ser. **90**, 753—758 (1953).

In gewissen Halbleiteranordnungen kann die Stromdichte in ähnlicher Weise wie bei Vakuumdioden durch Raumladungseffekte bestimmt sein. Betrachtet wird eine Anordnung, bestehend aus zwei n -leitenden Schichten, zwischen denen sich eine Schicht eigenleitenden Materials befindet. Das Analogon zu dem Childschen Raumladungsgesetz für die Stromdichte J lautet hier: $J = 9 \kappa \epsilon_0 \mu \cdot V^2/8 W^3$, wobei κ = Dielektrizitätskonstante, μ = Beweglichkeit, V = angelegte Spannung und W = Dicke des Eigenleitungsgebietes. Die Verhältnisse in der Gegend des Raumladungsmaximums werden unter Berücksichtigung der Diffusionsvorgänge untersucht. Die Feldabhängigkeit der Beweglichkeit wird in Rechnung gesetzt. Der strombeschränkende Einfluß der Raumladungen bei einer neuen Klasse von Unipolartransistoren wird kurz diskutiert.

W. Oldekop.

Howard, Louis N. and J. Samuel Smart: The specific heat discontinuity in antiferromagnets and ferrites. Phys. Review, II. Ser. **91**, 17—19 (1953).

Anwendung der üblichen Molekularfeldtheorie.

G. Heber.

Korringa, J. and A. N. Gerritsen: The cooperative electron phenomenon in dilute alloys. Physica **19**, 457—507 (1953).

Niessen, K. F.: Condition for vanishing spontaneous magnetization below the Curie temperature. Physica **19**, 445—450 (1953).

Shockley, W.: Cyclotron resonances, magnetoresistance, and Brillouin zones in semiconductors. Phys. Review, II. Ser. **90**, 491 (1953).

Smart, J. Samuel: Magnetic structure transitions. Phys. Review, II. Ser. **90**, 55—58 (1953).

Es handelt sich um eine Anwendung der Molekularfeld-Theorie auf das genannte Problem.

G. Heber.

O'Rourke, R. C.: Deviations from Brillouin's free-spin theory in manganese fluorosilicate. Phys. Review, II. Ser. **90**, 786—790 (1953).

Eine Berechnung des Einflusses des elektrischen Kristallfeldes auf die paramagnetische Resonanzabsorption der genannten Substanz.

G. Heber.

Stevens, K. W. H.: On the magnetic properties of covalent $X Y_6$ complexes. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **219**, 542—555 (1953).

* Haar, D. ter: Statistics of the three-dimensional ferromagnet. III. Some numerical results. Physica **19**, 611—614 (1953).

Bleaney, B. and K. W. H. Stevens: Paramagnetic resonance. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. **16**, 108—159 (1953).

Die Erscheinung der paramagnetischen Resonanz ist eine wichtige Methode zur Erforschung des festen Zustandes geworden. Der vorliegende Bericht behandelt neben der experimentellen Seite auch die theoretischen Grundlagen. Insbesondere wird die Hamilton-Funktion des freien Ions unter Einschluß aller Spin-Wechselwirkungen aufgestellt, dann der Einfluß des Kristallfeldes untersucht, und es werden seine Matrixelemente speziell für kubische Symmetrie berechnet. Auf die Ermittlung und die Bedeutung der sogenannten Spin-Hamilton-Funktion wird besonders ausführlich eingegangen. *J. Meixner.*

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Fleckenstein, J. O.: Les cas d'exception au théorème de Laplace sur les perturbations séculaires des éléments vectoriels des orbites planétaires. Experientia **9**, 252 (1953).

Meffroy, Jean: Sur les termes séculaires du développement des grands axes par rapport aux masses. I. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 778—780 (1953).

Nach dem Theorem von Laplace treten in den Störungen der großen Halbachsen einer Planetenbahn keine säkularen Terme erster Ordnung in den störenden Massen auf, nach dem Theorem von Poisson sind unter den Termen zweiter Ordnung gemischt-säkulare Glieder vorhanden. Seit Ende des 19. Jahrhunderts sind rein säkulare Terme der dritten Ordnung bekannt. Verf. zeigt nun, daß außer den bisher bekannten Termen noch einige Terme dritter Ordnung rein säkularer Natur mehr existieren, und gibt eine vollständige Übersicht über alle Glieder dieser Art.

F. Schmeidler.

Meffroy, Jean: Sur les termes séculaires du développement des grands axes par rapport aux masses. II. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2482—2484 (1953).

Unter Fortführung früherer Arbeiten werden die rein säkularen Störungen dritter Ordnung in den störenden Massen untersucht, die die großen Halbachsen der Planetenbahnen erleiden. Der betreffende Term ist in den Exzentrizitäten und Neigungen vom Grad Null, tritt also auch bei kreisförmigen und ebenen Bahnen auf.

F. Schmeidler.

Soudan, Adel: Sur de nouveaux éléments canoniques du mouvement elliptique. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 1533—1535 (1953).

Verf. verallgemeinert die Theorie der oskulierenden Planetenbewegung, indem er die Kraftfunktion durch Zusatz eines quadratischen Gliedes erweitert: $(V = \mu r + \mu' r^2)$. Für die Lösung, eine elliptische Bahn mit Perihelbewegung, gibt er 5 Systeme von kanonischen oskulierenden Elementen an, die im klassischen Fall in die von Delaunay, Levi-Civita, Hill, de Sitter und Jekhowsky übergehen — ein sechstes wird vom Verf. als neu vorgeschlagen. *K. Stumpff.*

Jeffreys, Sir Harold: The figures of rotating planets. Monthly Not. Roy. astron. Soc. **113**, 97—105 (1953).

Unter Benutzung der Darwinschen hydrostatischen Theorie rotierender Körper wird der innere Aufbau von Planeten, speziell von Jupiter und Saturn untersucht. Für den Koeffizienten vierter Ordnung in der Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen wird durch Zurückführung auf eine Integralgleichung ein Aus-

druck aufgestellt. Sowohl nach der Theorie als auch nach der Beobachtung erweist sich dieser Term größer, als er für einen Körper homogener Dichteverteilung wäre.

F. Schmeidler.

Ledoux, Paul: Sur l'existence d'un noyau convectif au centre des étoiles. C. r. Acad. Sci., Paris **236**, 2381—2383 (1953).

Arkad'ev, V. K.: Über den Zerfall der Asteroiden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **88**, 225—228 (1953) [Russisch].

Radzievskij, V. V.: Das Zweikörperproblem der Photogravitation bei anisotroper Ausstrahlung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **90**, 351—354 (1953) [Russisch].

Dodd, K. N.: A case of gaseous accretion. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 486—492 (1953).

Die isotherme Strömung des interstellaren Gases in der Umgebung eines Sternes der Masse μ , der es anzieht und zum Teil einfängt, wird für vier Werte der Anströmungsgeschwindigkeit V ($>$ Schallgeschwindigkeit c) nach der Charakteristiken-Methode durchgerechnet. Der nach früheren Arbeiten von Bondi und Hoyle vermutete Ausdruck für die Massenzunahme des Sternes pro Zeiteinheit, nämlich $4\pi\mu^2\varrho_\infty(c^2 + V^2)^{-3/2}$, erweist sich als durchaus befriedigend (ϱ_∞ bedeutet die Dichte des Gases in großer Entfernung).

A. Unsöld.

Dungey, J. W.: Conditions for the occurrence of electrical discharges in astrophysical systems. Philos. Mag., VII. Ser. **44**, 752—738 (1953).

Als elektrische „Entladung“ wird eine Plasmaregion bezeichnet, in der die Elektronen durch ein elektrisches Feld auf hohe Geschwindigkeit beschleunigt werden. Bei kleiner anfänglicher Stromdichte wird nach den Bedingungen gefragt, unter denen diese anwachsen kann oder unter welchen $|\text{rot } \mathfrak{H}|$ zunimmt. Wenn die Magnetfeldlinien im Gas „eingefroren“ sind, sind solche nur in der Umgebung von neutralen Punkten des Magnetfeldes gegeben, falls nicht der Druckgradient des Gases der Strömung entgegenwirkt. Anwendungen auf die Theorie des Nordlichtes und der Entstehung der kosmischen Strahlung werden diskutiert. *G. Burkhardt.*

Vandekerckhove, E.: Une méthode spectrophotométrique de détermination des rayons stellaires. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **39**, 552—561 (1953).

Zwicky, F.: Neue Methoden der kosmologischen Forschung. Helvet. phys. Acta **26**, 241—254 (1953).

Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß alle bisherigen Methoden kosmologischer Forschung keine entscheidende Auskunft darüber geben können, ob sich das Weltall wirklich ausdehnt oder nicht. Er entwickelt eine neue Methode, die „Methode der dimensionslosen Morphologie“, von der er glaubt annehmen zu können, daß sie nicht nur das erwähnte, sondern auch andere kosmologische Probleme einer endgültigen Lösung zuführen wird, sobald eine genügende Anzahl der bereits mit dem großen Schmidt-Teleskop auf dem Mt. Palomar aufgenommenen Durchmusterungsplatten für die allgemeine Ausmessung und Durchzählung zur Verfügung steht.

H. Vogt.

Bondi, H. and R. A. Lyttleton: On the dynamical theory of the rotation of the earth. II. The effect of precession on the motion of the liquid core. Proc. Cambridge philos. Soc. **49**, 498—515 (1953).

In einem ersten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. **31**, 89) war erörtert worden, daß die säkularer Verminderung der Erddrehung durch die nicht starre Bewegung des flüssigen Erdkörpers verursacht sein könnte. Bei der mathematischen Behandlung dieses Präzessionsproblems gelingt es nun nicht, eine Bewegung für den Flüssigkeitskern zu berechnen, die überall durch analytische Funktionen dargestellt werden kann und mit den Randbedingungen verträglich ist. Die Grenzschichtbewegung an der Innenseite der Erdhülle kann dagegen rechnerisch verfolgt werden. *J. Pretsch.*

Bowden, K. F.: Note on wind drift in a channel in the presence of tidal currents. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **219**, 426—446 (1953).

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abbott, J. A. and H. C. Bolton (Electrical polarizability) 234.
- Achiezer, A. und R. Polovin (Streuung eines Elektrons) 432.
- Ackermann, Wilhelm (Typenfremde Logik. I. II.) 245.
- Adam, Adolf (Klassenstatistik) 145.
- Adam, P. Puig s. Puig Adam, P. 281.
- Adams, Mac C. and W. R. Sears (Slender-body theory) 192.
- Adams II, E. N. (Magnetic susceptibility) 240.
- Afriat, S. N. (Reduction of quadratic forms) 15.
- Agarwal, R. P. (Series of hypergeometric type) 295.
- Agliata, Salvatore (Equazioni differenziali lineari) 315.
- Agmon, Shmuel (Complex variable Tauberians) 330.
- Agostinelli, Cataldo (Funzioni epicicloidali) 292.
- Agostini, Amedeo (Massimi e minimi) 242; (Aritmetica di G. Francesco) 242.
- Ahlfors, L., E. Calabi, M. Morse, L. Sario and D. Spencer (Riemann surfaces) 84.
- Aissen, Michael (Super-additive functions) 284.
- Aitken, A. C. (Trace-differentiation) 10.
- Akeley, Edward s. J. Swihart 212.
- Al-Kāšī, Gamšid B. Mas'ūd s. P. Luckey 1.
- Alaïme, R. (Fermeture hexagonale) 152.
- Albert, A. A. (Rational normal matrices) 10.
- G. E. and Lewis Nelson (Counter data) 139.
- Albertoni, S. e M. Cugiani (Cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni. I. II.) 339.
- Albrecht, J. (Taylor-Entwicklungen) 129.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S. und A. Ja. Činčīn (A. N. Kolmogorov) 2.
- Alexiewicz, A. (Theorems of S. Saks) 109.
- Allais, M. (Équilibre économique) 367; (L'homme rationnel devant le risque) 368.
- Allcock, G. R. (Photo-meson process) 226.
- Allen, A. C. and E. Kerr (Converse of Fatou's theorem) 101.
- D. N. de G. and S. C. R. Dennis (Relaxation methods to solution of differential equations. II.) 407.
- G. (Band structures of crystals) 238.
- H. S. (Groups of infinite matrices) 333.
- jr., S. G. (Minimax tests) 362.
- Al'per, S. Ja. und V. V. Ivanov (Annäherung von Funktionen) 296.
- Altshuler, Saul (Scattering problems) 227.
- Amanov, T. I. (Einbettungssatz für Funktionen) 63; (Biharmonisches Problem) 324.
- Amar, Henri (Shortrange forces) 226.
- Amato, Vincenzo (Curve algebriche) 252; (Sistema di equazioni differenziali) 315.
- Amble, Ole (Numerical integration) 348.
- Amemiya, Ichiro (Produits directs des espaces) 334.
- Amitsur, S. A. (Identities of PI-rings) 29.
- Ammeter, Hans ($(I\gamma)^2$ -Tests) 149.
- Ancochea, Germán (Formes différentielles dégénérées) 93.
- Anders, Till (Beugung akustischer Wellen) 406.
- Anderson, Douglas R. and T. M. Apostol (Ramanujan's sum) 42.
- Andress, W. R. (Expansion of a function) 295.
- Anis, A. A. and E. H. Lloyd (Partial sums of normal variates) 358.
- Ansari, A. R. and S. M. Shah (Nilpotent matrices) 251.
- Ancombe, F. J. (Sequential estimation) 363.
- Antosiewicz, H. A. (Systems of differential equations) 91; (Correction) 316.
- Aoi, T. s. S. Tomotika 413.
- Apostol, T. M. s. D. R. Anderson 42.
- Appleton, G. L. s. O. Halpern 434.
- Archibald, R. C. (Canon doctrinae triangulorum) 2.
- Arens, Richard (Coverings, pseudometrics and linear-space-valued mappings) 391.
- Areškin, G. Ja. (Freie distributive Verbände) 390.
- Ariñs, E. G. (Satz von Baire) 280.
- Arkad'ev, V. K. (Zerfall der Asteroiden) 453.
- Armitage, P. (Time-homogeneous birth process) 365.
- Aronszajn, N. (Characterization of types) 54.
- Arrow, K. J., E. W. Barankin and D. Blackwell (Admissible points) 142.
- Artémiadès, Nicolas (Séries de Dirichlet) 299.
- Aržanyč, I. S. (Lineare Funktionalgleichungen) 120; (Gleichungen in exakten Differentialen) 317.
- Ascoli, G. ($y'' - (1 + \eta)y = 0$) 312.
- R. (Interazioni non localizzabili) 432.
- Ashour, A. A. (Electromagnetic induction) 416.
- Aubert, Karl Egil (Ideal theory) 253.
- Audin, Maurice (Alternative de Fredholm) 342.
- Auluck, F. C. (Partitions of bipartite numbers) 41.
- — — and D. S. Kothari (Nucleon collisions) 229.

- Aumann, Georg (Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden) 56.
- Aymerich, Giuseppe (Onde elettromagnetiche) 210.
- Ayoub, Raymond (Goldbach-Vinogradoff theorem) 270.
- Azpeitia, A. G. (Laplace-Transformierte) 104; (Fresnelsche Integrale) 298.
- Babič, V. M.** (Fortsetzung von Funktionen) 62.
- Bäbler, F. (Eulersche Graphen) 179.
- Babukov, A. G. (Telegraphengleichung) 95.
- Bachmann, Friedrich (Gebrochen-lineare Transformationen) 369.
- Backes, F. (Configuration des quinze cercles de Stephanos) 154.
- Bade, William G. (Operators with spectrum in a strip) 343.
- Baer, Reinhold (n -soluble and n -nilpotent groups) 22.
- Bagchi, S. N. s. R. Hosemann 399.
- Bailey, Norman T. J. (Size of stochastic epidemic) 366.
- W. N. ($\theta_1(nz)/\theta_1(z)$) 300.
- Bajraktarevic, Mahmud (Suites itérées. I. II. III.) 119.
- Balazs, Nandor L. (Démon de Maxwell) 204; (Relations d'incertitude d'Heisenberg) 219.
- Band, William and Raymond A. Nelson (Cluster theory) 235.
- Bandyopadhyay, G. (Affine field laws) 217.
- Barankin, E. W. s. K. J. Arrow 142.
- Bari, N. K. (Ungleichungen) 292.
- Barker, R. S. s. C. J. Thorne 134.
- W. A. and Z. V. Chraplyvy (Dirac equation) 428.
- Barnes, E. S. (Diophantine equation) 37; (Minima of product of n linear forms) 48.
- Barriol, Jean et Jean Régnier (Polarisabilités moléculaires) 234.
- Bartlett, M. S. (Approximate confidence intervals) 363.
- — — and D. V. Rajalakshman (Fit tests for autoregressive series) 365.
- Bartsch, Helmut (Einschließungssatz für Matrizen-Eigenwertaufgaben) 250.
- Basch, Alfred (R. von Mises 70. Geburtstag) 2; (Ebene Strömung von Gasen) 411.
- Basile, Robert (Forces d'échange) 219.
- Bassaly, W. A. (Symmetry properties of tensors) 376.
- Bates, D. R., H. S. W. Massey and A. L. Stewart (Collisions between atoms. I.) 233.
- Bauer, Friedrich L. s. K. Samuelson 350.
- Baumann, Kurt (Teilchen-Anteilchen-Wellenfunktion) 224; (Streuformel von Bhabha) 227; (Infrarotkatastrophen) 429.
- Baur, Arnold (Brennpunkte der Kegelschnitte) 155.
- Beck, F. (Trägheitsgesetz der Energie) 213.
- Beauregard, Olivier Costa de, s. Costa de Beauregard, Olivier 204.
- Beckenbach, E. F. and L. K. Jackson (Subfunctions of several variables) 101.
- Becker, E. (Wasserschwall und Verdichtungsstoß) 200.
- Becquerel, Jean et Paul Couderc (Raies spectrales des galaxies) 217; (Expansion de l'univers) 217.
- Bedsin, D. J., J. R. Shewell and Ernest Ikenberry (Motion of conducting sphere) 417.
- Behrens, Ernst-August (Assoziativ auflösbare Ringe) 29.
- Bejarano, G. G. and B. R. Rosenblatt (Simultaneous linear equations) 121.
- Belgrano Brémard, J. C. (Calcul fonctionnel) 350.
- Bell, D. G., D. M. Hum, L. Pincherle, D. W. Sciama and P. M. Woodward (Electronic band structure of PbS) 238.
- Bellman, Richard (Matrix theory. II.) 10.
- — —, Irving Glicksberg and Oliver Gross (Variational problems in dynamic programming) 368.
- Benedicty, Mario (Trasformazioni birazionali) 371.
- Bennett, Herbert S. (Electromagnetic transmission characteristics) 422.
- Berezanskij, Ju. M. (Fast-periodische Funktionen und Folgen) 310.
- Berezina, L. Ja. (Evolutenflächen) 379; (Brechung einer Kongruenz) 423.
- Berge, Claude (Jeux alternatifs) 356.
- Berger, Erich R. (Dirac delta function) 105; (Plattengleichung) 401.
- Bergman, Stefan (Theorem of Green's type) 306.
- Bergmann, Peter G. and Robb Thomson (Spin and angular momentum) 215.
- — — — Ralph Schiller (Lagrangian formalism) 429.
- Berman, Abraham S. (Laminar flow in channels) 411.
- R. (Thermal conducting of dielectric solids) 237.
- S. D. (Ganzzahlige Gruppenringe) 255; (Zentren von Gruppenringen) 256.
- Bernal, M. J. M. (Wave functions for methane) 234.
- Bernard, Jean-J. (Distributions polynomiales) 415.
- Michel Yves (Lentilles électrostatiques) 211; (Focalisation des particules de grande énergie. I. II.) 211.
- Bernštejn, S. N. (Gewichtsfunktion) 70; (Schwache Gewichtsfunktion) 290.
- Berry jr., V. J. (Heat transfer to fluids) 416.
- Bertein, F. (Images électroniques des cathodes) 212; (Lentilles optiques ou électroniques) 426.
- Bertolini, Fernando (Minimum for classical integral) 325.
- Besicovitch, A. S. ($dy/dx = \varphi'(x, y)$) 87.
- Beskin, N. M. s. A. I. Ostrovskij 181.
- Beth, M. E. W. (Parallélisme logico-mathématique) 246.
- Bethe, H. A. (Meson-nucleon scattering) 227; (Multiple scattering) 229.
- Beurling, Arne (Functions on a semigroup) 337.
- — — and Henry Nelson (Fourier-Stieltjes transforms) 330.
- Bezirganjan, P. A. s. I. B. Borovskij 237.
- Bhabha, H. J. (Production of mesons) 431.

- Bhattacharya, K. N. s. R. C. Rose 146.
- Bicadze, A. V. (Gleichung vom gemischten Typus) 94.
- Bieberbach, L. (Conformal mapping) 84.
- Biedenharn, L. C. (Racah coefficients) 231.
- Bieri, H. ((M, F) -Problem) 388.
- Biermann, L. und H. Billing (Elektronische Rechenmaschinen. I.) 132.
- Bilby, B. A. (Mutual transformation of lattices) 449.
- Billing, H., W. Hopmann und A. Schlüter (Elektronische Rechenmaschinen. II.) 132. — s. L. Biermann 132.
- Bing, R. H. (Convex metric) 385.
- Binnie, A. M. (Cavitation bubble) 193.
- Biran, Lutfi (Formules de J. Liouville) 381.
- Birkhoff, Garrett (Vortex streets) 194.
- Birnbaum, Z. W. (Distribution-free tests) 146.
- Bishop, R. E. D. (Plane stress and plane strain) 404.
- Biswas, S. N. (Heitler's integral equation) 428.
- Blackwell, David (Randomization in games) 148; (Comparisons of experiments) 360. — s. K. J. Arrow 142.
- Blair, J. S. and G. F. Chew (Scattering of pions) 435. — Robert L. (Ideal lattices) 259.
- Blanch, Gertrude and Everett C. Yowell (Tables on punched cards) 134.
- Blanchard, André (Structures analytiques complexes) 162.
- Blaschke, W. (Regiomontano) 242; (Anschauliche Geometrie) 368.
- Blatt, John M. (Beta-decay of triton) 231.
- Bleaney, B. and K. W. H. Stevens (Paramagnetic resonance) 452.
- Bleich, H. H. s. R. D. Mindlin 188.
- Blin-Stoyle, R. J. (Radiative transitions) 224.
- Bloch, Gérard (Ensembles stationnaires de nombres ordinaux) 55.
- Block, Daniel (Fibonacci numbers) 10.
- Bloom, Melvin (Bounded variation moment problem) 331.
- Bloom, Stanley and Henry Margenau (Spectral line broadening) 432.
- Blum, Edward K. (Commutative Banach algebra) 340.
- Blumenthal, Leonard M. (Distance geometry) 385.
- Boas jr., R. P. (Integral functions) 82; (Moment problem) 107; (Functions which are odd) 283.
- Bochner, S. (Zeta functions and Green's functions) 80.
- Boehm, Carl (Prämienreserve) 150.
- Boerner, Hermann (Variationsrechnung) 325.
- Bohm, David (Quantum theory) 219.
- Bolton, H. C. s. J. A. Abbott 234.
- Bončkovskaja, T. V. s. A. A. Dmitriev 416.
- Bondi, H. and R. A. Lyttleton (Rotation of the earth. II.) 453.
- Bonnevay, Georges et Louis Michel (Moment angulaire) 223.
- Bonnor, W. B. (Equations of general relativity) 215.
- Bononcini, Vittorio E. (Campo di esistenza di una funzione continua) 280.
- Bonsall, F. F. (Vector space) 111. — and A. W. Goldie (Algebras which represent their linear functionals) 111.
- Bopp, Fritz (Kanonische Gesamtheit) 205.
- Borch, Karl (Distribution of income) 368.
- Bordoni, Piero Giorgio (Raggi di girazione) 388; (Autofrequenza di un solido) 448.
- Borel, A. et J.-P. Serre (Groupes de Lie) 396. — Emile (Theory of play) 140; (Games) 140; (Linear forms and theory of play) 140.
- Boreli, Mladen (Écoulement plan) 416.
- Borgnis, F. (Schallstrahlungsdruck) 191.
- Born, Max (Conceptual situation in physics) 398.
- Borovskij, I. B. und P. A. Bezirganjan (Beugung der Röntgenstrahlen. Durchgang) 237; (Beugung der Röntgenstrahlen. Reflexion) 237.
- Borowitz, Sidney and Bernard Friedman (Three-body scattering problems) 229.
- Borsuk, Karol (Functional space S_m^n) 173.
- Bosanquet, L. S. (Laplace-Stieltjes integrals) 286.
- Boscher, Jean (Détermination numérique de fonctions biharmoniques) 126. — s. L. Malavard 188.
- Bose, R. C., S. S. Shrikhande and K. N. Bhattacharya (Construction of block designs) 146. — S. K. (Transformations de Laplace) 103. — S. N. (Identités de divergence) 217.
- Bott, Raoul (Majority games) 144; (Third symmetric potency of S_3) 178. — and R. J. Duffin (Algebra of networks) 251.
- Bouligand, Georges (Transformations de contact) 164.
- Bourbaki, N. (Espaces vectoriels topologiques. Chap. I. II.) 107; (Topologie générale (Fascicule de résultats)) 389.
- Bourgoin, D. G. (Multiplicative functionals) 112.
- Bowden, K. F. (Wind drift in a channel) 453.
- Boyer, Carl B. (Fermat and Descartes) 2.
- Bradford, W. H. (Sub-bi-harmonic functions) 323.
- Brandt, Heinrich (Quadratische Formen) 46.
- Brauer, Alfred (Charakteristische Wurzeln) 250. — Richard (Characters of groups) 24.
- Brauner, Heinrich (Verlagerung kollinearer Räume) 181.
- Breit, G. and M. H. Hull (Nuclear forces) 226. — and R. M. Thaler (Corrections to magnetic moments) 439.
- Breitenberger, E. (Angular correlation) 437.
- Brémard, J. C. Belgrano s. Belgrano Brémard, J. C. 350.
- Brenig, W. s. G. Leibfried 236.

- Brennan, J. G. (Manifolds) 375.
- Brenner, Sheila and G. E. Brown (*K* absorption edges) 233.
- Brillouin, L. (Wave propagation) 450.
- Broer, L. J. F. (Thermal machines) 204.
- Brogie, Louis de (Mécanique ondulatoire) 219; (Theory des quanta) 220.
- Bronwell, Arthur (Mathematics in physics) 276.
- Brooker, R. A. and D. J. Wheeler (Floating operations) 133.
- Browder, Felix E. (Green's function in Dirichlet problem) 97; (Linear parabolic differential equations) 97; (General linear elliptic differential operator) 321.
- Brown, G. E. s. Sh. Brenner 233.
- J. A. C., H. S. Houthakker and S. J. Prais (Economic statistics) 351.
- Brownlee, K. A., J. L. Hodges jr., and Murray Rosenblatt (Up-and-down method) 360.
- Brücker-Steinkuhl, Kurt (Varianzanalyse) 145.
- Brueckner, K. A. (Corrections to nuclear forces) 226; (Multiple scattering corrections) 229.
- Bruijn, N. G. de (Finite Abelian groups) 257.
- Brun, Viggo (N. H. Abel) 243.
- Bruniak, R. (Verdichtungsstoß) 415.
- Bruno, B. and S. Depken (Photodisintegration) 230.
- Buchholz, H. (Konfluente hypergeometrische Funktion) 74; (Whittakersche Differentialgleichung) 75.
- Büchi, J. Richard (Axiom of choice and Zorn's lemma) 247.
- Buck, R. Creighton (Asymptotik density) 59; (Admissibility of sequences) 81.
- Buckel, Walter (System aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius) 155; (Kegelschnitte der projektiven Ebene) 155.
- Budden, K. G. (Airy-integral function) 423.
- Budini, P. (Energy lost) 440.
- Budini, P. e C. Villi (Interazione tra particelle di Fermi) 432.
- Burdina, V. I. (Differentialgleichungen 2-ter Ordnung) 315.
- Burfoot, J. C. (Electrostatic lenses) 425.
- Burgers, J. M. (Turbulent flow with shear. I. II.) 410.
- Burgess, D. C. J. (Abstract Dirichlet's series) 337.
- R. E., H. Kroemer and J. M. Houston (Emission functions $v(y)$ and $s(y)$) 239.
- Burkhardt, Felix (Lineare Gleichungssysteme) 121.
- Burnaby, T. P. (Correlation coefficient) 149.
- Burniat, Pol (Surfaces canoniques) 373.
- Burton, W. K. and B. F. Touschek (Lagrangian quantum mechanics) 223.
- Busemann, Herbert (Concurrent cross-sections) 167.
- Butchart, J. H. and Leo Moser (No calculus, please) 277.
- Butler, S. F. J. (Stokes's stream function) 192.
- Butzer, P. L. (Bernstein polynomials) 70.
- Byrd, Paul F. and Mary T. Huggins (Wirbelverteilung und Auftrieb) 413.
- Caabannes, Henri (Ondes de choc) 199; (Courbure au sommet de l'onde) 199.
- Cafiero, Federico (Funzioni additive) 278; (Integrale di Stieltjes-Lebesgue) 281.
- Caianiello, E. R. (Fermi-Type interaction. III.) 224.
- Caimann, Viktor and Walter Hoppe (Berechnung von Fourierreihen mit Überlagerer) 132.
- Calabi, E. s. L. Ahlfors 84.
- Calapso, Renato (Matematici di Sicilia) 2.
- Caligo, Domenico (Aste vibranti. I. II.) 405.
- Cameron, R. H. and C. Hatfield (Summability of series for functionals) 338.
- Camm, Ruth (Simple free products) 20.
- Campagne, C. (Équivalence des placements) 150.
- Campbell, H. E. (Cartan's criterion) 262.
- Campbell, I. J. (Wave motion) 203.
- Canals Frau, Damián (Matrice S d'un filtre interférentiel) 422.
- Cantelli, Francesco Paolo (Propabilità) 352.
- Cap, Ferdinand (Masse du photon) 223.
- Caprioli, Luigi (Onde di tipo trasversale) 417.
- Caputo, Michele (Topologia delle curve algebriche) 372.
- Carleson, Lennart (Infinite differential equations. I.) 311.
- Carlitz, L. (Formula of Szily) 9; (Formula of Grosswald) 9; (Bernoulli numbers) 9; (Three-line latin rectangles) 38; (Schur derivative) 38; (Bernoulli numbers) 39; (Jacobi elliptic functions) 39; (Conjecture of A. Weil) 265; (Congruences) 266; (Theorem of Stickelberger) 267; (Quadratic residues) 267; (Bernoulli numbers) 267; (Theorem of Glaisher) 267.
- Carson, J. R. (Electric circuit theory) 417.
- Carstou, Ion (Déformation d'une particule) 413.
- Cartan, Henri et Jean-Pierre Serre (Théorème de finitude) 177.
- Cassels, J. W. S. (Equation $a^x - b^y = 1$) 37; (Minkowski-Hlawka theorem) 48.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Ellipse de Steiner) 153; (Quadrature approchée du cercle) 155.
- Cecconi, Jaurès (Definizioni di area) 280; (Teorema di Gauss-Green) 280.
- Cenov, I. (Analytische Dynamik) 182; (Bewegungsgleichungen) 182; (Variationsprinzipien) 183; (Prinzip des kleinsten Zwanges) 183.
- Centre National de la Recherche Scientifique (Méthodes formelles en axiomatique) 244.
- Černikov, S. N. (Lineare Ungleichungen) 12.
- Ceschino, Francis (Méthode de Graeffe) 121; (Méthode de Lin) 347.

- Četaev, D. N. (Akustischer Widerstand) 191.
- Chabauty, Claude (Empilement de calottes) 166.
- Chakrabarty, N. K. (Calcul symbolique) 329.
- Chalanaj, A. (Differentialgleichung mit fastperiodischen Koeffizienten) 87.
- Chalk, J. H. H. (Theorem of Minkowski) 276.
- Champion, K. S. W. (Energy balance equation) 235.
- Chandrasekhar, S. (Stability of viscous flow) 196.
- and Donna Elbert (Roots of $J_{-(l+1/2)}(\lambda, \eta) J_{l+1/2}(\lambda, \eta) - J_{l+1/2}(\lambda, \eta) J_{-(l+1/2)}(\lambda, \eta) = 0$) 351.
- Chaney, Jesse Gerald (Free space radiation) 420; (Mutual impedance of antennas) 420; (Rhombic antennas) 420.
- Chang, Chieh-Chien, Boa-Teh Chu and Vivian O'Brien (Whittaker function $W_{k,m}(z)$) 75.
- Charanen, V. Ja. (Fortpflanzung des Schalls) 191.
- Charles, Bernard (Groupe abélien primaire) 25; (Critère de maximalité) 114; (Anneaux d'opérateurs linéaires) 114; (Opérateurs linéaires) 249.
- Charnes, A. (Constrained games) 141.
- , W. W. Cooper and A. Henderson (Linear programming) 368.
- Charrueau, André (Cycles de projectivités) 156; (Systèmes de transformations) 156.
- Châtelet, François (Exemple de Segre) 158.
- Chatterjee, J. S. (Radiation field of conical helix) 420.
- Chebata, C. G. (Ordered semigroup) 17.
- Cherry, T. M. (Hodograph equation) 194; (Hypergeometric functions) 351.
- Chew, G. F. s. J. S. Blair 435.
- Chinčîn, A. Ja. (Entropie) 354.
- s. P. S. Alexandroff 2.
- Chisholm, R. and B. Touschek (Spin orbit coupling) 438.
- Chisini, Oscar (Trecece algebriche) 372.
- Chochardt, A. W. (Damping in high-strength ferromagnetic alloys) 240.
- Chong, Frederick (Mixed boundary value problems) 401.
- Chovanskij, A. N. (Grundgleichungen der Filtration) 202.
- Chow, H. C. (Summability $[C]$) 286.
- Chowla, S., I. N. Herstein and W. R. Scott ($x^d = 1$ in symmetric groups) 256.
- Chraplyvy, Zeno V. (Two-particle wave equations. I.) 222.
- s. W. A. Barker 428.
- Christian, R. S. and J. L. Gammel (Scattering of protons) 434.
- Chu, Boa-Teh s. Ch.-Ch. Chang 75.
- Chung, K. L. (Loi de probabilité unimodales) 137.
- and M. Kac (Corrections to „Remarks on fluctuations“) 353.
- Cimino, Massimo (Potenziale newtoniano) 314.
- Cini, M. and A. Gamba (Isotopic spin) 439.
- Cinquini, Silvio (Funzioni quasi-periodiche) 309.
- Clagett, Marshall (Elements of Euclid) 241.
- Clark, C. E. (Homologies in normal space) 393.
- R. A. and E. Reissner (Bending of toroidal shells) 189.
- Clement, Paul A. (Convexity and surfaces of negative curvature) 166.
- Clementel, E. (Penetrazione degli elettroni) 442.
- Clemmow, P. C. (Radio propagation) 419.
- and T. B. A. Senior (Fresnel integral) 282.
- Clowes, J. S. and K. A. Hirsch (Groups of infinite matrices) 254.
- Clunie, J. (Integral function) 82.
- Coester, F. (Symmetry of S matrix) 429.
- and J. M. Jauch (Angular correlations) 231.
- Cohen, Eckford (Cubic congruences) 39.
- jr., A. C. (Truncated Pearson frequency distributions) 363.
- Cohn, George I. and Bernard Saltzberg (Non-linear differential equations) 124.
- Richard M. (Singular manifolds of difference polynomials) 30.
- Colladay, G. S. s. D. W. Juenker 450.
- Collar, A. R. s. R. W. Traill-Nash 405.
- Collatz, L. (Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren) 127; (Errore nel problema di Dirichlet) 319; (Instabilität beim Verfahren der zentralen Differenzen) 349.
- Collins, R. E. (Transient heat conduction) 206.
- Colombo, Giuseppe (Optica geometrica) 423.
- Serge (Quelques transcendentes) 104; (Largeur de bande passante) 445.
- Combes, Bernard (Inégalité de Bienaymé) 352.
- Jean (Dérivées des fonctions analytiques. I. II.) 76.
- Conforto, Fabio e Francesco Gherardelli (Superficie ellittiche) 373.
- Conrad, Paul F. (Embedding theorems) 23.
- Conte, Luigi (Trisezione dell'argomento) 242; (Regole di W. Purser) 243.
- Conti, Roberto (Equazioni differenziali ordinarie) 316; (Equazioni integrali lineari) 328.
- Conway, H. D. (Orthotropic plane stress) 186; (Stress distributions) 186.
- Cooke, J. C. (Legendre functions) 73.
- Coolidge, J. L. (Lengths of curves) 1.
- Coomes, E. A. s. D. W. Juenker 450.
- Cooper, J. L. B. (Coordinated linear spaces) 333.
- W. W. s. A. Charnes 368.
- Cooperman, Philip (Method of Trefftz) 127.
- Copson, E. T. (Sound waves) 191.
- Coral, M. s. A. L. Nelson 310.
- Cordes, Heinz Otto (Separation der Variablen) 118.
- Corinaldesi, E. (Measurability in quantum electrodynamics) 222.
- Corput, J. G. van der (Integral of power of e) 292.

- Corrington, M. S. (Two definite integrals) 351.
- Costa de Beauregard, Olivier (Problème de l'irréversibilité) 204.
- Coudere, Paul s. J. Becquerel 217.
- Couteur, K. J. Le s. Le Couteur, K. J. 212.
- Cox, D. R. and W. L. Smith (Superposition of sequences of events) 356.
- J. A. M. and S. R. de Groot (Radiation emitted by ensembles of nuclei) 436.
- — — and H. A. Tolhoek (Gamma radiation) 437.
- — — s. H. A. Tolhoek 436.
- Craggs, J. W. (Shearing of a block) 188.
- — — s. A. R. Mitchell 349.
- Craig, C. C. (Biological populations) 365.
- Creely, Joseph W. (Finite differences) 348.
- Cronin, Jane (Analytic functional mappings) 343.
- Cugiani, Marco (Aritmetica additiva dei polinomi) 266.
- — s. S. Albertoni 339.
- Čunichin, S. A. (Untergruppen einer endlichen Gruppe) 255.
- Cunliffe, A. and R. N. Gould (Inverse perturbation) 221.
- Cunningham, W. J. (Reversion method) 124.
- Currie, Malcolm R. (Degenerate modes in spherical cavity) 188.
- Curtis, M. L. (Deformation-free continua) 171.
- Curtiss, J. H. (Mathematical theory of probability) 135.
- Daboni, Luciano (Capacità elettrostatica di un conduttore) 101.
- Dąbrowski, J. (Successive gamma quanta) 437.
- Dalgarno, A. (Three-body scattering problems) 446.
- Dalkey, Norman (Information patterns) 143.
- Dalla Volta, Vittorio (Calotte deformabili di ipersuperficie) 381; (Superficie possedenti doppio sistema coniugato) 384.
- Dantoni, Giovanni (Superficie e varietà algebriche) 374.
- Dantzig, D. van (Weak law of large numbers) 353.
- Darbo, Gabriele (Continuità di un integrale) 325.
- Davenport, H. and P. Erdős (Quadratic and higher residues) 43.
- Davidenko, D. F. (Numerische Lösung nicht-linearer Gleichungen) 121.
- Davidson, J. P. and E. Feenberg (Spheroidal core nuclear model) 440.
- Davies, Evan T. (Contact transformations) 163.
- H. J. (Irrotational flow of compressible fluid) 412.
- Davis, Philip (Errors of approximation for analytic functions) 130.
- — and Henry Pollak (Linear functionals) 79.
- Dedecker, Paul (Structures locales) 176.
- Dedò, Modesto (Superficie del quarto ordine) 158.
- Dekker, J. C. E. (Maximal dual ideals) 8.
- Delerue, P. (Fonctions hyperbesséliennes) 330.
- Dénes, Peter (Conjecture of Kummer) 264.
- Denjoy, Arnaud (Problème des Souslin. I. II.) 52; (Ordnation des ensembles) 53; (Matrices d'ordination) 53; (Théorèmes „de Janiszewski“) 393.
- Dennis, S. C. R. s. D. N. de G. Allen 407.
- Depken, S. s. B. Bruno 230.
- Deser, Stanley and Paul C. Martin (Meson-nucleon equation) 435.
- Destouches-Aeschlimann, Florence (Dérivée d'un opérateur) 115; (Intégrales opératorielles) 221.
- Detra, Ralph W. (Secondary flow in curved pipes) 409.
- Dexter, D. L. and W. R. Heller (Polarizability of a crystal) 450.
- Dezin, A. A. (Einbettungssätze) 62.
- Dickinson, Alice (Compactness conditions) 391.
- Dienst, Hans-Rudolf (Eindeutigkeitsproblem) 131.
- Dinghas, Alexander (Théorème de Schur) 252; (Mermorphe Funktionen) 304.
- Dingle, R. B. (Anomalous skin effect) 211; (Schrödinger equation for finite systems) 221; (Magnetic properties of metals. V.) 240.
- Dixmier, J. (Formes linéaires sur anneau d'opérateurs) 115; (Inégalité de E. Heinz) 340.
- Dmitriev, A. A. und T. V. Bončkovskaja (Turbulenz in einer Welle) 416.
- Dodd, K. N. (Gaseous accretion) 453.
- Dolbeault, Pierre (Cohomologie des variétés analytiques complexes. I. II.) 177.
- Donth, Hans s. A. Seeger 448.
- Douglis, Avron (Elliptic systems of equations) 319; (Cauchy problems) 319.
- Dowker, Yael Naim (Homeomorphisms) 339.
- Drake jr., Robert M. (Three-dimensional rotationally symmetrical laminar boundary layers) 410.
- Dresher, Melvin (Moment spaces and inequalities) 282.
- — and S. Karlin (Convex games as fixed-points) 142.
- Dresner, Lawrence (Spin-orbit coupling) 438.
- Dressler, R. F. and F. V. Pohle (Resistance effects) 202.
- Dubovickij, A. Ja. (Abbildungen des n -dimensionalen Würfels) 281.
- Dubreil-Jacotin, Marie-Louise (Transformations de Reynolds) 114.
- Dubrovskij, V. M. (Additive Mengenfunktionen) 59.
- Duff, G. F. D. (Limit-cycles) 91.
- Duffin, R. J. (Vibrating plate) 190.
- — — s. R. Bott 251.
- Dufresnoy, Jacques et Charles Pisot (Problème de M. Siegel) 264.
- Dumoré, J. M. s. J. Schenk 416.
- Duncan, D. B. (Random inputs) 185.
- — G. s. R. M. Thrall 26.
- W. J. (Linear differential equations with variable

- coefficients) 315; (Physical similarity) 398.
- Dungen, Frans H. van den (Intégration numérique) 125.
- Dungey, J. W. (Astrophysical systems) 453.
- Dunne, John s. R. Otter 141.
- Duparc, H. J. A. and W. Peremans (Representations of positive integers) 269.
- — — — and A. van Wijn-gaarden (Fermat's last theorem) 266.
- Durand, Émile (Équations de Maxwell) 206; (Trajectoire électronique) 212; (Principe de Huygens) 221.
- Dürbaum, Hansjürgen (Nicht-kommutative Bewertungen) 264.
- — s. H.-J. Kowalsky 35.
- Dutka, Jacques (Spinoza and probability) 243.
- Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Wolfowitz (Sequential decision problems) 148.
- Dwyer, Paul S. and Frederick V. Waugh (Matrix inversion) 347.
- Dye, H. A. (Rings of operators) 114.
- Dynkin, E. B. (Kompakte Liesche Gruppen) 25.
- Džanelidze, G. Ju. (Gleichungen der Elastizitätstheorie) 185.
- Dzjadyk, V. K. (Beste Annäherung) 71.
- Dzung, L. S. (Fluid mechanics) 413.
- Eckmann, Beno (Complexes with operators) 172.
- — — — and A. Schopf (Injektive Moduln) 259.
- Eden, R. J. (Bound states. IV.) 430.
- — — — and G. Rickayzen (Bound states. III.) 224.
- Eder, Gernot (Spin-Bahn-Kopplung) 439.
- Edmonds, A. R. (Nuclear binding energies) 437.
- Edmundson, H. P. (Monte Carlo matrix inversion) 130.
- Edrei, Albert (Generating function) 79.
- Edwards, David F. s. A. E. S. Green 439.
- R. E. (Radon measures) 57; (Convex spans) 336.
- Efremovič, V. A. und A. S. Swarc (Uniforme Räume) 170.
- Eggleston, H. G. (Closest packing) 58; (Cartesian product sets) 58; (Uniform convergence) 63; (Triangles as extremal convex curves) 166; (Plane convex sets) 166.
- Egorov, D. (Luzins Dissertation) 73.
- Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane (Acyclic models) 172; (Groups $H(\pi, n)$) 393.
- — — J. A. Zilber (Products of complexes) 173.
- Einstein, Albert (Meaning of relativity) 212; (Unified field theory) 217.
- Éjdus, D. M. (Betrag von Eigenfunktionen) 320.
- Elbert, Donna S. C. Chandrasekhar 351.
- Elkin, Jack M. (Proportions of two classes) 363.
- Elliott, H. Margaret (Approximation to analytic functions) 76.
- J. P. (Nuclear structure. V.) 441.
- Ellis D. (Orbital topologies) 168; (Isotopies) 252.
- Elrod, Harold s. I. M. Krieger 198.
- Elton, L. R. B. (Scattering of electrons) 434.
- — — — and K. Parker (Scattering of positrons) 228.
- Emersleben, O. (Zahlentheoretische Abschätzungen) 346; (Restglied der Gitterenergieentwicklung) 448.
- Engel, A. von s. G. Francis 235.
- Epstein, Saul T. (Quantum mechanics) 219.
- Erdős, P. (Conjecture of Hammersley) 270.
- — — — and C. A. Rogers (Covering of n -dimensional space) 389.
- — — — s. H. Davenport 43.
- Eriksen, J. L. (Propagation of waves) 190.
- Erskine, G. A. and M. J. Seaton (Equation in scattering theory) 227.
- Escande, Léopold et Roger Huron (Stabilité des oscillations) 406.
- Espagnat, Bernard d' (Diffusion π -nukleon) 442.
- Est, W. T. van (Theorem of A. Mullikin) 171; (Endliche Gruppen) 256.
- Estrin, Gerald (Electronic computer) 351.
- Euranto, Erkki K. s. K. V. Laurikainen 427.
- Evans, Arwel (Tauberian theorems) 67.
- D. A. (Contagious distributions in ecology) 365.
- Elisabetta e Franco Pellegrino (Regioni funzionali lineari) 336.
- Robert L. (Linear ordinary differential equations) 89.
- Trevor (Embeddability and word problem) 28.
- — — — and B. H. Neumann (Groupoids and loops) 17.
- Walter H. (Electrical transients) 417.
- Evelt, Arthur A. and Henry Margenau (Hydrogen molecules) 235.
- Evgrafov, M. A. (Satz von Perron) 92.
- Ewing, G. M. and W. R. Utz (Functional equation $f^n(x) = f(x)$) 120.
- Eyraud, Henri (Définition de la probabilité) 352.
- Eyring, H. s. C. J. Thorne 134.
- Ezrochi, J. A. und T. G. Ezrochi (Lineare Differentialgleichungen) 87.
- T. G. s. J. A. Ezrochi 87.
- Fabre de la Ripelle, Michel (Perturbation. II.) 427.
- Faedo, Sandro (Metodi di Ritz) 128.
- Fage, M. K. (Einflußfunktionen) 87.
- Fain, Bill W. (Infinite numerical series) 68.
- Fan, Ky (Minimax theorems) 65.
- Fano, U. (Nuclear states) 436.
- Fantappiè, Luigi (Funzioni „para-analitiche“) 336; (Operatori funzionali) 336.
- Farahat, H. (Symmetric group) 25.
- Fáry, István (Anneaux spectraux) 176.
- Feather, N. (Binding energies) 227; (Discussions of shell model of nucleus) 439.
- Federhofer, K. (Biegungsschwingungen) 405.

- Fedorov, V. S. (Hyperkomplexe Funktionen) 309.
- Feenberg, E. s. J. P. Davidson 440.
- Feldman, David (Charge independence of nuclear forces) 226.
- Feller, William (Semigroups of transformations) 116; (Semigroups of linear operators) 342.
- Felsen, L. B. and N. Marcuvitz (Slot coupling of wave guides) 418.
- Fenyő, I. (Integralgleichungen) 328.
- Féret, Joseph Kampé de, s. Kampé de Féret, Joseph 26, 96, 203.
- Ferigle, Salvador M. and Alfons Weber (Eckart conditions) 235.
- Fermi, E. (Pion proton scattering) 436.
- Ferrari, F. (Excitation energy) 439.
- Ferri, Antonio, Nathan Ness and Thaddeus T. Kapitla (Supersonic flow) 415.
- Fet, A. I. (Topologische Eigenschaften und Anzahl der Extremalen) 327; (Anzahl der Extremalen auf Mannigfaltigkeit) 327.
- Fett, Gilbert H. s. Ch. L. Kang 89.
- Feys, R. (Formalisation) 3.
- Fieschi, R. s. B. R. A. Nijboer 236.
- Filin, A. P. (Überzählige Unbekannte in Stabsystemen) 184.
- Finetti, Bruno de („Dispersione“) 352.
- Finney, D. J. (Statistical science in agriculture) 145.
- Flammer, Carson (Variational methods for periodic lattices and artificial dielectrics) 238; (Diffraction of electromagnetic waves. I. II.) 421.
- Flanders, Harley (Norm function) 34; (Theorem of Ankeny and Rogers) 264.
- Flathe, Herbert (Approximation analytischer Funktionen) 77.
- Flax, A. H. (Lifting surfaces in compressible flow) 201; (Wing-body interference) 408.
- Fleckenstein, J. O. (Cas d'exception au théorème de Laplace) 452.
- Fleischer, Isidore (Corps topologiques) 264.
- Flint, H. T. und E. Marjorie Williamson (Quantentheorie, Gravitation und Elektromagnetismus) 218.
- Flood, Merrill M. (Hitchcock distribution problem) 368.
- Florek, K., E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski (Poisson stochastic process. I.) 139.
- Florian, A. (Erzeugung von Mesonen) 228.
- Fodor, G. (Verallgemeinerte Kontinuums-hypothese) 52.
- Fog, David (Contingency tables) 362.
- Folley, K. W. s. A. L. Nelson 310.
- Föllinger, Otto (Ebene Variationsprobleme) 326.
- Föppl, Ludwig (Mittelwertsatz der Elastizitätstheorie) 186.
- Forster, Herbert (Randwertaufgabe) 94.
- Forsythe, George E. (Algebraic equations) 346.
- Fort, Tomlinson (Summability of series) 284.
- Fortet, Robert et Edith Mourier (Répartition empirique) 137.
- Foster, F. G. and I. J. Good (Pólya's random-walk theorem) 139.
- Foulkes, H. O. (Matrix differentiation) 15.
- J. (Minimum weight design) 190.
- Fourès-Bruhat, Yvonne (Distributions sur multiplinités) 339.
- Fourgeaud, Claude (Probabilité conditionnelle) 138.
- Fowler, G. N. and G. M. D. B. Jones (Ionization loss) 433.
- Fox, L. (Finite-difference equations) 123.
- and E. T. Goodwin (Numerical solution of integral equations) 129.
- Ralph H. (Free differential calculus. I.) 256.
- Fraenkel, Abraham A. (Set theory) 49.
- L. E. (Equation of super-sonic flow) 414.
- Fragstein, C. v. und Cl. Schaefer (Strahlversetzung bei Reflexion) 423.
- Frajese, Attilio (Costruzioni e postulati in Euclide) 241.
- Frame, J. S. (Continued fraction) 347.
- Francia, Giuliano Toraldo di s. Toraldo di Francia, Giuliano 418.
- Francis, G. and A. von Engel (High-frequency electrodeless discharge) 235.
- Franklin, Philip (Calculus) 277.
- Franz, Walter (Modell, Anschauung und Wirklichkeit) 3.
- Fraser, D. A. S. (Nonparametric tolerance regions) 146; (Hit probabilities. II.) 356.
- P. A. s. R. W. Nicholls 446.
- Fréchet, Maurice (E. Borel) 2; (Fonctions para-analytiques) 86; (Commentary on notes of E. Borel) 140; (Fonctions para-analytiques) 308; (Analyse générale) 332.
- Frehner, Hedi e Franco Pellegrino (Regioni funzionali lineari) 336.
- Frei, M. (Équation différentielle linéaire) 89.
- Frenkel, Jean (Espaces fibrés analytiques) 177.
- Freudenthal, H. (Enden) 170; (Vollständige Induktion) 242.
- Friedlander, F. G. (Bowed string) 190.
- Friedman, Bernard s. S. Borowitz 229.
- M. B. s. H. F. Ludloff 415.
- Fries, Walter (Fachwerk und Rahmenwerk) 184.
- Fröman, Per Olof (Spin and isotopes) 434.
- Frönsdal, Christian and Aadne Ore (Three-particle Coulomb problems) 446.
- Fuchs, L. (Basis theorem) 257.
- Fulks, W. (Heat equation) 318.
- Fuller, F. B. (Periodic points) 172.
- Fulton, C. M. (Approach to non-Euclidean geometries) 370.
- Fung, Y. C. (Bending of thin plates) 402.
- Funk, Paul, Hans Sagan und Franz Selig (Laplace-Transformation) 329.

- G. Allen, D. N. de s. Allen, D. N. de G. 407.
- Gacsályi, S. (Abelian groups) 12.
- Gaddum, Jerry W. (Metric methods in integral geometry) 164.
- Gaeta, Frederico (Varietà matriciali) 374.
- Gagua, M. B. (Satz von Hardy und Littlewood) 76.
- Gaier, Dieter (Schlichte Potenzreihen) 78; (Indexverschiebung beim Borel-Verfahren) 284.
- Gál, I. S. (Condensation of singularities) 110.
- Gale, David (n -person games) 140.
- and F. M. Stewart (Infinite games) 143.
- Gallarati, Dionisio (Numero dei complessi algebrici) 376.
- Gamba, A. s. M. Cini 439.
- Gammel, J. L. s. R. S. Christian 434.
- Gantmacher, F. R. (Theorie der Matrizen) 248.
- Ganzhorn, K. (Übergangsmetall-Strukturen) 239.
- Gaponov, A. V. (Elektrische Maschinen) 209.
- Garabedian, P. R. and M. Schiffer (Variational problem) 100.
- García Pradillo, Julio (Limes einer Doppelfolge) 65.
- Gardner, J. W. (Energy selection) 442.
- Garnier, René (Systèmes différentiels) 92.
- Garza, A. de la (Approximate solutions of linear algebraic equations) 347.
- Gasapina, Umberto (Teorema limite) 354.
- Gaschütz, Wolfgang (Φ -Untergruppe) 22.
- Gauthier, Luc (Rette di S_4) 376.
- Gautier, Pierre (Systèmes centrés de l'optique électronique) 426.
- Gautschi, Werner (Powers of matrices) 251.
- Gedizli, H. S. (Kreisplatte auf elastischer Unterlage) 187.
- Géhéniau, Jules et Claudine Liesse (Couplage spin-orbite) 433.
- Geidel, Hans (Versuchsergebnisse mit Varianzanalyse) 146; (Beispiel von A. Linder) 146.
- Geiringer, Hilda (Mendelsche Genetik) 365.
- Gelfond, O. A. und I. M. Kubenskaja (Satz von Perron) 92.
- Gell-Mann, Murray and Valentine L. Telegdi (Nuclear reactions) 442.
- Geltman, Sidney (Mobility of helium molecular ions) 447.
- Georgiev, G. (Diophantische Gleichung) 38.
- Gerber, Robert (Travail de M. Miche) 196.
- Gericke, Helmuth (Algebraische Struktur) 259.
- Gerjuoy, E. ((d, p) and (d, n) reactions) 443.
- Germay, R. H. (Intégrales régulières) 315; (Méthode des fonctions majorantes) 327.
- Geronimus, Ja. L. (Abschätzungen für Polynome) 70; (Annäherungen im Mittel) 71.
- Gerritsen, A. N. s. J. Korringa 451.
- Gerstenhaber, Murray (Theorem of Haupt and Wirtinger) 85.
- Geymonat, Ludovico (Spazi astratti) 244.
- Gherardelli, Francesco s. F. Conforto 373.
- Ghizzetti, Aldo (Problema di Dirichlet) 323.
- Gifford jr., P. W. (Theory of specialized space curves) 159.
- Gilet, P. M. and G. S. Watson (Graphical square intercomparisons) 357.
- Gillies, D. B. (Symmetric n -person games) 144.
- — J. P. Mayberry and J. von Neumann (Variants of poker) 141.
- Ginsburg, Seymour (Sets and elements) 51; (Real-valued functions) 279.
- Girault, Maurice (Théorème de M. Khintchine) 353.
- Glaser, W. („Wellenpaket“ in Elektronenlinse) 424.
- — und Peter Schiske (Elektronenoptische Abbildung. I. II.) 425.
- Wladimir und Wolfhart Zimmermann (Gebundene Zustände in der Feldtheorie) 224.
- Glauber, Roy and Verner Schomaker (Electron diffraction) 232.
- Glauber, R. J. (Gauge invariance) 433.
- Glauber, A. E. (Verteilung der Moleküle) 235.
- Glaubman, Michael J. (Even-even nuclei. I.) 438.
- Glicksberg, I. and O. Gross (Games over the square) 143.
- — s. R. Bellman 368.
- Gloden, A. (Diophantine equations) 36; (Multigrade analysis) 36; (Congruences) 36.
- Gnanados, A. A. (Recurring series) 296.
- Godeaux, L. (Quartiques gauches rationnelles) 158; (Transformations birationnelles) 371; (Involutions cycliques) 372; (Faisceau de surfaces desmiques) 373; (Éléments associés aux points d'une surface) 383; (Enveloppe des quadriques de Lie) 384; (Surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin) 384.
- Goffman, Casper (Lebesgue integral) 59; (Measurable transformations) 281; (Variation of means) 359.
- Gol'berg, P. A. (Sylowbasen) 18.
- Goldberg, Joshua N. (Strong conservation laws) 217.
- Karl (Wilson quotients) 267.
- Goldhaber, J. K. (Linear mappings of algebras) 31.
- Goldie, A. W. s. F. F. Bonsall 111.
- Goldstein, Louis (Liquid helium II.) 236.
- Golub, Abraham (Designing inspection plans) 360.
- Gomes, A. Pereira s. Pereira Gomes, A. 169, 193.
- Good, I. J. s. F. G. Foster 139.
- jr., R. H. (WKB method) 221.
- — — — s. S. C. Miller jr. 221.
- Goodman, Leo A. (Population size problems) 148; (Improving estimators) 149.
- Theodore R. (Oscillating wing) 193.
- Goodwin, E. T. s. L. Fox 129.
- Goormaghtigh, R. (Isopôle) 152.

- Görtler, Henry (Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus) 349.
- Gould, R. N. s. A. Cunliffe 221.
- Gradštein, I. S. (Theorie der Stabilität von A. M. Ljapunov) 91; (Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei den Ableitungen) 316.
- Graf, Heinrich, (S. Finsterwalder) 2.
- Ulrich und Hans-Joachim Henning (Mathematische Statistik) 357.
- Graffi, Dario (Dinamica dei fluidi compressibili) 196.
- Gran Olsson, R. (Reynolds number) 410.
- Graves, Ross E. (Functionals of finite degree) 113.
- Grawert, Gerald (Physikalische Aussagen) 426.
- Gray jr., H. J., M. Rubinoff and H. Sohön (Rigid body problem) 133.
- Graybill, Franklin A. (Variance components) 364.
- Grazia, Alfred de (Election system) 243.
- Green, Alex E. S. and David F. Edwards (Nuclear mass surface) 439.
- A. E. and E. W. Wilkes (Extension and torsion of a cylinder) 403.
- C. D. s. D. ter Haar 204.
- H. S. (Boltzmann's equation) 205; (Meson wave equations) 222.
- John W. ($f'(x) = f(x + a)$) 92; (Curves encircling a cylinder) 164; (Convex curve under affine transformation) 387.
- Louis C., Marjorie M. Mulder and Paul C. Milner (Correlation energy of HeI) 234.
- Gregory, Christopher (Conservation of quanta) 225; (Conservation equations) 225.
- Grib, A. A. (Euler-Darboux'sche Gleichung) 318.
- Grilickij, D. V. (Kompression zweier Körper) 404.
- Grinberg, G. A., N. N. Lebedev und Ja. S. Ufljand (Allgemeines biharmonisches Problem) 125.
- Grioli, Giuseppe (Equilibrio elastico) 399.
- Griselle, Thomas (Fermat's last theorem) 39.
- Gronow, D. G. C. (Non-normality in t -tests) 361.
- Groot, S. R. de s. J. A. M. Cox 436.
- Grosjean, Carl C. (Non-isotropic random flight problem) 139.
- Gross, Oliver s. R. Bellman 368.
- — s. I. Glicksberg 143.
- Grosswald, Emil (Sums involving binomial coefficients) 9.
- Grotemeyer, K. P. (Verbiegung konvexer Flächen) 160, 380; (Verbiegung von Halbeiflächen) 380.
- Grothendieck, A. (Applications linéaires faiblement compactes) 109.
- Groves, Willice E. (Transmission of electromagnetic waves) 210.
- Gruenberg, K. W. (Engel groups) 19.
- Gruenberger, F. s. J. Hollingsworth 133.
- Guazzone, Stefano (Quadrache che appartengono alle forme generali) 376.
- Guest, P. G. (Fitting of polynomials) 365.
- Gugenheim, V. K. A. M. (Piece-wise linear isotopy. I. II.) 179.
- Gunn, J. C. (Production of mesons) 228.
- Gupta, Suraj N. (Quantum electrodynamics) 224.
- Guptill, Ernest W. (Piston source) 190.
- Gurari, M. (Self energy of slow electrons) 238.
- Gusejn-Zade, M. A. (Strömung einer Flüssigkeit mit Unterschallgeschwindigkeit) 193.
- Gustin, William (Partitioning an interval) 40; (Isoperimetric minimax) 387.
- Güttinger, Werner (Quantum field theory) 223.
- Guy, Jean s. J. Tillieu 234.
- Gyires, B. (Determinantensatz von J. Hunyady) 249.
- Haag, Rudolf (Objektivierbarkeit der Zustände) 219.
- Haar, D. ter (Isotherms of an imperfect gas) 236; (Ferromagnet, III.) 452.
- Haar, D. ter and C. D. Green (Boltzmann's H -theorem) 204.
- Hadlock, E. H. s. B. W. Jones 273.
- Hadwiger, H. (Isoperimetrische Ungleichung) 388.
- Hall, James S. (Mersenne numbers) 268.
- jr., Marshall (Subgroups of free products) 20; (Equations $y^2 = x^3 - k$) 37.
- Halmos, Paul R., Günter Lumer and Juan J. Schäffer (Square roots of operators) 340.
- Halperin, I. and H. Nakano (Generalized l^p spaces) 334.
- Halpern, O. and G. L. Appleton (Scattering of slow neutrons) 434.
- Hamel, Georg (Dünne Platten) 401.
- Hamill, Christine M. (Collineation group) 23.
- Hamilton, J. (Steady states and S -matrix) 430.
- Hämisch, Werner (Hauptnorm als Determinante) 31.
- Hammersley, J. M. (Non-harmonic Fourier series) 291.
- Hampikian, Aram (Trajectoires dans les lentilles électroniques) 212.
- Hancock, G. J. (Selfpropulsion of microscopic organisms) 193.
- Hanner, Olof (Was ist Topologie? II.) 167.
- Hara, Osamu and Haruo Shimazu (Non-local field. II.) 431.
- Härm, Richard s. L. Spitzer jr. 235.
- Harrington, Roger F. (Current element) 420.
- Harris, Edward G. and Michel A. Melkanoff (Quadrupole moment of Li^7) 234.
- Hartley, H. O., S. S. Shrikhande and W. B. Taylor (Block designs) 146.
- Hartman, Philip (Derivatives of solutions of differential equations) 87; (Spectra of operators) 118.
- — and Aurel Wintner (Sine series) 72; (Curvatures of a surface) 159; (Envelopes and discriminant curves) 159; (Inverse of differential operator) 318; (Third fundamental

- form of a surface) 378; (Parametrizations) 378.
- Hartman, S. (Gitterpunktverteilung) 275.
- Hasse, H. (Mathematik als Geisteswissenschaft) 3.
- Hatfield, C. s. R. H. Cameron 338.
- Haupt, Otto und Christian Y. Pauc (Halobedingungen von Somensystemen) 278.
- Havas, Peter (Equations of motion, II.) 428.
- — s. C. Mehl 428.
- Hawley, N. S. (Holomorphic curvature) 162.
- Hayashi, Chihiro (Forced oscillations) 185.
- Haynsworth, Emilie V. (Determinants) 249.
- Head, A. K. (Fatigue cracks) 448; (Edge dislocations) 449.
- Heikes, R. R. s. C. Zener 238.
- Heisenberg, W. (Kosmische Strahlung) 444.
- Heller, W. R. s. D. L. Dexter 450.
- jr., S. R. (Bending with shear) 188.
- Hellund, E. J. (Resonance radiation) 233.
- Helson, Henry s. A. Beurling 330.
- Henderson, A. s. A. Charnes 368.
- John S. (Marginal productivity analysis) 151.
- Henkin, Leon (Modern algebra and mathematical logic) 6.
- Henley, E. M. and M. A. Ruderma (Meson-nucleon scattering) 228.
- Henning, Hans-Joachim s. U. Graf 357.
- Henriksen, Melvin (Rings of entire functions) 303.
- Hermes, H. (Axiomatisabilité) 3.
- Herrmann, Horst (Projektive Konfigurationen) 156.
- Johann und Theodor Sexl (Radioaktive α -Emission) 439.
- Herschel, R. s. I. G. Petrovskij 102.
- Herstein, I. N. (Theorem of Jacobson, II.) 29; (Division rings) 30.
- — — John Milnor (Measurable utility) 367.
- — — s. S. Chowla 256.
- Herz, Jean-Claude (Pseudoalgèbres de Lie, I. II.) 32.
- Herzog, Fritz and George Piranian (Taylor series, II.) 78.
- Higman, Graham (Problem of Takahasi) 20.
- — and B. H. Neumann (Groups as groupoids) 253.
- Hilbert, D. (Lineare Integralgleichungen) 102.
- Hill, David Lawrence and John Archibald Wheeler (Nuclear constitution) 440.
- Hille, Einar (Problème de Cauchy) 344.
- Hinteregger, H. (Induktionserscheinungen bei Materiebewegung, II.) 208.
- Hintikka, K. Jaakko J. (Distributive normal forms) 246.
- Hirsch, K. A. s. J. S. Clowes 254.
- Hirschman jr., I. I. (Differential equations which generalize heat equation) 96; (Fractional integration) 291.
- Hitchcock, A. J. M. (i - j coupling model) 437.
- Hittmair, O. (Kernspinbestimmung) 442; (Winkelverteilung von Kernreaktionen) 442.
- Hlavatý, Václav (Basic principles of unified theory of relativity, B.) 218.
- Hochschild, G. and J.-P. Serre (Cohomology of group extensions) 21.
- Hodge, W. V. D. (É. Cartan) 2; (G. Castelnuovo) 2.
- jr., P. G. (Plastic strains in slabs) 190.
- Hodges jr., J. L. and M. Rosenblatt (Recurrence-time moments) 354.
- — — s. K. A. Brownlee 360.
- Hoeffding, Wassily (Distribution of expected values) 136; (Average sample number of sequential test) 147.
- Hoffmann, Banesh (Relativity of size) 216; (Similarity theory of relativity, I.) 216; (II.) 428.
- Höfner, E. (Laplacesche Differentialgleichung) 89.
- Hofmann, Jos. E. (Parabel- und Hyperbelquadratur) 1.
- Hofreiter, Nikolaus (Komplexe Zahlen) 276.
- Hollingsworth, J. and F. Gruenberger (Square root on 602 A) 133.
- Homilius, J. (Elektronenzustände kubischer Kristalle) 449.
- Homma, Tatsuo and Hidetaka Terasaka (Plane translation of Brouwer) 178.
- Hopmann, W. s. H. Billing 132.
- Hoppe, Walter, s. V. Caimann 132.
- Hori, Shoichi (Two-body problem) 224.
- Horn, Alfred (Normal completion of a subset of a complete lattice) 168.
- Horner, Walter W. (Magic squares) 36.
- Hornich, Hans (Partielle Differentialgleichungen) 317.
- Horsnell, G. (Unequal group variances on F -test) 362.
- Horton, G. K. and R. T. Sharp (Approximate wave functions) 221.
- Horváth, J. (Primzahlen, III.) 36; (Fonctions conjuguées) 105.
- Horvay, G. (End problem of rectangular strips) 186.
- Hosemann, R. und S. N. Bagchi (Algebra physikalisch beobachtbarer Funktionen) 399.
- Houston, J. M. s. R. E. Burgess 239.
- Houthakker, H. S. s. J. A. C. Brown 351.
- Hove, Léon van (Elastic frequency distribution) 236.
- Howard, Louis N. and J. Samuel Smart (Antiferromagnets and ferrites) 451.
- Howarth, D. J. and E. H. Sondheimer (Electronic conduction in polar semiconductors) 450.
- Hu, Sze-Tsen (Cohomology relations) 176.
- Hua, Loo-Keng (Chua, Lo Ken) (Semihomomorphismen von Ringen) 260.
- Huber, A. (Berechnung von Polynomen) 350.
- H. (Abbildungen Riemannscher Flächen) 84.
- Hufford, George A. (Wave propagation) 422.
- Huggins, Mary T. s. P. F. Byrd 413.

- Hughes, J. V. (Motions of a sphere suspended on a string) 184.
- Hukuhara, Masuo (Théorème de Kneser) 317.
- Hull, M. H. s. G. Breit 226.
- Hum, D. M. s. D. G. Bell 238.
- Humbert, Pierre (Fonction de Mittag-Leffler) 104; (Fonctions de Bessel) 292.
- Huppert, Bertram (Produkt zyklischer Gruppen) 256.
- Huron, Roger s. L. Escande 406.
- Husimi, Kôdi (Quantum mechanics. I. II.) 220.
- Huth, J. H. (Thermal stresses) 403.
- Ibragimov, I. I. (Beste Annäherung von Funktionen) 290; (Beste Annäherung im Mittel) 290.
- Iglisch, Rudolf (Strömung in laminarer Grenzschicht) 196.
- und Horst Tietz (Starrer Körper) 184.
- Iha, P. (Curves) 378.
- Ikenberry, Ernest s. D. J. Bedsin 417.
- Iliev, Ljubomir (Fabersche Polynome) 297.
- Illingworth, C. R. (Laminar boundary layer) 197.
- Imamura, Tsutomu s. R. Utiyama 429.
- Infeld, L. (Coordinate conditions) 215.
- Inglada, Vicente (Related triangles) 152.
- Ingleson, A. W. (Lorentz transformation) 212.
- Ingraham, R. L. (Spinor relativity) 218.
- Innes, Frederick R. (Spin-spin interaction) 445.
- Inonu, E. and E. P. Wigner (Contraction of groups) 26.
- Inozemcev, O. I. (Beste Annäherung) 289.
- Irving, J. (Effect of the tensor force) 226.
- Irwin, J. O. („Transition probabilities“) 353.
- Isaacs, G. L. (Riesz's mean value théorème) 59; (Laplace integrals) 329.
- Rufus (Horse race bets) 356.
- Iséki, Kiyosi (Demi-groupes) 17; (Lattice theory) 27; (Conjugate mapping for quaternions) 35; (B^* -algebras) 110; (Anneaux normés de Hilbert. I.) 110.
- Itô, Motô s. S. Tanaka 230.
- Ivanov, V. V. s. S. Ja. Al'per 296.
- Iverson, K. E. (Partial sums of e^n) 351.
- Iwadore, Junji (Nuclear interaction and high energy nucleon-nucleon scattering) 442.
- Iwata, Giiti (Contact transformations. II.) 425.
- Iyer, P. V. Krishna s. Krishna Iyer, P. V. 361.
- Jackson, Frederick H. (Summability matrices) 66.
- L. K. s. E. F. Beckenbach 101.
- Jacobsthal, Ernst (Arithmetische und geometrische Mittel. II.) 288; (Simultane Differentialgleichungen) 315.
- Jaekel, K. (Weissingersche Zirkulationsgleichung) 192.
- Jancel, Raymond s. Th. Kahan 238.
- Jankus, V. Z. (Collision loss of heavy particles) 227.
- Jánossy, L. (Lorentz-Transformation) 212; (Teilchen-Wellen-Problem) 219.
- Jarmain, W. R. s. R. W. Nicholls 446.
- Jarovskij, B. M. s. L. A. Vajnštejn 233.
- Jastrow, Robert (Nucleon-nucleon interaction) 441.
- Jauch, J. M. s. F. Coester 231.
- Jean, Maurice et Jean Ratier (Potentiel des trois corps) 441.
- Jeffreys, Sir Harold (Halving the interval in a table) 130; (Figures of rotating planets) 452.
- Jenkins, J. s. M. Morse 85.
- A. (Univalent functions) 83.
- Jensen, J. Hans D. s. C. Morette De Witt 427.
- Johnson, Edgar G. and Alfred O. Nier (Electromagnetic lenses) 212.
- V. A. and F. M. Shipley (Adiabatic Hall effect) 451.
- jr., C. Peter (Unified field theory) 217.
- Johnson jr., James H. and Robert G. Noel (Critical bending stress for flat rectangular plates) 403.
- Jonas, Hans (W -Kongruenzen) 161; (Biegungseigenschaften) 380.
- Jones, B. W. (Correction) 47.
- — and E. H. Hadlock (Ternary indefinite quadratic genera) 273.
- D. S. (Diffraction) 421.
- G. M. D. B. s. G. N. Fowler 433.
- Howard L. (Weighted sample values) 359.
- Jordan, Hermann L. (Lokalisierbarkeit von Wechselwirkungen) 431.
- Jowett, G. H. and J. F. Scott (Serial and spatial correlations) 357.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 104, 107, 116, 298.
- Juenker, D. W., G. S. Colladay and E. A. Coomes (Highly refractory metals) 450.
- Juhos, Béla v. (Wahrscheinlichkeitsschlüsse) 134.
- Jung, H. (Nichtlineare Elastizitätstheorie) 400.
- Jurén, L. s. H. Wold 368.
- Jurkat, Wolfgang (Riesz'sche Mittel) 66.
- — und Alexander Peyersimhoff (Summierbarkeitsfaktoren) 67.
- Juščenko, O. A. (Verbiegungen einer Membran) 403.
- Kac, M. s. K. L. Chung 353.
- Kačanov, L. M. (Elastoplastisches Gleichgewicht eines Balkens) 189.
- Kacelenbaum, B. Z. (Wellenleiter) 418.
- Kadec, M. I. (Vektorpolygone) 65.
- Kahan, Théo (Collisions et diffraction) 227.
- — et Raymond Jancel (Tenseur de conductivité) 238.
- Kahane, Jean-Pierre (Quasi-analyticité des fonctions) 64.
- Kales, M. L. (Modes in wave guides) 417.
- Källén, Gunnar (Magnitude of renormalization) 430.
- Kamat, A. R. (Multivariate normal distribution) 358;

- (Successive difference and root mean square) 358.
- Kampé de Fériet, Joseph (Autocorrélation et spectre quadratique) 26; (Equation de la chaleur) 96.
- — — and J. Kotik (Surface waves) 203.
- Kanazawa, Hideo, Shoichiro Koide and Tamazi Noguchi (Lattice vibration) 449.
- Kang, Chi Lung and Gilbert H. Fett (Metrization of phase space) 89.
- Kanold, Hans-Joachim (Befreundete Zahlen. I.) 41.
- Kaplan, H. s. F. Keffer 239.
- Kaplansky, Irving (Normal operators) 341.
- Kaplitza, Thaddeus T. s. A. Ferri 415.
- Kappos, Demetrios A. (Maßverbände) 57.
- Kapuano, Isaac (Surfaces homéomorphes à un disque) 392.
- Karal, F. C. (Motion of a sphere) 192.
- Karaseva, T. M. (Inverses Sturm-Liouvillesches Problem) 88.
- Karlin, Samuel (Reduction of games to integral equations) 142; (Class of games) 143.
- — s. M. Drescher 142.
- Karol, I. L. (Randwertproblem für Gleichung von elliptisch-hyperbolischem Typus) 94; (Gleichungen vom gemischten Typus) 320.
- Karplus, Robert, Margaret Kivelson and Paul C. Martin (Meson-nucleon scattering) 435.
- Kasuya, Tadao (Damped oscillation) 448.
- Kathirgamatamby, N. (Poisson index of dispersion) 359.
- Kato, Tosio (Perturbation theory) 345.
- Katz, Leo (Confidence intervals) 363.
- — and Ingram Olkin (Matrices defined by pseudo-transposition) 250.
- Keffer, F., H. Kaplan and Y. Yafet (Spin waves) 239.
- Keilson, Julian (Dielectric relaxation) 450.
- Keldyš, L. V. und P. S. Novikov (Deskriptive Mengenlehre) 55.
- Keller, Joseph B. (Interpretation of quantum theory) 219.
- Kelley, J. L. and R. L. Vaught (Positive cone in Banach algebras) 110.
- Kelly, J. B. (Factorization of polynomials) 252.
- Kemphorne, O. (Experimental designs) 146.
- Kennard, E. H. (Shell theory) 188.
- Kerr, E. (Positive harmonic functions) 101.
- — s. A. C. Allen 101.
- Kertész, A. and T. Szele (Distance of two lines) 155.
- Ketskeméty, I. (Verallgemeinerte Kontinuumhypothese) 52.
- Kiefer, J. (Wald's complete class theorems) 140; (Sequential minimax search) 357.
- — s. A. Dvoretzky 148.
- Kilmister, C. W. (Milner's E-numbers) 377.
- — — s. G. Stephenson 217.
- Kilpi, Yrjö (Transformationen im Hilbertschen Raum) 341.
- Kim, E. I. (Integralgleichungen erster Art) 328.
- Kimball, Bradford F. (Multiple group least squares' problem) 364; (Orthogonal predictors) 364.
- Kimpara, Makoto (Théorème de Gauss-Bonnet) 383.
- King, Ronold (Hallén's integral equation) 210.
- R. W. and D. C. Peaslee (Odd-odd spins) 438.
- Kirste, L. (Vertormung einer dünnen Platte) 402.
- Kitano, Yosiharu and Huzio Nakano (Electron assembly and lattice waves) 450.
- Kitkin, P. A. (Flutamplitude) 416.
- Kivelson, Margaret s. R. Karplus 435.
- Klamkin, M. S. (Clairaut's differential equation) 93.
- Klee jr., V. L. (Convex sets. III.) 109; (Critical set of convex body) 166; (Convex bodies) 332.
- Klein, Abraham (Adiabatic nuclear potential) 441.
- G. et I. Prigogine (Phénomènes irréversibles. II.) 204.
- Klein-Barmen, Fritz (Operative und Assoziative) 16.
- Kleiner, W. H. (Orbital effect) 228.
- Kleinfeld, Erwin (Simple alternative rings) 28.
- Klemens, P. G. (Electronic thermal conduction) 239.
- Klemperer, O. (Electron optics) 424.
- Klingenberg, Wilhelm (Ordinamenti di un corpo) 262.
- Kneser, Martin (Norm einer Algebra) 31; (Primpolynomzerlegung) 33.
- — und Dieter Puppe (Quadratische Formen von Knoten) 398.
- Knight, A. J. (Surfaces with cyclic intersection groups) 372; (Overlapped surfaces) 372.
- Kober, H. (Quasi-decimals) 277; (Zeta functions) 299.
- Kochendörfer, Albert s. A. Seeger 448.
- Koecher, Max (Thetareihen) 45.
- Koehler, Fulton (Errors in Rayleigh-Ritz method) 128.
- Koenigsberg, Ernest (Conductivity of thin films) 450.
- Kofoed-Hansen, O. s. A. Winther 230.
- Kofink, W. und Th. Vollmer (Verdichtungsstoß in Luft) 415.
- Kohler, Max (Erhaltungssätze der Energie. II.) 214; (Feldgleichungen) 215.
- Koide, Shoichiro s. H. Kanazawa 449.
- Koller, Siegfried (Graphische Tafeln) 145.
- Kolmogorov, Andrej Nikolaevič (Zum 50. Geburtstag) 2.
- Kolodner, I. I. s. C. S. Morawetz 198.
- Kolodziejczyk, L. (Chocs magnétiques) 208.
- Komatu, Yūsaku (Konforme Abbildungen) 305; (Investigations on inheritance. IV-8. Vs. VI.3. XVII-4.) 366.
- Kondrašov, V. I. (Eigenwertprobleme) 326.
- König, Heinz („Distributionen“) 338.
- Lothar A. und Gerhard U. Schubert (Einschalt- und Ausgleichsvorgänge in Supraleitern) 239.

- Kontorovič, P. G. und D. I. Mil'man (Methode N. I. Lobačevskijs) 36.
- Korenbljum, B. I. (Tauber-scher Satz) 60; (Verhältnis von Funktionen) 60.
- Korhonen, Unto (Wärmebe-wegung der Ionen) 448.
- Korobov, N. M. (Nichtreste und Primitivwurzeln in rekurrenten Reihen) 43; (Probleme vom Čebyšev-schen Typus) 48; (Trigo-nometrische Summen) 73.
- Korovkin, P. P. (Konvergenz linearer Operatoren) 340.
- Korringa, J. and A. N. Ger-ritsen (Cooperative elec-tron phenomenon) 451.
- Košelev, A. I. (Aufgaben der Potentialtheorie) 323.
- Koster, G. F. (Localized functions) 238.
- Kostjukov, A. A. (Wellen-widerstand einer Schiffs-karawane) 204.
- Koszul, Jean-Louis (Algè-bres de Lie résolubles) 32.
- Kotani, M. s. S. L. Miller 234.
- Kothari, D. S. s. F. C. Au-luck 229.
- L. S. (Application of Di-rac's δ -function) 9; (Mo-tion of a particle) 427; (Heavy mesons) 443.
- Köthe, Gottfried (Dualität in Funktionentheorie) 335.
- Kotik, J. s. J. Kampé de Fé-riat 203.
- Kovancov, N. I. (Linien-system eines Geradenkom-plexes) 382.
- Kovaszny, Leslie S. G. s. M. S. Uberoi 138.
- Kowalsky, Hans-Joachim und Hansjürgen Dürbaum (Körpertopologien) 35.
- Kraft, Maximilian (Vier-scheitelsatz) 378.
- Kraitchik, Maurice (Mathe-matical recreations) 9.
- Krasner, Marc (Non-exis-tence of certain exten-sions) 34.
- Krasnosel'skij, M. A. (Nicht-lineare Integralgleichun-gen) 102; (Wurzel aus In-tegraloperator) 117; (Bi-furkationspunkte) 343.
- Krasovskij, N. N. (Stabilität einer Bewegung im Gro-ßen) 184.
- Kravtchenko, Julien s. J. McNow 416.
- Kreisel, G. (Formal sy-stems) 6.
- Krejn, M. G. (Übergangs-funktion eines Rand-wertproblems) 87.
- Krettner, J. (Schiefe Platte) 187; (Elastostatische Grundformeln) 399.
- Kreyszig, E. (Integralkosi-nus) 73.
- Krieger, Irvin M. and Har-old Elrod (Non-Newtonian fluids. II.) 198.
- Krishna Iyer, P. V. (Testing of two samples) 361.
- Kroemer, H. s. R. E. Burgess 239.
- Królikowski, W. (Simulta-neous two-quanta proces-ses) 437.
- Kronheimer, Erwin H. (Nu-clear binding energies) 227.
- Krotkov, R. V. and A. E. Scheidegger (Thermody-namics of special fields) 226.
- — — s. A. E. Scheidegger 205.
- Krull, Wolfgang (Normal-körperbegriff) 163.
- Krutkov, Ju. A. (Quasi-Ko-ordinaten) 183.
- Krzywoblocki, M. Z. (Lo-cally isotropic turbulence) 202; (Bénard-Kármán vor-ter street. I.) 412.
- Kubenskaja, I. M. s. O. S. Gelfond 92.
- Kubo, Ryogo (Spin-wave theory) 239.
- Küchemann, Dietrich and Johanna Weber (Aerody-namics of propulsion) 406.
- Kudrjavcev, L. D. (Differen-zierbare Abbildungen) 179.
- Kuhn, H. W. (Extensive ga-mes) 143.
- Kulk, W. van der (Polyno-mial rings) 260.
- Künzi, Hans P. (Wertver-teilungsproblem) 304.
- Kuratowski, Casimir (Pro-priété topologique du plan euclidien) 392.
- — et C. Zarankiewicz (Coupures des régions) 170.
- Kurepa, Georges (Théorie des ensembles) 52.
- Kurita, Minoru (Vector in homogeneous spaces) 163; (Projective space and con-formal space) 163.
- Kuroš, A. G. (Radikale) 261.
- Kursunoğlu, B. s. G. Rickay-zen 217.
- Laberrigue-Frolow, Jeanne s. T. Yuasa 205.
- Labhart, Heinrich (Antifer-romagnetismus) 239.
- Ladegast, Konrad (Abschät-zungen für Verteilungen) 135.
- Ladyženskaja, O. A. (Cau-chysches Problem für hy-perbolische Systeme) 95.
- Lah, Ivo (Poukkasche Funk-tion) 150; (Mathematical expectation) 359.
- Laha, R. G. (Geary's theo-rem) 362.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 72.
- Lakshminarasimhan, T. V. (Tauberian theorem) 302.
- Laugué, Pierre, (Fonctions indéfiniment dérivables) 64; (Fonctions indéfini-ment dérivables presque périodiques) 310.
- Lamarche, G. and G. M. Vol-koff (Nuclear resonance absorption spectrum) 446.
- Lambek, J. s. L. Moser 268.
- Lambert, Robert J. (Gener-al matrices) 249.
- Lampariello, Giovanni (Ellet-trodinamica relativistica) 416.
- Lamprecht, Erich (Gaußsche Summen) 44.
- Langhaar, H. L. (Membrane stress function) 189.
- Latscha, R. (Tests of signi-ficance) 362.
- Laue, M. v. (Relativitäts-theorie. II.) 213.
- Lauffer, Rudolf (Topologie der Konfiguration. I.) 156; (Analytische Kurven) 383.
- Laurenti, F. (Équations trigo-nométriques) 154; (Double produit vectoriel) 377.
- Laurikainen, Kalervo V. und Erkki K. Euranto (Schrö-dinger-Gleichung) 427.
- Lautz, Günter (Thermokraft von Halbleitern) 237.
- Laville, Gaston (Appareil-lage industriel) 131.
- Lax, Peter D. (Hyperbolic equations) 317.
- Lazard, Michel (Suites d'élé-ments dans groupes libres) 20; (Groupes de dimen-sion des groupes libres) 253.

- Le, Nguyen Van s. Van Le, Nguyen 411.
- Le Couteur, K. J. (Perturbations in the magnetic deflector) 212.
- Lebedev, N. N. s. G. A. Grinberg 125.
- Ledinegg, E. und P. Urban (Nullpunktssuszeptibilität) 240.
- Ledoux, Paul (Noyau convectif) 453.
- Lees, Lester (Boundary-layer equations) 197.
- Legendre, Robert (Résistance d'ondes d'un aéronef) 198.
- Leger jr., George F. (Lie algebras) 262.
- Lehmann, E. L. (Rank tests) 147.
- N. Joachim (Polare Integrodifferentialgleichungen) 103.
- Lehmer, D. H. (Sieve problem) 350.
- Lehto, Olli (Fonctions méromorphes) 83.
- Leibfried, G. und W. Brenig (Spezifische Wärme) 236.
- Leimanis, E. (Bewegung eines Massenpunktes) 184.
- Lelong-Ferrand, Jacqueline (Intégrale de Dirichlet) 101.
- Lenard, A. (Bremsstrahlung) 433.
- Lenz, Hanfried (Cramér'sche Entwicklungen) 136; (Endliche Automorphismengruppen) 263.
- Leonov, M. Ja. (Druck eines Stempels) 187.
- Leum, Mark und M. F. Smiley (Fundamental theorem of algebra) 14.
- Levin, B. Ja. (Operatoren) 81.
- Levinger, J. S. (Radiative disintegrations) 233.
- Levinson, Norman (Phase shift and scattering potential) 227.
- Levitan, B. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen von Differentialgleichungen) 88; (Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators) 322.
- Levitzki, Jakob (Structure of algebraic algebras) 261.
- Levy, Samuel (Delta wings) 408.
- Li, Ting-Yi and H. T. Nagamatsu (Shock-wave effects) 198; (Boundary-layer equations) 412.
- Lieblein, Julius (Variances and covariances of order statistics) 360.
- Liebmann, G. (Plane stress problems) 131.
- Lien, Roy Harold (Radiation from a horizontal dipole) 210.
- Liesse, Claudine s. J. Géhéniau 433.
- Lighthill, M. J. (Oscillating airfoils) 416.
- Lin, C. C. (Taylor's hypothesis) 195.
- Lindahl, Clarence H. (Overlapping Pfaffians) 317.
- Lindholm, Einar (Pre-stressed circular plates) 406.
- Lindley, D. V. (Statistical inference) 360.
- Lions, Jacques-Louis (Limites, I—III.) 320.
- Lipschutz, Miriam (Events connected with sums of random variables) 136.
- Littlewood, D. E. (Conformal transformations) 216; (Unitary equivalence) 251.
- Litvinov, M. V. (Problem der Elastizitätstheorie) 400.
- Livingston, Arthur E. (Hausdorff means) 291.
- Ljapin, E. S. (Partielle Transformationen) 15.
- Ljapunov, A. A. (Klassifikation der H -Mengen) 55.
- Ljusternik, L. A. (Polynomial approximation) 70; (Laplacescher Operator) 128.
- Lloyd, E. H. (Direct product of matrices) 10.
- s. A. A. Anis 358.
- Locher-Ernst, L. (Natürliche Umformung) 157.
- Loewner, Charles (Biharmonic equation) 323.
- Lohwater, Arthur-J. (Valeurs asymptotiques de fonctions méromorphes) 304.
- — — and George Piranian (Univalent function) 302.
- Loinger, A. (Teorema di ortogonalità) 417.
- Lombardo-Radicce, Lucio (Geometrie proiettiva) 369.
- Long, D. A. (Intensities in Raman spectra, I.) 444.
- Longdon, L. W. (Nuclear d^2 configuration) 226.
- Longuet-Higgins, M. S. (Mass transport) 203.
- Lorch, Lee (Integrals which include Lebesgue constants) 59.
- Lorentz, G. G. (Inequality for rearrangements) 282.
- H. A. (Theory of electrons) 206.
- Lorenzen, Paul (Abzählbarkeitsvoraussetzung) 8.
- Löwdin, Per-Olov (Atomic self-consistent fields, I.) 232.
- Lucaroni, Raffaele (Curve sotto forma parametrica) 157.
- Luckey, P. (Kreisumfang) 1.
- Ludford, G. H. Polachek and R. J. Seeger (Compressible viscous fluids) 200.
- G. S. S. (Méthode de Riemann) 49; (D'Alembert's paradox) 413.
- Ludloff, H. F. and M. B. Friedman (Mach-reflexion of shocks) 415.
- Lukasiewicz, Jan (Formalisation) 247.
- Luke, Yudell L. (Linear sums of exponential functions) 130.
- Lumer, Günter s. P. R. Halmos 340.
- Lundqvist, Stig O. (Elastic constants) 236.
- Lüst, R. (Magneto-hydrodynamische Stoßwellen) 447.
- Luzin, N. N. (Verbiegung einer Fläche) 160.
- Lytleton, R. A. s. H. Bondi 453.
- Ma, S. T. (Power-series expansion) 429.
- Macagno, Oscar Enzo (Passage des houles planes sous un obstacle) 411.
- Mack, C. (Effect of overlapping) 365.
- MacLane, Saunders s. S. Eilenberg 172, 393.
- Madow, William G. (Systematic sampling, III.) 148.
- Magenes, Enrico (Minimo relativo) 326.
- Mahler, K. (Greatest prime factor of $ax^m + by^n$) 268; (Lattice determinants) 275.
- Majanc, L. S. (Elimination der Koordinaten) 234.
- Makai, E. (Polynomials orthogonal in two intervals) 70.
- Makar, Ragy H. (Sets of polynomials) 296.

- Maksimov, I. M. (Summen-gleichung) 120.
- Malavard, Lucien et Jean Boscher (Flexion des poutres) 188.
- Malyšev, A. V. (Darstellung der Zahlen durch quadratische Formen) 272.
- Mambriani, Antonio (Derivazione d'ordine qualisiasi) 283.
- Manarini, Mario (Diadi vettoriali) 377.
- Mandelbrojt, Szolem (Série de Dirichlet) 80.
- Mandl, F. and T. H. R. Skyrme (Neutron total cross sections) 228.
- Mann, H. B. (Sets of elements of Abelian groups) 257.
- — — and H. J. Ryser (Distinct representations) 51.
- W. Robert (Iteration) 116.
- March, N. H. (Virial theorem) 221.
- Marchionna, Ermanno (Curve di diramazione) 371.
- Marcuvitz, N. s. L. B. Felsen 418.
- Marczewski, E. (Poisson stochastic process. II.) 139.
- — s. K. Florek 139.
- Margenau, Henry s. A. A. Evett 235.
- — s. St. Bloom 432.
- Marin, Joseph s. Y.-H. Pao 190.
- Markham, Jordan J. (Acoustic fields) 191.
- Markus, L. (Ordinary differential equations) 87.
- Maroni, Arturo (Moduli delle curve algebriche) 372.
- Martin, C. F. (T -transformations) 65.
- M. H. (Propagation of plane shock) 199; (Monge-Ampère partial differential equation) 199; (Separation of variables) 323.
- Paul C. s. St. Deser 435.
- — — s. R. Karplus 435.
- Marty, Claude, Roger Nataf et Jacques Prentik (Spin de noyaux impairs-impairs. I. II. III.) 439.
- Marx, G. (Wechselwirkung der Elementarteilchen) 428.
- Imanuël and George Piranian (Lipschitz functions) 63.
- Maschler, Michael (Prolongement analytique) 79.
- Masket, A. Victor (Neutron sources) 443.
- Massey, H. S. W. s. D. R. Bates 233.
- Masuyama, Motosaburo (Basal area in timber survey) 364.
- Matsushita, Shin-ichi (Puissance des ordres dans un groupe libre) 20; (Lattices) 27.
- Matte, Alphonse (Équations de la gravitation) 215.
- Matthieu, P. (Extrapolationsverfahren. II.) 127.
- Maurin, K. (Parseval equation) 309.
- Mautner, F. I. (Eigenfunction expansions) 119.
- Maxfield, John E. (Normal k -tuples) 275.
- May, Kenneth O. (Simple majority decision) 149.
- Mayberry, J. P., J. F. Nash and M. Shubik (Duopoly situation) 151.
- — — s. D. B. Gillies 141.
- Mazur, S. (Mappings on Cartesian products) 168.
- McAnulty, J. C. s. R. H. Strotz 368.
- McCoy, Neal H. (Factorization of polynomials) 32.
- McFadden, J. A. (Fourier series) 72.
- McKinsey, J. C. C. and Patrick Suppes (Particle mechanics) 182.
- — — — A. C. Sugar and Patrick Suppes (Particle mechanics) 182.
- McMillan, Brockway (Basic theorems of information theory) 355.
- McNaughton, Robert s. H. Wang 50.
- McNown, John et Julien Kravtchenko (Ports rectangulaires) 416.
- Medlin, G. W. (Theorem of Parker) 250.
- Meffroy, Jean (Développement des grands axes. I. II.) 452.
- Mehl, Clarence R. and Peter Havas (Scattering of neutral mesons) 428.
- Meier, Rudolf and Kurt Schuster (Schallausbreitung in Kristallen) 211.
- Meijer, C. S. (G -functions. III.) 294.
- H. J. G. and D. Polder (Polar scattering) 450.
- Melkanoff, Michel A. s. E. G. Harries 234.
- Mencher, Alan G. (Epicentral displacement) 404.
- Mercier, Robert (Ondes superficielles et interfaciales) 203.
- Merli, Luigi (Fenomeno di Gibbs) 290; (Polinomi ul-trasferici di Jacobi) 293.
- Merlino, Francesco Saverio (Lastra circolare su suolo elastico) 401.
- Mertens, Robert (Diffusion multiple) 229.
- Mertvecova, M. A. (Berührende Hyperbeln) 119.
- Meshkov, Sydney (Theory of complex spectra) 444.
- Metz, André (Transformations de Lorentz) 213.
- Meyer, Burnett (Alternating double series) 65.
- Meyer-König, Werner (Lückenumkehrsatz von Pitt) 68.
- Meyer zur Capellen, W. (Nemographie) 131.
- Michael, D. H. (Stability of flows of conducting fluids) 194.
- Michel, L. (Selection rules) 428.
- — s. G. Bonnevey 223.
- Mignot, Noël (Problème de la chaleur) 126.
- Mikeladze, S. E. (Interpolationsformeln) 348.
- Mikusiński, J. G. (Generalized exponential functions) 105; (Titmarsh's theorem) 106.
- — — and C. Ryll-Nardzewski (Bounded moments) 106; (Composition des fonctions) 106.
- Milatz, J. M. W., A. H. Wapstra and J. S. van Wieringen (Fourier analysis) 350.
- Miles, John W. (Linearized theory) 192; (Motion of flat plate) 200.
- Miller, Claus E. (Topology of rotation groups) 175.
- S. L. and M. Kotani (Electronic structure of O_2) 234.
- jr., S. C. and R. H. Good jr. (Schrödinger equation) 221.
- Millsaps, Knox and Karl Pohlhausen (Jefferey-Hamel flows) 196.
- Mills, W. H. (Non-isomorphism of holomorphs) 21; (Quadratic diophantine equations) 36.

- Mil'man, D. I. s. P. G. Kon-
torovič 36.
- Milne, William Edmund
(Differential equations) 122.
- Milner, Paul C. s. L. C.
Green 234.
- Milnor, John (Sums of posi-
tional games) 144.
- s. I. N. Herstein 367.
- Minami, Shigeo (Scattering
of gamma-ray) 228.
- Mindlin, R. D. and H. H.
Bleich (Elastic cylindrical
shell) 188.
- Minkowski, H. (Geometrie
der Zahlen. I.) 48.
- Mišenko, E. F. (Kombinato-
rische Topologie nicht-ab-
geschlossener Mengen) 172.
- Mises, Richard von (Theorie
der Spiele) 357.
- Misra, B. (Bose numbers)
268.
- Mitchell, A. R. and J. W.
Craggs (Difference rela-
tions in solution of differ-
ential equations) 349.
- B. E. (Diagonalizable ma-
trices) 249.
- Josephine (Spherical con-
vergence of multiple Fou-
rier series) 43.
- Mittler, Henri (Relativistic
Hamiltonian) 427.
- Mittmann, Otfried M. J.
(Wahrscheinlichkeitsver-
teilung) 135.
- Moessner, Alfred (Identities)
36; (Problemi diofantei)
36.
- Mohr, Ernst (Partialbruch-
zerlegung des Cotangens)
288; (Gewöhnliche Diffe-
rentialgleichungen) 314.
- Mohrenstein, A. v. (Schrödin-
ger-Gleichung) 126.
- Moiseiwitsch, B. L. (Atomic
scattering problems. III.)
232.
- Molnár, J. (Überdeckung
eines konvexen Gebietes.
I.) 389.
- Moody, Ernest A. (Truth and
consequence) 244.
- Moore, Franklin K. (Lami-
nar boundary-layer flow)
411.
- Marvin G. (Gravitation)
213.
- P. G. (Sequential test for
randomness) 361.
- R. L. (Spirals in the
plane) 387.
- Moorhouse, R. G. (Pair crea-
tion) 225; (Mesonic inter-
pretation) 226.
- Moppert, K.-F. (Verallge-
meinerter Ableitungsoper-
ator) 283.
- Morawetz, C. S. and I. I.
Kolodner (Limiting lines
in transonic flows) 198.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. D.
(Analogon des Pascalschen
Satzes) 156.
- Morette De Witt, C. und J.
Hans D. Jensen (Drehim-
puls der Multipolstrah-
lung) 427.
- Moriguti, Sigeiti (Schwarz's
inequality) 353.
- Morikawa, George (Conical
potential solutions) 198.
- Morita, Masato (Electron-
neutrino angular correla-
tion) 231, 437.
- Morpurgo, G. (Energia di
legame) 439.
- Morris, J. (Routh's stability
criterion) 252.
- Morse, M. and J. Jenkins
(Pseudo-conjugates on Rie-
mann surfaces) 85.
- s. L. Ahlfors 84.
- Philip M. (Molecular rota-
tion-vibration) 234.
- Moser, Jürgen (Störungstheo-
rie) 313.
- Leo (Sets of integers) 40;
(Diophantine equation)
266.
- and J. Lambek (Mono-
tone multiplicative func-
tions) 268.
- s. J. H. Butchart 277.
- Moses, H. E. (Canonical
transformation for elec-
tron-positron field) 223;
(Exchange scattering pro-
blem) 446.
- Moshman, Jack (Log-normal
distribution) 358.
- Mostowski, Andrzej und
Marcell Stark (Algebra. I.)
248.
- Mott, N. F. (Dislocations,
plastic flow and creep) 449;
(Work-hardening of me-
tals. II.) 449.
- Mott-Smith, H. M. (Electron
temperature) 205.
- Motz, H. and L. I. Schiff
(Čerenkov radiation) 211.
- Lloyd (Gauge invariance)
207.
- Motzkin, T. S. and J. L.
Walsh (Chebyshev ap-
proximation) 69.
- Motzkin, T. S. and W. Wasow
(Elliptic differential equa-
tions) 125.
- — —, E. G. Straus and F.
A. Valentine (Number of
farthest points) 165.
- Motzkin, T. S., H. Raiffa, G. L.
Thompson and R. M.
Thrall (Double descrip-
tion method) 142.
- Mourier, Édith (Éléments
aléatoires laplaciens) 137.
- s. R. Fortet 137.
- Mower, Lyman (Tables for
approximation scattering)
277.
- Mulder, Marjorie M. s. L. C.
Green 234.
- Müller, A. (Punktmengen
ganzzahliger Entfernun-
gen) 154.
- Rolf (Schlitzblende im
Wellenleiter) 209; (Beu-
gung elektromagnetischer
Wellen am Streifengitter)
209.
- und Konradin West-
pahl (Beugung elektro-
magnetischer Wellen am
Spalt) 209.
- W. (Elastische Platte)
402.
- Munk, Max M. (Gas flow)
412.
- Munroe, M. E. (Measure and
integration) 56.
- Muracchini, Luigi (Trasfor-
mazioni puntuali) 382.
- Murai, Yasuhisa (Group of
transformations) 427.
- Murakami, Shingo (Auto-
morphisms of Lie algebra)
262.
- Murnaghan, F. D. (Unitary
symplectic group) 258.
- Murphy, James S. (Laminar
boundary-layer flow) 409.
- Myard, Francis (Intégrales
successives $\int y^n x dy$) 131.
- Myhill, John (Sign, \sup) 246.
- Myrberg, P. J. (Schlichte
konforme Abbildungen)
305.
- Lauri (Harmonische
Funktionen auf Riemann-
schen Flächen) 306.
- Myškis, A. D. (Erste Rand-
wertaufgabe in Potential-
theorie) 100.
- Nadeeva, R. I. (Zusammen-
stoß eines elastischen und
elastoplastischen Stabes)
192.

- Nagamatsu, H. T. s. Ting-Yi Li 198, 412.
- Nagler, H. (Matrix product) 11.
- Naines jr., J. B. s. R. H. Strotz 368.
- Nakano, Hidegoro (Concave modulars) 334.
- Nakano, Hidegoro s. I. Halperin 334.
- Huzio s. Y. Kitano 450.
- Nakaoka, Minoru (Homotopy classification) 174.
- Nakayama, Tadasi (Galois cohomology) 34.
- Namiki, Mikio and Yosio Suzuki (One-body problem) 430.
- Nardini, Renato (Energia dissipata da forze periodiche) 406.
- Nash, John (Cooperative games) 141.
- J. F. s. J. P. Mayberry 151.
- Nassif, M. (Sets of polynomials) 295.
- Nataf, R. (Éléments de matrice nucléaires) 230.
- — s. C. Marty 439.
- Natanson, I. P. (Interpolationprozesse) 69.
- Natucci, Alpinolo (Guglielmo Libri) 243.
- Nelson, A. L., K. W. Folley and M. Coràl (Differential equations) 310.
- Lewis s. G. E. Albert 139.
- Raymond A. s. W. Band 235.
- Ness, Nathan s. A. Ferri 415.
- Neumann, B. H. (Problem of Hopf) 254.
- — and Hanna Neumann (Group amalgams) 254; (Abelian groups) 254.
- — — s. T. Evans 17.
- — — s. G. Higman 253.
- Hanna s. B. H. Neumann 254.
- J. von (Borel notes) 140; (Zero-sum two-person game) 141.
- — — s. D. B. Gillies 141.
- Nevanlinna, Rolf (Analytische Funktionen) 303.
- Neville, E. H. (Tree-structure) 179.
- Newman, Morris (Certain infinite products) 269.
- Newns, W. F. (Representation by infinite series) 77.
- Newton, Is. (Principia mathematica) 2.
- Nicholls, R. W., W. R. Jarman and P. A. Fraser (Vibrational transition of molecules) 446.
- Nickel, Karl (Integralgleichungssysteme) 103.
- Nier, Alfred O. s. E. G. Johnson 212.
- Niessen, K. F. (Vanishing spontaneous magnetization) 451.
- Nifontoff, Nicolas (Barrière de potentiel) 208; (Conductivité par effet tunnel et par effet thermoélectronique) 238; (Conductivité électrique par effet tunnel) 238.
- Nigam, Swami Dayal and Kumandur Srinivasa Iyengar Rangaswami (Rotating sphere) 409.
- Nijboer, B. R. A. and R. Fieschi (Radial distribution function) 236.
- Nikol'skij, S. M. (Fortsetzung differenzierbarer Funktionen) 62.
- Ninomiya, Nobuyuki (Ensemble de capacité nulle) 323.
- Nirenberg, Louis (Parabolic equations) 96; (Elliptic partial differential equations) 98.
- Nitsche, Joachim und Johannes Nitsche (Normale der Niveauflächen einer Potentialfunktion) 162.
- — s. Johannes Nitsche 99.
- Johannes (Hyperbolische Differentialgleichungssysteme) 94.
- — und Joachim Nitsche (Zweites Randwertproblem für $\Delta\varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$) 99.
- — s. Joachim Nitsche 162.
- Niven, Ivan (Error term in interpolation formulas) 130.
- Nöbeling, Georg (Limitentheorie) 390.
- Nobile, Amedeo (Rate uguale) 367.
- Noble, M. E. (Taylor series) 297.
- Noel, Robert G. s. J. H. Johnson jr. 403.
- Noguchi, Tamazi s. H. Kanazawa 449.
- Norlind, Wilhelm (Copernicus and Luther) 242.
- Norris, M. J. (Infinite series) 65.
- Northcott, D. G. (Hilbert's function) 30; (Unmixed ideals) 260.
- Nosarzewska, M. (Uniform convergence) 63.
- Novák, Josef (Partition) 53.
- Novikov, P. S. s. L. V. Keldyš 55.
- Novobatzky, K. F. (Schrödinger-Gordon-Gleichung) 221.
- Novoselov, S. I. (Elementare Algebra) 248.
- Novotný, Miroslav (Représentation des ensembles) 54.
- Nüscheler, R. (Rückwärts-einschnitt) 181.
- Obi, Chike (Non-linear differential equation) 314, 316.
- O'Brien, Vivian s. Ch-Ch. Chang 75.
- Ogborn, M. E. (Human mortality) 367.
- Ohmann, D. (Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz) 388.
- Ohtsuka, Makoto (Harmonic measure of accessible boundary) 84.
- Okubo, H. (Torsion of spiral rods) 403.
- Oldroyd, J. G. (Emulsions and suspensions) 416.
- Olejník, O. A. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 99.
- Olifiers, E. „a“ and „b“ distribution) 366.
- Olkin, Ingram s. L. Katz 250.
- Olsson, R. Gran s. Gran Olsson, R. 410.
- Ollenrenshaw, Kathleen (Region $|xy| \leq 1, x^2 + y^2 \leq t$) 48.
- Olum, Paul (Mapping into spaces in which certain homotopy groups vanish) 174.
- O'Neill, Barrett (Essential sets) 392.
- Ono, Takashi (Normed spaces) 335.
- Oppenheim, A. (Hermitian quadratic forms) 47; (Quadratic forms. I. II.) 273; (Inequalities for quadratic forms. I.) 273.
- Ore, Aadne s. Ch. Frönsdal 446.
- Orlicz, W. (Condition de Lipschitz généralisée. II.) 64.

- O'Rourke, R. C. (Compton scattering) 436; (Brillouin's free-spin theory) 451.
- Osima, Masaru (Basic rings) 260.
- Ostrovskij, A. I. (Darstellende Geometrie) 181.
- Ottaviani, Giuseppe (Integrale stocastico) 355.
- Otter, Richard and John Dunne (Games) 141.
- Oudenaarden, P. C. (Zeichen und Struktur) 3.
- Overhauser, Albert W. (Paramagnetic relaxation) 240.
- Ozigova, E. P. („Sieb des Eratosthenes“) 272.
- Paatero, V. (Abbildung mehrblättriger Gebiete) 306.
- Pack, D. C. (Compressible fluid) 200.
- Pai, S. I. (Turbulent flow) 194.
- Pailloux, Henri (Approximation) 184.
- Palamà, G. (Tarry-Escott problem) 38.
- e L. Poletti (Tavola dei numeri primi) 36.
- Pan, T. K. (Sufficient condition that two surfaces be applicable) 161; (Spherical curvature of hypersurface) 379.
- Panferov, V. M. (Elastoplastische Deformationen) 404.
- Panyč, O. I. (Randwertproblem) 99.
- Pao, Chia-Shan (Paraboloid reflectors) 419.
- Yoh-Han and Joseph Marin (Creep deformation of materials) 190.
- Papić, Pavle (Espaces abstraits) 167; (Espaces admettant une base ramifiée de voisinages) 390.
- Papy, Georges (Groupes différentiels gradués) 258.
- Paranjape, B. V. (Internal friction in metals) 450.
- Parker, Eugene N. (Heisenberg's model of turbulence) 416.
- K. s. L. R. B. Elton 228.
- W. V. (Matrices AB and BA) 10; (Set of matrices) 250.
- Parmenter, R. H. (Acoustoelectric effect) 237.
- Parodi, Maurice (Polynômes récurrents) 14.
- Parthasarathy, M. (Integral functions) 302.
- Parzen, G. (Electronic energy bands) 238.
- Päsler, M. (Elastische Schwingungen) 406.
- Pauc, Christian (Différentiation de fonctions) 60; (Ableitungsbasen, Prätopologie) 279.
- — Y. s. Otto Haupt 278.
- Pavlović, S. V. (Théorème de M. D. Pompeiu) 153.
- Peaslee, D. C. s. R. W. King 438.
- Peck, L. G. (Algebraic numbers) 276.
- Pellegrino, Franco (Calcolo numerico integrale) 266.
- — e Franco Rugini (Funzionali analitici lineari) 335.
- — e Francesco Succi (Funzionali analitici) 335.
- — e Sami Varsano (Funzionale analitici non lineari) 336.
- — s. E. Evans 336.
- — s. H. Freshner 336.
- Pennington, W. B. (Mahler's partition problem) 40.
- Pennisi, Louis L. (Indirect sufficiency proof for problem of Lagrange) 326.
- Penrose, L. S. (Sib-pair linkage test) 366.
- Pereira Gomes, A. (Fonction diamètre) 169; („Convergent“) 193.
- Peremans, W. s. H. J. A. Duparc 269.
- Pernet, Roger (Conjugaison et fibration) 259.
- Perry, C. L. s. M. E. Rose 443.
- Petiau, Gérard (Section efficace du rayonnement de freinage électromagnétique) 222; (Fonctions sphériques) 222; (Diffusion coulombienne) 222.
- Petresco, Julian (Chaines. III.) 27.
- Petrovskij, I. G. (Integralgleichungen) 102.
- Petschek, Albert G. (Absorption of mesons) 437.
- Peyerimhoff, Alexander (Absolute Summierbarkeit) 67.
- — s. W. Jurkat 67.
- Piazolla-Beloch, Margherita (Geometria descrittiva) 180; (Superficie algebrica) 372.
- Pickert, Günter (Zerlegungen von algebraischen Strukturen) 28.
- Picone, Mauro (Leistungen des nationalen Instituts) 120.
- Pierce, R. S. (Boolean algebra) 169.
- Pilatovskij, V. P. (Filtration) 202.
- Pincherle, L. s. D. G. Bell 238.
- Pini, Bruno ($\Delta u + cu = 0$) 324; (Problema biarmonico fondamentale) 324.
- Pipes, Louis A. (Equations of Mathieu-Hill type) 313.
- Piranian, George s. F. Herzog 78.
- — s. A. J. Lohwater 302.
- — s. J. Marx 63.
- Pisot, Charles s. J. Dufresnoy 264.
- Pistola, Angelo (Trasformata n-pla di Laplace) 329.
- Pistol'kors, A. A. (Feldverteilung in einer Antenne) 211.
- Plainevaux, J. E. (Équilibre de rotors) 401.
- Plaskett, J. S. (Thomas-Fermi electron density) 232.
- Platone, Giulio (Proprietà di simmetria) 63.
- Platrier, Charles (Tenseur de déformation totale) 399.
- Pogorelov, A. V. (Äußere Krümmung) 165.
- Pohle, F. V. s. R. F. Dressler 202.
- Pohlhausen, Karl s. K. Millsaps 196.
- Poincelot, Paul (Principe de Fermat) 423; (Propagation de la lumière blanche) 423.
- Polachek, H. s. G. Ludford 200.
- Polak, A. (Analytische Funktionen) 305.
- Polder, D. s. H. J. G. Meijer 450.
- Poletti, L. s. G. Palamà 36.
- Pollaczek, Félix (Théorie des attentes) 140.
- Pollak, Henry s. Ph. Davis 79.
- Pollard, Harry (Distribution functions) 331.
- Polovin, R. s. A. Achiezer 432.
- Popken, J. (J. A. Barrau) 2.
- Porcelli, Pasquale (Reciprocals of linear functions) 337.
- Poritsky, H. (Gyroscopic motion) 184.

- Pöschl, Klaus (Maximalbetrag der Lösungen linearer Differentialgleichungen) 312.
- Post, H. R. (Many-particle systems) 439.
- Pöttker, Werner (Prämienreserve) 151.
- Povzner, A. Ja. (Entwicklung willkürlicher Funktionen) 322.
- Power, E. A. (Perturbation expansions) 429.
- G. (Forces on boundary of a dielectric) 208.
- Pozniak, E. G. (Verbiegungen von Rinnen) 381.
- Prachar, K. (Problem Waring-Goldbach) 40; $\left(\sum_{p \leq x} \omega(f(p))\right)$ 42; (Zahlengeometrische Minima) 274.
- Pradillo, Julio García s. García Pradillo, Julio 65.
- Prais, S. J. s. J. A. C. Brown 351.
- Prasad, B. N. and U. N. Singh (Corrigenda) 72.
- Predonzan, Arno (Unirazionalità per varietà) 374.
- Prentik, Jacques s. C. Marty 439.
- Preuss, H. (Zweizentrenintegrale) 235.
- Price, A. T. and L. B. Slichter (Electromagnetic interpretation problem) 208.
- Prigogine, I. s. G. Klein 204.
- Prim, R. C. s. W. Shockley 451.
- Prior, A. N. (Propositions neither necessary nor impossible) 5.
- Prochorov, Ju. V. (Wahrscheinlichkeitsverteilungen) 352.
- Procissi, Angiolo (Opere di Archimede) 242.
- Protter, M. H. (Tricomi problem) 94.
- Pucci, Carlo (Laplace's equation) 99.
- Puig Adam, P. (Fonctions de partition) 281.
- Puppe, Dieter s. Martin Kneser 398.
- Pylarinos, O. (Géodésiques des surfaces réglées W) 381.
- Quade, W. (Positive Matrizen) 15; (Integralbasis) 311.
- Quine, W. V. (Logico-philosophical essays) 5.
- Rådström, Hans (Iteration) 300.
- Rädzievskij, V. V. (Zweikörperproblem der Photogravitation) 453.
- Rahman, A. (Accuracy of perturbation) 427; (Polarizability) 444.
- Raiffa, Howard (Two-person games) 145.
- s. T. S. Motzkin 142.
- Rainville, E. D. (Generating functions for Bessel polynomials) 74.
- Raj, Des (Mill's ratio) 359; (Parameters of type III populations) 363.
- Rajagopal, C. T. (Tauber's theorem) 285; (High-index theorems) 285; (One-sided Tauberian theorem) 285; (Power series) 297.
- Rajalakshman, D. V. s. M. S. Bartlett 365.
- Raljević, Šefkija (Segment d'Euler) 153.
- Ramakrishna, B. S. s. S. K. Lakshmana Rao 72.
- Ramm, N. S. und A. S. Švarc (Geometrie der Nachbarschaft) 391.
- Ramsayer, K. (Kleinfunktionsrechenmaschine) 132.
- Ramsey, Norman F. (Electron coupled interactions) 446.
- Rangaswami, K. S. I. s. S. D. Nigam 409.
- Rankin, R. A. (Anomaly of convex bodies) 274; (Positive definite quadratic forms) 274; (Convex bodies) 388.
- Rao, K. S. (Deriving best critical regions) 362.
- P. Sambasiva (Eigenfunctions of membrane problem) 321.
- S. K. Lakshmana and B. S. Ramakrishna (Trigonometric series) 72.
- Raševskij, P. K. (Liesche Gruppen) 25.
- Rasiowa, H. (Compactness theorem) 6.
- Ratier, Jean s. Maurice Jean 441.
- Rauch, S. E. (Cycloidal motion of electrons) 426.
- Raychaudhuri, Amalkumar (Arbitrary concentrations of matter) 215.
- Rayski, J. (Regular field theory) 225; (Regular field theory. I.) 428.
- Reckling, K. A. (Dünne Kreisplatte) 405.
- Redheffer, R. M. (Power series and algebraic numbers) 49; (Initial-value problems) 344.
- s. R. Steinberg 72.
- Regge, T. and M. Verde (Scattering problems) 228.
- Régnier, Jean s. J. Barriol 234.
- Reidemeister, Kurt (Topologie der Polyeder) 172.
- Reifenberg, E. R. (Finite sets of plane continua) 393.
- Reik, Helmut G. (Irreversible Vorgänge. I. II. III.) 204.
- Reilly, Edith F. (Electrostatic energy matrices) 445.
- Reissner, Eric (Bending and twisting of plates) 187.
- s. R. A. Clark 189.
- Reulos, René (Échelle quantique des masses) 398.
- Richard, Ubaldo („Funzioni ausiliarie“) 312.
- Richert, Hans-Egon (Abelsche Gruppen. II.) 23; (Gitterpunktproblem) 42; (Dirichletsches Teilerproblem) 42; (Additive Primzahltheorie) 271.
- Richter, Hans (Elastoplastische Reflexion eines Stabes) 404.
- Rickayzen, G. and B. Kurşunoğlu (Unified field theory) 217.
- s. R. J. Eden 224.
- Rider, Paul R. (Product of ranges in samples) 358.
- Riezler, Wolfgang (Kernphysik) 226.
- Rigbi, Zvi (Triangular coordinates) 121.
- Riguet, Jacques (Systèmes de coordonnées relationnels) 51; (Matrices de Stirling) 337.
- Rijkoort, P. J. and M. E. Wise (Ranking tests) 361.
- Ringel, Gerhard (Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen) 180.
- Rinow, W. (Flächentheorie A. D. Alexandrovs) 165.
- Riordan, John F. s. M. G. Scherberg 133.
- Ripelle, Michel Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, Michel 427.
- Riss, J. (Calcul différentiel et distributions) 112.
- Rivier, William (Équation à coefficients entiers) 266.

- Rivlin, B. S. (Problems in elasticity theory) 186.
- Rizza, Giovanni Battista (Integrali nelle algebre iper-complesse) 309.
- Rjaben'kij, V. S. (*C*-Stabilität von Differenzenschemata) 349.
- Roberts, Helen M. and Doris S. Stockton (Mathematics) 276.
- J. H. (Iterative process) 327.
- jr., T. E. (Single-wire transmission line) 208.
- Robinson, Abraham (Calcul deductif) 246; (Supersonic flow) 414.
- Rochlin, V. A. (Innere Homologien) 397.
- Rodriguez-Salinas, Balthasar (Laplacesche Kurvenintegrale) 329.
- Roeser, Ernst (Corresponding polyhedra) 370.
- Rogačenko, V. F. (Konstruktionsaufgaben in der Lobachevskischen Ebene) 370.
- Roger, Frédéric (Image corpusculaire) 444; (Première bande d'absorption) 445.
- Rogers, C. A. s. P. Erdős 389.
- Rogovoj, M. R. (Darboux'sche Büschel) 384.
- Rohrbach, Hans und Bodo Volkmann (Asymptotische Dichte) 269.
- Röhl, Helmut (Abelsche Integrale) 85; (Differentialsysteme) 86.
- Romanov, N. P. (Potenzreihen und Grenzwertsätze) 43.
- Romig, Harry G. (Binomial tables) 352.
- Rose, M. E. (β -transitions) 231; (Angular correlation) 436.
- and C. L. Perry (Finite de Broglie wavelength) 443.
- Rosenblatt, B. R. s. G. G. Bejarano 121.
- Murray s. K. A. Brownlee 360.
- M. s. J. L. Hodges jr. 354.
- Rostovcev, N. A. (Ebenes Kontaktproblem) 403.
- Roth, K. F. (Sets of integers) 40.
- L. (Hyperelliptic three-folds) 374; (Sistema antiranonico) 375.
- Roth-Desmeules, E. (Dimensionen physikalischer Größen) 398.
- Rothe, E. H. (Banach spaces of Calkin and Morrey) 111.
- R. (Höhere Mathematik. II.) 276.
- Rott, N. (Wing for supersonic speeds) 415.
- Roussopoulos, Paul (Théorie des collisions) 227.
- Roux, Delfina (Serie di potenze) 296.
- Rozenberg, M. D. (Partielle Differentialgleichungen) 93.
- Rozenfel'd, B. A. (Omar Chajam) 1.
- Rubinoff, M. s. H. J. Gray jr. 133.
- Rubinstein, L. I. (Verdampfen von Flüssigkeitsgemischen) 206.
- Ruderman, M. (Beta-decay) 230.
- A. s. E. M. Henley 228.
- Rugini, Franco s. F. Pellegrino 335.
- Rutishauser, Heinz (Biorthogonalisierungs-Algorithmus) 10.
- Russell, Henry N. (Spectra) 445.
- Ruston, A. F. (Compact linear operators) 342.
- Ryll-Nardzewski, C. (Axiom of induction) 7; (Convergence des séries de puissances) 117; (Séries de puissances) 117.
- s. K. Florek 139.
- s. J. G. Mikusiński 106.
- Ryser, H. J. s. H. B. Mann 51.
- Rzewuski, J. (Relativistic quantum dynamics) 225; (Differential conservation laws) 225.
- Sachs, Mendel (Structure of Mn^{++}) 445.
- Sadowsky, M. A. and E. Sternberg (Bending of an incomplete torus) 187.
- Sáenz, A. W. (Dislocations in anisotropic media) 237.
- Sagan, Hans s. P. Funk 329.
- Šaginjan, A. L. (Annäherungen durch harmonische Polynome) 289.
- Salem, Raphael (Hypothèse de Riemann) 80.
- et Antoni Zygmund (Séries trigonométriques) 73.
- Salié, Hans (Abundante Zahlen) 42.
- Salpeter, E. E. (Repulsive core) 442.
- Saltzberg, Bernard s. G. I. Cohn 124.
- Saltzer, Charles (Dirichlet problem for Laplace difference equation) 93.
- Sambasiva Rao, P. s. Rao, P. Sambasiva 321.
- Samelson, Klaus und Friedrich L. Bauer (Optimale Rechengenauigkeit) 350.
- Samet, P. A. (Algebraic integers) 265.
- Samuelson, Paul A. s. R. M. Solow 368.
- Sampford, M. R. (Inequalities on Mill's ratio) 135.
- San Juan, Ricardo (Intégrale de Laplace) 104; (Moments d'une fonction holomorphe) 107; (Système infini d'équations linéaires) 116; (Hardysche Reihen) 298.
- Sandelius, Martin (Unbiased estimates for two-phase sampling) 364; (Inverse sampling. II.) 364.
- Sapiro, G. S. (Energie von Restdeformationen) 189.
- Sarginson, K. (Expansion of plane wave in pseudo harmonics) 95.
- Sario, Leo (Minimizing operators) 306.
- s. L. Ahlfors 84.
- Sarton, G. (Ancient science) 1.
- Sasakawa, Tatuya (Many particle problems) 427.
- Sathe, L. G. (Problem of Hardy) 271.
- Sato, Hazimu (Teilerketten-satz) 30.
- Sauer, R. (Hyperbolische Probleme der Gasdynamik) 411.
- Savinov, G. V. (Eigenschwingungen) 314.
- Sawada, Katuro (Scattering problem) 435.
- Sawyer, D. B. (Lattice points in point sets) 48.
- Walter Warwick (Polynomial sequences) 90.
- Saxer, Walter (Invaliditätswahrscheinlichkeiten) 150.
- Ščeglov, M. P. (Beschränkte Folgen) 287.
- Schaefer, Cl. s. C. v. Fraustein 423.
- Schäfer, Manfred (Unterschall-Überschallströmungen) 414.
- Wilhelm (Bayes-Funktion) 148.

- Schäffer, Juan J. (Operators in Hilbert space) 340.
 — — — s. P. R. Halmos 340.
 Schäfke, Friedrich Wilhelm (Matthiesche Funktionen) 293; (Hillsche Differentialgleichung) 313; (Konvergenz- und Fehlerabschätzungen) 345.
 Scharff-Goldhaber, Gertrude (Even-even nuclei) 438.
 Scheidegger, A. E. (Multiple quantization) 226.
 — — — and R. V. Krotkov (Thermodynamics) 205.
 — — — s. R. V. Krotkov 226.
 Schenk, J. and J. M. Dumoré (Heat transfer in laminar flow) 416.
 Schenkman, Eugene (Generalization of central elements) 255.
 Scherberg, Max G. and John F. Riordan (Analogue calculation of polynomial and trigonometric expansions) 133.
 Schiff, L. I. s. H. Motz 211.
 Schiffer, M. s. P. R. Garabedian 100.
 Schild, Albert (Schlicht functions) 302.
 Schiller, Ralph s. P. G. Bergmann 429.
 Schiske, Peter (Electrostatic single lens) 212.
 — — s. W. Glaser 425.
 Schlüter, A. s. H. Billing 132.
 Schmeidler, W. s. R. Rothe 276.
 Schmetterer, L. (Stochastische Iteration) 354.
 Schmidt, Jürgen (Minimalbedingung) 50.
 Schmutz, O. (Dämpfungsgrad bei Ausgleichsvorgängen) 15.
 Schneider, Hans (Inequality for latent roots) 11.
 Schoenberg, I. J. (Smoothing operations) 287.
 Scholz, Heinrich (Begriff einer mathematischen Theorie) 3.
 Schomaker, Verner s. R. Glauber 232.
 Schopf, A. s. B. Eckmann 259.
 Schouten, J. A. (Subprojective affine connections) 163.
 Schubert, Gerhard U. s. L. A. König 239.
 — Horst (Differenzierbarkeit der Abbildungen) 61.
 Schultz-Grunow, F. (Elastische Platten) 401.
 Schultze, Ernst (Druckpunktverteilung) 407.
 Schuster, Kurt s. R. Meier 211.
 Schütte, Kurt (Typenfreie Logik) 244.
 Schütte, Kurt und B. L. van der Waerden (Dreizehn Kugeln) 167.
 Schützenberger, Marcel Paul (Groupe de permutations) 51.
 Schwartz, Laurent (Homomorphismes complètement continus) 333.
 Schwarz, Maria Josepha de (Equazioni differenziali) 324; (Torsionsfunktion) 403.
 Sciamia, D. W. s. D. G. Bell 238.
 Scott, J. F. s. G. H. Jowett 357.
 — T. (Φ -invariant of quadratics) 155.
 — W. R. s. S. Chowla 256.
 Sears, W. R. s. M. C. Adams 192.
 Seaton, M. J. (Electron excitation) 445.
 — — s. G. A. Erskine 227.
 Sebastião e Silva, J. (Funzionali analitici) 335.
 Šechter, V. (Maxwellsche Gleichung) 207.
 Sedov, L. I. (Bewegung eines Gases) 416.
 Seeger, Alfred (Eigenbewegungen in Kristallen I.) 237; (II.) 448.
 — —, Hans Donth und Albert Kochendörfer (Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen. III.) 448.
 — R. J. s. G. Ludford 200.
 Segre, Beniamino (S. Pincherle) 243; (Geometria algebrica) 373.
 Seidel, W. (Per-symmetric determinant) 293.
 Selfridge, R. G. (Approximations) 69.
 Selig, Franz s. P. Funk 329.
 Sengupta, H. M. (Definite integral) 60.
 Senior, T. B. A. (Diffraction of a dipole field) 421.
 — — — s. P. C. Clemmow 282.
 Serre, Jean-Pierre (Groupes d'homotopie) 175.
 — — s. A. Borel 396.
 — — s. H. Cartan 177.
 Serre, Jean-Pierre s. G. Hochschild 21.
 Sesekin, N. F. (Gruppen ohne Torsion) 18.
 Ševčenko, K. (Ebenes Problem für unendliches elastisches Medium) 400.
 Severi, Francesco (Funzioni analitiche) 307.
 Sexl, Theodor (Fermische Streulängen) 228.
 — — s. J. Herrmann 439.
 Shah, S. M. and S. K. Singh (Borel's theorem on α -points) 304.
 — — — s. A. R. Ansari 251.
 Shanmugadhasan, S. (Quantization of spin theory) 223.
 Shapley, L. S. (n -person games) 144.
 Sharp, R. T. s. G. K. Horton 221.
 — jr., Henry (F_0 -subsets of E_n) 392.
 Shaw, F. S. (Relaxation methods) 348.
 Sheldon, John and L. H. Thomas (Large scale computing) 133.
 Shercliff, J. A. (Motion of conducting fluids) 194.
 Shewell, J. R. s. D. J. Bedsin 417.
 Shiffman, Max (Games of timing) 142.
 Shimada, Nobuo (Homotopy classification of mappings) 174.
 Shimazu, Haruo s. O. Hara 431.
 Shipley, F. M. s. V. A. Johnson 451.
 Shockley, W. (Cyclotron resonances) 451.
 — — and R. C. Prim (Emission in semiconductors) 451.
 Shortley, George (Tschebyscheff-polynomial operators) 124.
 Shrikhande, S. S. s. R. C. Bose 146.
 — — — s. H. O. Hartley 146.
 Shubik, M. s. J. P. Mayberry 151.
 Siddiqi, Jamil Ahmad (Théorèmes d'unicité) 300.
 Sidrak, Sobhy (Drag on an elliptic cylinder) 410.
 Sierpiński, W. (Coup d'oeil sur l'état actuel de l'hypothèse du continu) 52; (Types ordinaux) 54.
 Sikorski, R. (Abstract algebras) 27.

- Silva, J. Sebastião e s. Sebastião e Silva, J. 335.
- Simon, A. and T. A. Welton (Polarized particles) 443.
- Singh, S. K. s. S. M. Shah 304.
- Uditā Narayana (Théorèmes de Hille et Tamarin) 330; (Transformée de Fourier généralisée) 330.
- Singh, Uditā Narayana s. B. N. Prasad 72.
- Sitnikov, K. (Zweidimensionale Menge, die kleine Deformationen in eindimensionalen Polyeder zuläßt) 171.
- — A. (Dreikörperproblem) 185.
- Skolem, Th. (Set theory) 246; (Semi-groups) 253.
- Skovgaard, H. (Confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$) 295.
- Skyrme, T. H. R. s. F. Mandl 228.
- Slansky, Serge (Fonction d'onde du photon) 223; (Potentiels de la mécanique ondulatoire du photon) 223.
- Slater, J. C. (Self-consistent field method) 238; (Ferromagnetism) 240.
- L. J. (Hypergeometric integrals) 294.
- Slepenčuk, K. M. (Darstellung analytischer Funktion) 86.
- Slichter, L. B. s. A. T. Price 208.
- Slobodeckij, L. N. (Differentialoperatoren) 99.
- Sloovere, H. De (Stabilité) 417, 427.
- Smail, Lloyd L. (Mathematics of finance) 367.
- Smart, J. Samuel (Magnetic structure transitions) 451.
- — s. L. N. Howard 451.
- Smiley, M. F. s. M. Leum 14.
- Smirnov, D. M. (Auflösbare Gruppen) 18.
- Ju. (Nachbarschaftsräume) 170.
- Smith, R. C. T. (Inverse factorial series) 299; (Conduction of heat) 348.
- W. L. s. D. R. Cox 356.
- Smythe, W. R. (Current flow in cylinders) 207.
- Šnolj, I. E. (Partielle Differentialgleichung) 100.
- Socio, Marialuisa de (Equazioni di Maxwell) 210.
- Söhne, W. (Seitenstabilität) 408.
- Söhngen, H. (Hilbert-Transformation) 328; (Luftkräfte an Schaufelkranz) 408.
- Sohon, H. s. H. J. Gray jr. 133.
- Solow, Robert M. and Paul A. Samuelson (Balanced growth) 368.
- Sondheimer, E. H. s. D. J. Howarth 450.
- Sonnenschein, J. (Procédés de sommation) 286.
- Soós, Gy. (Hellyscher Satz) 165.
- Sörum, Harald (Least squares refinement) 449.
- Soudan, Adel (Mouvement elliptique) 452.
- Spampinato, Nicolò (Funzioni totalmente derivabili) 309.
- Specht, Wilhelm (Zahlentheorie der Polynome. IV.) 46; (Strahlentherapie) 283.
- Spencer, D. s. L. Ahlfors 84.
- Spiegel, M. R. (Irrational numbers) 49; (Some series) 63.
- Spielberg, Irvin N. (Aerodynamic coefficients) 408.
- Spitzer jr., Lyman and Richard Härm (Transport phenomena) 235.
- Springer, Melvin D. (Joint sampling distribution) 145.
- Średniawa, Bronisław (Pair production by photons) 433.
- Sretenskij, L. N. (Verbiegung von Flächen) 160; (Stehende Wellen) 202.
- Stabler, E. R. (Mathematical thought) 4.
- Stanley, Robert L. (A paradox) 248.
- Stark, Marcell s. A. Mostowski 248.
- Stečkin, S. B. (Fourierreihen) 72.
- Steenrod, N. E. (Homology groups of symmetric groups) 394; (Cohomology classes) 395.
- Steinberg, R. and R. M. Redheffer (Trigonometric approximation) 72.
- Steinfeld, O. (Nullteilerfreiheit von Ringen) 29.
- Steinhardt, F. s. L. Bieberbach 84.
- Stender, P. V. (Identitätsproblem für gewisse Gruppen) 18.
- Stepanov, V. V. (Differentialgleichungen) 87.
- Stephenson, G. (Gravitation and electromagnetism) 217.
- — and C. W. Kilmister (Unified field theory) 217.
- Sternberg, E. s. M. A. Sadowsky 187.
- Stevens, K. W. H. (Magnetic properties) 452.
- — — s. B. Bleaney 452.
- W. L. (Angular transformation) 357.
- Stevenson, A. F. (Electromagnetic scattering problems) 422; (Electromagnetic scattering) 422.
- Stewart, A. L. s. D. R. Bates 233.
- F. M. s. D. Gale 143.
- Stewartson, K. (Motion of an ellipsoid) 193.
- Stickland, A. C. (Progress in physics. XVI.) 398.
- Stockton, Doris S. s. H. M. Roberts 276.
- Stojakovic, Mirko (Matrices quasi-inverses) 10.
- Stokman, V. B. („Seitliche“ Reibung) 194.
- Stoll, Wilhelm (Ganze Funktionen) 307.
- Stone, A. H. (Coverings of spaces) 178.
- J. J. (USAF-Fairchild digital computer) 132.
- W. M. (Cubic convergence) 347.
- Storchi, Edoardo (Piccole oscillazioni) 416.
- Straneo, Paolo (Fisica moderna o metafisica?) 244.
- Straszewicz, S. (Directions singulières par rapport à un ensemble) 56.
- Straus, E. G. s. T. S. Motzkin 165.
- Strebel, Kurt (Konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs) 84.
- Ströher, Wolfgang (Projektive Geometrie der Linienelemente) 383.
- Strotz, R. H., J. C. McAnulty and J. B. Naines jr. (Business cycle) 368.
- Strubecker, Karl (Kinematik) 377.
- Struble, Raimond A. (Almost periodic functions) 310.
- Stuart, A. (Association in contingency tables) 364.
- Succi, Francesco s. F. Pellegrino 335.

- Sugar, A. C. s. J. C. C. McKinsey 182.
- Sumner, D. B. (Convolution transform) 104.
- Suppes, Patrick s. J. C. C. McKinsey 182.
- Surduts, Aron (Effet Faraday) 238.
- Süss, W. (Ellipsoid) 382.
- Suvorov, G. D. (Primenden einer Folge ebener Gebiete) 305.
- Suzuki, Yosio s. M. Namiki 430.
- Švare, A. S. s. V. A. Efre-movič 170.
- — — s. N. S. Ramm 391.
- Svenonius, Per and Ivar Waller (Spin in non-relativistic theory of scattering) 223.
- Swan, P. (Elastic scattering of neutrons and of protons) 228; (Scattering of neutrons) 229.
- Swanson, Don R. (High energy p - p scattering) 228; (Nucleon-nucleon scattering) 228.
- Swihart, James and Edward Akeley (Motion of electrons) 212.
- Swinnerton-Dyer, H. P. F. (Extremal lattices of convex bodies) 48.
- Sydler, J.-P. (Théorème de Pompeiu) 153.
- Synge, J. L. (Bounding formula for integrals) 122.
- Sz.-Nagy, Bela (Ungleichung von H. Bohr) 73.
- Gy. (Algebraische Kurve vierter Ordnung) 159.
- Szász, G. (Lattices) 259.
- Szegő, G. (Preceding paper of Loewner) 323.
- Szekerés, G. (Partitions. II.) 41.
- Szele, T. (Systems of linear equations) 12; (Direct sums of cyclic groups) 21; (Direct decompositions of Abelian groups) 257.
- — — s. A. Kertész 155.
- Szélpál, I. (Ordnung n -stufig nichtkommutativer Gruppen) 21.
- Szendrei, J. (Schreier extension of rings) 29.
- Taam, Choy-Tak (Linear differential equations) 313.
- Table of $\arctan x$ 134.
- Tajmanov, A. D. (Trennbarkeit von Mengen) 169.
- Talmi, Igal (Matrix elements of β -decay) 231; (Even-even nuclei. II.) 438.
- Tammi, Olli (Löwner's differential equation) 301; (Bounded schlicht functions) 302.
- Tanaka, Chuji (Convergence-abszissen) 298.
- Shō and Motō Itō (Natural decay of free neutron) 230.
- Tandori, Károly (Fourierreihen stetiger Funktionen) 291.
- Targonszky, G. I. (Darstellung durch Kettenreihen) 68.
- Tartakovskij, V. A. (N-Invarianten Efimovs) 160.
- Tate, Robert F. (Double inequality of normal distribution) 135.
- Tauber, G. E. and Ta-You Wu (States in configurations) 443.
- Taylor, S. J. (Volume of a topological cube) 56; (Measure of Brownian paths in n -space) 58; (Geometrical extremal problems) 387.
- W. B. s. H. O. Hartley 146.
- William F. (Distance functions) 149.
- Teichmann, T. and E. P. Wigner (Electromagnetic field expansions) 208.
- Teissier, Marianne (Demi-groupes) 16.
- Teixidor, J. (Theorem von Reiss) 383.
- Telegdi, Valentine L. s. M. Gell-Mann 442.
- Temple, G. (Generalized functions) 112.
- Tenca, Luigi (Guido Grandi) 243.
- Terasaka, Hidetaka s. T. Homma 178.
- Terracini, Alessandro (Quaderni di Corrado Segre) 3.
- Thaler, R. M. s. G. Breit 439.
- Thébault, Victor (Questions d'arithmétique) 36; (Number theory) 39; (Géométrie du triangle) 151; (Quadrilatère convexe inscriptible) 153; (Skew quadrilateral) 154; (Tétraèdre) 154.
- Theimer, O. (Raman-Effekt 1. Ordnung) 233.
- Thierrin, Gabriel (Demi-groupes) 17.
- Thom, René (Sous-variétés et classes d'homologie. I. II.) 395; (Problème de Steenrod) 396; (Variétés différentiables cobordantes) 396.
- Thomas, G. H. M. (Partitions of two sets) 386.
- Johannes (Lineare Differentialgleichungssysteme) 91.
- L. H. s. J. Sheldon 133.
- — — s. B. Zondek 410.
- jr., George B. (Calculus) 277.
- Thompson, G. L. (Bridge and signaling) 144; (Signaling strategies) 144.
- — — s. T. S. Motzkin 142.
- N. (Dislocation nodes) 449.
- Thomson, Robb s. P. G. Bergmann 215.
- Thorel, Jean (Représentation de la Terre) 181.
- Thorndike, Lynn (G. Bianchini) 243.
- Thorne, C. J., R. S. Barker and H. Eyring (Quantum mechanical integrals. I.) 134.
- Thosar, Yeshwant V. (Operational calculus) 103.
- Thrall, R. M. and D. G. Duncan (Free modular lattices) 26.
- — — s. T. S. Motzkin 142.
- Thron, Wolfgang J. (Theory of functions) 75; (Mero-morphic functions) 297.
- Tibiletti, Cesarina (Estensione del $A\varphi + B\psi$) 371.
- Tierney, John A. (Transonic flow of polytropic gas) 198.
- Tietz, Horst s. R. Iglisch 184.
- Tietze, Heinrich (Eulerscher Satz über Partitionen) 269.
- Tillieu, Jacques et Jean Guy (Polarisabilités atomiques et moléculaires) 234.
- Tintner, Gerhard (Mathematics and statistics) 367.
- Titchmarsh, E. C. (H. Bohr) 2.
- Tits, J. (Plan projectif des octaves) 258.
- Tjabin, N. V. (Bewegung einer Kugel) 190.
- Todd, J. A. (Canonical system of a V_d) 375.
- Tolhoek, H. A. and J. A. M. Cox (Gamma radiation) 436.
- — — s. J. A. M. Cox 437.
- Tollmien, W. (Adamssches Interpolationsverfahren)

- 127; (Turbulenzforschung) 201.
- Tomlinson, Fort (Differential and difference equations) 88.
- Tomotika, S., T. Aoi and H. Yosinobu (Forces on a circular cylinder) 413.
- Toraldo di Francia, Giuliano (Onde elettromagnetiche) 418.
- Tordion, Georges (Simpson'sche Formel) 348.
- Tornehave, Hans (Analytic functions) 306.
- Török, C. s. H. Zocher 448.
- Torres, Guillermo (Alexander polynomial) 179.
- Toscano, Letterio (Polinomi di Laguerre) 292.
- Touchard, Jacques (Prime numbers) 268.
- Touschek, B. s. R. Chisholm 438.
- F. s. W. K. Burton 223.
- Trachtenbrot, B. A. (Rekursive Trennbarkeit) 8.
- Traill-Nash, R. W. and A. R. Collar (Shear flexibility) 405.
- Trainor, L. E. H. and Ta-You Wu (Electron scattering) 232.
- Travers, Serge (Calcul de l'épaisseur des ondes de choc) 200.
- Trenin, S. I. (Axialsymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie) 400.
- Tresse, A. (Géométries non euclidiennes) 370.
- Tricomi, Francesco G. (Polinomio di Legendre) 292; (Classico prodotto infinito) 300.
- Trofimov, P. I. (Einfluß der Untergruppen auf Eigenschaften einer Gruppe) 255.
- Troickij, V. A. (Gleichungen der automatischen Regulierung) 91.
- Truesdell, C. (Measures of vorticity) 195; (Geometrical theorem of Euler) 377.
- Tsien, H. S. (Stressing heated wings) 188.
- Tsuji, Hiroshi (Laminar boundary-layer equations) 198.
- Masatsugu (Inverse function of meromorphic function) 304.
- Tuganov, N. G. (Dupinsche Indicatrizen) 379.
- Turing, A. M. (Riemann zeta-function) 81.
- Tvermoes, Helge (Gruppenbegriff) 253.
- Twerssky, V. (Reflection coefficients) 419.
- Uberoi, Mahinder S. and Leslie S. G. Kovaszny (Random fields) 138; (Isotropic turbulence) 201.
- Überall, Herbert (Kernphotoeffekt an Beryllium) 230; (Photoeffekt) 233.
- Ufljand, Ja. S. s. G. A. Grinberg 125.
- Uhr, Horace S. (Omnibus checking of table of denary logarithms) 134; (Mathematical copying camera) 350.
- Ungar, Peter (Diagrams representing maps) 180.
- Unger, G. (Maximalstetige Kurven) 386; (Kneser-Juelsche Kurven) 386.
- Unkelbach, Helmut (Schlichte konforme Abbildungen) 83.
- Urban, P. s. E. Ledinegg 240.
- Ursell, F. (Mass transport in gravity waves) 203.
- Utiyama, Ryōyū and Tsutomu Imamura (Perturbation method) 429.
- Utz, W. R. (Scholz-Brauer problem) 269.
- — — s. G. M. Ewing 120.
- Vaart, H. R. van der (Spherical polyhedra) 154.
- Vaccaro, Giuseppe (Singularità superficiali. II.) 373.
- Vachaspati (Quantum mechanical equations of motion) 221.
- Vaidya, P. C. („Newtonian“ time in general relativity) 213.
- Vajda, S. (Spieltheorie) 147.
- Vajnštejn, L. A. und B. M. Jarovskij (Photoionisation) 233.
- Val, Patrick du (Algebraic loci) 158; (Regular surfaces. I.) 158.
- Valentine, F. A. s. T. S. Motzkin 165.
- Valiron, Georges (Construction de H. Poincaré) 295.
- Vallander, S. V. (Hyperbolische partielle Differentialgleichungen) 95.
- Van Le, Nguyen (Boundary layer equations) 411.
- Vandekerkhove, E. (Rayons stellaires) 453.
- Vandiver, H. S. (Travaux de D. Mirimanoff) 2.
- Varsano, Sami s. F. Pellegrino 336.
- Vaught, R. L. s. J. L. Kelley 110.
- Vekua, I. N. (Harmonische Polynome) 289; (Darstellung der Funktionen von zwei Veränderlichen) 308.
- Verde, M. s. T. Regge 228.
- Vermes, P. (γ -matrices) 65.
- Vernotte, Pierre (Paramètres d'une loi expérimentale) 149; (Dérivation des courbes expérimentales) 149.
- Verzaux, P. (Ondes Hertiennes) 422.
- Vilenkin, N. Ja. (Vektorräume über topologischen Körpern) 108.
- Višner, I. A. (Anamorphose) 131.
- Villi, C. s. P. Budini 432.
- Vinti, John P. (Penetration of γ -rays) 439.
- Virtanen, K. I. (Hyperbolische Maßbestimmungen) 304.
- Višik, M. I. (Elliptische Differentialgleichungen) 98.
- Vivier, Marcel (Dérivation totale) 93; (Formes à multiplication extérieure) 93.
- Vleck, J. H. van (Exchange coupling in ferro-magnetic media) 240.
- Vogel, Kurt (Mathematische Geschichtsschreibung) 1.
- Th. (Servomécanismes) 151.
- Walter (Standard-Absterbeordnungen) 149.
- Vojt, S. S. (Reflexion und Brechung) 191; (Verdichtungen in einem Gase) 198.
- Volkman, Bodo s. H. Rohrbach 269.
- Volkoff, G. M. s. G. Lamarche 446.
- Volkov, D. M. (Hyperbolische Gleichungen) 318.
- Vollmer, Th. s. W. Kofink 415.
- Volta, Vittorio Dalla s. Dalla Volta, Vittorio 381, 384.
- Volterra, Enrico (Reflections of beams) 188.
- Vorob'ev, N. N. (Assoziative Systeme) 16.

- W**aadeland, Haakon (Transcendental equations. II. III.) 296.
Waerden, B. L. van der (Algebraische Geometrie. 16.) 157; (Distribution function) 361; (Problem der zwei Stichproben) 361.
 ————— s. K. Schütte 167.
Wait, James R. (Magnetic dipole source) 208; (Conducting permeable sphere) 417; (Radiation resistance) 419.
Wakely, P. G. (Binding energy) 227.
Waldmann, Ludwig (Klassische Feldmechanik) 427.
Walfisz (Val'fiš), A. Z. (Eulersche Funktion) 268; (Isolierte Primzahlen) 272.
Wall, H. S. (Convex mass functions) 284.
Wallace, A. D. (Boolean rings) 26.
Waller, Ivar s. P. Svenonius 223.
Wallot, Julius (Größengleichungen) 398.
Walsh, John E. (Mortality rates) 366.
 — J. L. (Interpolation series expansion) 76.
 — — — s. T. S. Motzkin 69.
Walter, Edward (Entscheidungsfunktionen) 148.
Wang, Hao et Robert McNaughton (Théorie des ensembles) 50.
Wangsness, Roald K. (Nuclear moment) 439.
Wannier, Gregory H. (Mathieu's equation) 293; (Ionization of atoms) 448.
Wapstra, A. H. s. J. M. W. Milatz 350.
Ward, James A. (From Cauchy-Riemann equations to algebras) 86.
Warga, J. (Systems of ordinary differential equations) 123.
Wasow, Wolfgang (Problemi di analisi) 352.
 — — — s. T. S. Motzkin 125.
Wasserman, Lee S. (Singular integrals) 198.
Wataghin, G. (Cut-off operators) 432.
Watanabe, Satoru (Fusion theory of bosons) 225.
Watson, G. L. (Indefinite quadratic forms) 47; (Minkowski's conjectures) 47; (Quadratic forms) 47.
Watson, G. S. s. P. M. Gilet 357.
 — Kenneth M. (Multiple scattering) 229.
 — P. D. (Sequences of sets) 392.
Waugh, Frederick V. s. P. S. Dwyer 347.
Wax, Nelson (Electron-optical systems) 211.
Weber, Alfons s. S. M. Férigle 235.
 — J. (Electrical oscillator) 432.
 — Johanna s. D. Küchemann 406.
 — Max (Kombinationsseismograph) 457.
Wedel, Arnold Marion (Hypergeometric functions) 294.
Weier, Josef (Fixpunkttheorie) 397.
Weinberg, Louis (RLC networks) 209; (Zeros in the unit circle) 252.
Weise, Karl-Heinrich (Mathematisches Denken) 3.
Weissinger, J. (Numerische Integration) 123; (Seidel'sches Iterationsverfahren) 124.
Weitzenböck, R. W. (Equilateral triangles) 152.
Weizel, W. (Ablauf von Funktionen) 447.
Welton, T. A. s. A. Simon 443.
Westfold, K. C. (Collisional effects) 447.
Westpfahl, Konradin s. R. Müller 209.
Weyl, Hermann (Symbolismus der Mathematik) 3.
Wheeler, D. J. s. R. A. Brooker 133.
 — John Archibald s. D. L. Hill 440.
Whitehead, George W. (Freudenthal theorems) 175.
Whittaker, E. T. (A. J. W. Sommerfeld) 243.
 — J. M. (Two-point boundary problem) 288.
Whyte, L. L. (Dimensional theory) 398.
Wiegmann, N. A. (Pairs of normal matrices) 11.
Wieringen, J. S. van s. J. M. W. Milatz 350.
Wigner, E. P. s. E. Inonu 26.
 — — — s. T. Teichmann 208.
Widenes, P. (Tafeln) 134.
Wijngaarden, A. van s. H. J. A. Duparc 266.
Wildermuth, Karl (Quantentheorie der Wellenfelder) 222; (Born-Oppenheimer'sche Näherung) 232; (Mehrkörperprobleme) 232.
Wilkes, E. W. s. A. E. Green 403.
 — M. V. („Floating address“ System) 133.
Wille, R. J. (Transformation intérieure d'une surface non orientable) 178.
Willers, Friedrich-Adolf (Mathematische Maschinen) 132.
Williams, G. T. (Evaluating $\zeta(2n)$) 68.
 — jr., A. O. (Self-consistent field) 232.
Williamson, E. M. (Energy in nuclear field) 225.
 — — — s. H. T. Flint 218.
 — J. H. (Linear transformations) 341.
Wilson, Edwin B. (Significance levels) 362.
 — R. (Growth of product of integral functions) 82; (Coefficient theory of integral functions) 301.
Winston, Harvey (Perturbed periodic potentials) 238.
Winther, Aage and O. Kofoed-Hansen (Coupling constants in β -decay) 230.
Wintner, Aurel (Infinitesimal geometry of curves) 378.
 — — — s. Ph. Hartman 72, 159, 318, 378.
Wise, M. E. s. P. J. Rijkooort 361.
Witt, C. Morette De s. Morette De Witt, C. 427.
 — Ernst (Freie Ringe) 28.
Wittich, Hans ($w'' = P(z, w)$) 90; (Exponentialsummen) 305.
Witting, Hermann (Grenzschichttheorie) 408.
Wohlfarth, E. P. (Exchange energy) 238; (Electron theory of ferromagnetism) 239.
Wold, H. and L. Jurén (Demand analysis; econometrics) 368.
Wolf, Paul (Invariante Kennzeichnung galoisscher Körper) 33; (Galoissche Algebren. I.) 34.
Wolfowitz, J. s. A. Dvoretzky 148.

- Wolfson, Kenneth G. (Ring of linear transformations) 115.
- Wollan, G. N. (Double series) 287.
- Wong, Y. K. (Minkowski matrices) 250.
- Woodcock, E. R. (Multi-group neutron transport) 443.
- Woods, L. C. (Poisson's equation) 349.
- Woodward, P. M. s. D. G. Bell 238.
- Woronetz, Constantin (Forme du jet liquide) 198.
- Worsing, Robert A. (Elastic plate problems) 401.
- Wright, Fred B. (Absolute valued algebras) 31.
- Wu, Ta-You s. G. E. Tauber 443.
- — s. L. E. H. Trainor 232.
- Wuest, W. (Laminare Grenzschichten) 197.
- Wunderlich, Walter (Lignes D des quadriques) 383.
- Wünsche, Günther (Sequential-Testverfahren) 149.
- Wylie jr., C. R. (Calculus) 277.
- Wyss, Hans (Risikotheorie) 151.
- Yafet, Y. s. F. Keffer 239.
- Yamada, Masami (Beta-decay nuclear matrix elements) 231.
- Yamamoto, Susumu (Finiter Charakter dergriechischen Mathematik) 241.
- Yosinobu, H. s. S. Tomotika 413.
- Yowell, Everett C. s. G. Blanch 134.
- Yuasa, Tosiko et Jeanne Laberrigue-Frolow (Fonction de Fermi) 205.
- Zacher, Giovanni (Emiomorfismi superiori) 258.
- Zadeh, L. A. (Nonlinear filters) 417.
- Zajceva, M. J. (Anordnungen einer Abelschen Gruppe) 23.
- Zamansky, Marc (Séries divergentes) 65.
- Zarankiewicz, C. s. C. Kuratowski 170.
- Zatzkis, Henry (Heat conduction) 206.
- Zel'dovič, Ja. B. (Isobare eines Nukleons) 231.
- Zelinsky, Daniel (Linearly compact modules) 108.
- Zemmer, Joseph L. (Ordered algebras) 262.
- Zener, C. and R. R. Heikes (Exchange interactions) 238.
- Zilber, J. A. s. S. Eilenberg 173.
- Ziman, J. M. (Antiferromagnetism. III.) 239.
- Zimmermann, Wolfhart (Yang-Feldman-Formalismus) 430.
- — s. W. Glaser 224.
- Zirin, Harold (Exchange potential in electron gas) 221.
- Zitarosa, Antonio (Problema di Dirichlet-Neumann) 319.
- Zlámál, Miloš (Lineare Differentialgleichungen) 312.
- Zocher, H. and C. Török (Space-time asymmetry) 448.
- Zondek, B. and L. H. Thomas (Plane Couette flow) 410.
- Zuhrt, Harry (Strahlungsfelder) 418.
- Zulauf, Achim (Goldbachsche Vermutung) 270.
- Zurmühl, R. (Praktische Mathematik) 346.
- Zwicky, F. (Kosmologische Forschung) 453.
- Zygmund, Antoni s. R. Salem 73.
- Zykov, A. A. (Spektrum im Prädikatenkalkül) 7.